Pure Mathematics 理论数学, **2026, 16(11), 48-57**
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611233

Hans汉斯

完全二部图$K_{n,n}$的线图中的完全独立生成树

林炜昕，周垂香*

福州大学，离散数学研究中心，福建 福州

收稿日期：2026年9月28日；录用日期：2026年11月3日；发布日期：2026年11月11日

摘　要

连接不同顶点u和v的两条路径P_1和P_2，若它们没有共同的内部顶点，则称为公开不相交的。设$T_1, T_2, \ldots, T_k$是G的生成树。如果对于每一对不同的顶点$u, v \in V(G)$，在$T_1, T_2, \ldots, T_k$中从u到v的路径两两公开不相交，则称$T_1, T_2, \ldots, T_k$为G中的完全独立生成树。关于完全独立生成树，我们关心的问题是图中最多可以存在多少棵完全独立生成树。对于线图，**Hasunuma**证明了对于任意$n \geq 4$，$L(K_n)$中存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树，并且进一步地，当$n = 4$或$n$为奇数时，$L(K_n) - v$（对任意顶点$v$）中仍存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树；当$n$（$n \geq 6$）为偶数时，$L(K_n) - V(P)$（对任意阶至多$\frac{n}{2}$的诱导路径$P$）中仍存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树。在本文中，我们将**Hasunuma**的想法推广至$K_{n,n}$的线图，并得到：对于任意$n \geq 3$，$L(K_{n,n})$中存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树，进一步地，当$n$为奇数时，$L(K_{n,n}) - v$（对任意顶点$v$）中仍存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树；当$n$为偶数时，$L(K_{n,n}) - V(P)$（对任意阶至多$n$的诱导路径$P$）中仍存在$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$棵完全独立生成树。

关键词

完全独立生成树，完全二部图，线图

Completely Independent Spanning Trees in the Line Graph of Complete Bipartite Graph $K_{n,n}$

Weixin Lin, Chuixiang Zhou*

* 通讯作者。

文章引用: 林炜昕, 周垂香. 完全二部图$K_{n,n}$的线图中的完全独立生成树[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 48-57.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611233

Center for Discrete Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: Sep. 28^{th}, 2026; accepted: Nov. 3^{rd}, 2026; published: Nov. 11^{th}, 2026

Abstract

Two paths P_1 and P_2 between distinct vertices u and v are called *openly disjoint* if they have no internal vertices in common. Let $T_1, T_2, \ldots, T_k$ be spanning trees of G. If for each pair of distinct vertices $u, v \in V(G)$, the paths from u to v in $T_1, T_2, \ldots, T_k$ are pairwise openly disjoint, then $T_1, T_2, \ldots, T_k$ are called completely independent spanning trees in G. Regarding completely independent spanning tree, the question we are concerned with is the maximum number of completely independent spanning trees that can exist in a graph. For line graphs, Hasunuma showed that for any $n \geq 4$, there are $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ completely independent spanning trees in $L(K_n)$, and further, $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ completely independent spanning trees still exist in $L(K_n) - v$ for any vertex v when $n = 4$ or n is odd and in $L(K_n) - V(P)$ for any induced path P of order at most $\frac{n}{2}$ when n (≥ 6) is even. In this paper, we apply Hasunuma's idea to the line graph of $K_{n,n}$ and obtain that, for any $n \geq 3$, there are $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ completely independent spanning trees in $L(K_{n,n})$, and further, $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ completely independent spanning trees still exist in $L(K_{n,n}) - v$ for any vertex v when n is odd and in $L(K_{n,n}) - V(P)$ for any induced path P of order at most n when n is even.

Keywords

Completely Independent Spanning Tree, Complete Bipartite Graph, Line Graph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文考虑的所有图都是有限的无向简单图。设$G = (V, E)$是一个图。顶点v在G中的度记为$d_G(v)$。图G的线图$L(G)$是以原图G的边集$E(G)$为顶点集的图，其中$L(G)$的两个顶点相邻当且仅当它们在G中对应的边相邻。对于$S \subseteq E(G)$或$S \subseteq V(G)$，从G中删除S中所有元素后得到的

图记为$G-S$，当S只包含一个元素s时可简写为$G-s$。对于非空子集$S\subseteq V(G)$，由S诱导的G的子图，记为$\langle S\rangle_G$，其顶点集为S，边集由E中两个端点都在S中的所有边组成。当$\langle S\rangle_G$是一条路径时，称其为G的一条诱导路径。P_n表示长度为n的路径，即有n条边的路径。在不会引起歧义的情况下，下标G常被省略。

设u，v是G的两个不同顶点。连接顶点u和v的两条路径P_1和P_2，若它们没有共同的内部顶点，则称为公开不相交的。设$T_1,T_2,\ldots,T_k$是G的生成树。如果对于每一对不同的顶点$u,v\in V(G)$，在$T_1,T_2,\ldots,T_k$中从u到v的路径两两公开不相交，则称$T_1,T_2,\ldots,T_k$为G中的完全独立生成树（缩写为CISTs）。

在1960年代就有关于边不相交生成树的最大可能数量的研究。Nash-Williams和Tutte独立地发现每个$2k$-边连通图都包含k棵边不相交生成树。在 [1]中，Hasunuma引入了CISTs的概念，并受到图包含k棵边不相交树的充分条件的启发，他后来在 [2]中猜想每个$2k$-连通图都包含k棵CISTs。然而，Péterfalvi [3]构造了一族k-连通图，对于任意$k\geq 2$，这些图都不包含两棵CISTs，推翻了该猜想。最近，关于k棵CISTs存在性的一些充分条件被广泛研究。例如，Araki [4]证明了Dirac条件可以保证两棵CISTs的存在，随后Hasumuma [5]以及Hong和Liu [6]分别独立地将该结论做了推广。更多结果可参考 [7–9]。

CISTs广泛应用于并行计算系统中，以提高通信的可靠性和安全性。通过构建具有完全独立路径的多棵生成树，即使某些节点或链路发生故障，系统仍能通过其他树继续广播，从而实现容错通信。详细信息可参考 [10–14]。与边不交生成树不同，Hasunuma [1]证明了判定任意图中是否存在两棵完全独立生成树是NP 完全问题。尽管存在这种计算复杂性，但在某些图类中存在的CISTs，例如P_4–free图 [15]、分裂图 [16]和完全t-部图 [17]，已引起广泛关注。对于线图，Hasunuma [1]证明了k-连通线图的基础图包含k棵CISTs。对于任意阶$n\geq 4$的完全图K_n，Wang等人 [18]提出了一种在$L(K_n)$中构造$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树的算法。在 [19]中，Hasunuma给出了$L(G)$中完全独立生成树最大数量的紧致下界，并且在同篇论文中，他从非算法角度提出了一个比$L(K_n)$中存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵独立生成树更强的结果。

定理1.1 (Hasunuma [19])**.** 对于任意$n\geq 4$，$L(K_n)$中存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树。此外，

(1) 若$n=4$或n为奇数，则对任意顶点v，$L(K_n)-v$中仍存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树；

(2) 若n为偶数且$n\geq 6$，则对任意阶至多$\frac{n}{2}$的诱导路径P，$L(K_n)-V(P)$中仍存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树。

受 [18]结果的启发，Lai等人 [20]提出了一种在$L(K_{n,n})$（$n\geq 3$）中构造$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树的算法。本文在该研究的基础上，进一步细化构造过程，并对相关结论给出完整的证明。与文献 [20] 主要关注完全独立生成树的构造不同，本文进一步考察了线图在删除部分顶点或诱导路径后完全独立生成树的保持性，从而将研究拓展至具有顶点或路径容错需求的情形。基于上述研究思路，我们得到以下定理。

定理1.2. 对于任意$n\geq 3$，$L(K_{n,n})$中存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树。此外，

(1) 若n为奇数，则对任意顶点v，$L(K_{n,n})-v$中仍存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成树；

(2) 若n为偶数，则对任意阶至多n的诱导路径P，$L(K_{n,n})-V(P)$中仍存在$\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$棵完全独立生成

树。

说明. 定理1.2 中需要根据n 的奇偶性分别进行讨论，主要原因在于本文所构造的边不相交子树族具有不同的剩余边结构。当n 为偶数时，前$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 棵子树所使用的边集之外的剩余边诱导出一条路径；而当n 为奇数时，剩余边集的结构不同，需要利用额外的一棵子树$T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 对剩余边进行处理。因此，奇偶两种情况下不仅子树的数量不同，其最后一棵树的构造方式以及后续验证完全独立生成树条件的方法也有所区别。

2. 预备知识

图G的支配集S是$V(G)$的一个顶点子集S，使得$V(G) \setminus S$中的每个顶点都至少与S中的一个顶点相邻；若子图$\langle S \rangle_G$是连通的，则称支配集S是连通的。对于两个非空不相交子集$S_1, S_2 \subset V(G)$，$\langle S_1, S_2 \rangle_G$表示$G$中以$(S_1, S_2)$为二部划分的诱导二部子图，即$\langle S_1, S_2 \rangle_G = \langle S_1 \cup S_2 \rangle_G - \big(E(\langle S_1 \rangle_G) \cup E(\langle S_2 \rangle_G)\big)$。

下面Hasunuma证明的结果为k棵完全独立生成树的存在性提供了一个充分条件。

引理2.1 (Hasunuma [19]). 图G有k棵完全独立生成树当且仅当存在k个不交的连通支配集$V_1, V_2, \ldots, V_k$，使得对于任意$i \neq j$，$\langle V_i, V_j \rangle_G$的每个分支都含有一个圈。

考虑图$G - S$（其中$S \subseteq V(G)$），由引理2.1可得出以下结论。

命题2.2 (Hasunuma [19]). 若图G存在k个不交的连通支配集$V_1, V_2, \ldots, V_k$，使得对于任意$i \neq j$，$\langle V_i, V_j \rangle_G$的每个分支都含有一个圈，则对于任意$S \subseteq V(G) \setminus \bigcup_{1 \le i \le k} V_i$，$G - S$中存在$k$棵完全独立生成树。

3. 定理1.2的证明

设$n \geq 3$且$K_{n,n} = B(V_a, V_b)$。将V_a中的顶点标记为$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$，$V_b$中的顶点标记为$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$。

为方便起见，我们首先考虑$n = 3$的情况。定义$K_{3,3}$的子树T_0和T_1为$E(T_0) = \{a_0b_0,\ a_0b_1,\ a_1b_0,\ a_1b_2\}$和$E(T_1) = \{a_0b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2\}$。设$S_0$和$S_1$是$L(K_{3,3})$中分别对应于$E(T_0)$和$E(T_1)$的顶点集。注意$K_{3,3}$的边$a_2b_0$未被使用，而其在$L(K_{3,3})$中对应的顶点同时被$S_0$和$S_1$支配。于是容易验证$S_0$和$S_1$是$L(K_{3,3})$的不交连通支配集。通过简单检验，我们可以看到$\langle S_0, S_1 \rangle_{L(K_{3,3})}$ 是连通的并且含有一个圈（参见图 1）。根据命题2.2和$K_{3,3}$的对称性，定理1.2对$n = 3$成立。在下文中，我们假设$n \geq 4$。

对于$0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，定义$K_{n,n}$的树$T_i$如下，其中下标均按模$n$计算：

$$\begin{cases} V(T_i) = V(K_{n,n}) \setminus \{a_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}\}, \\ E(T_i) = \big\{a_ib_i,\ a_ib_{i+1},\ \ldots,\ a_ib_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor};\ b_ia_{i+1},\ \ldots,\ b_ia_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor};\\ \qquad a_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}b_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1},\ \ldots,\ a_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}b_{i+n-1};\ b_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}a_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2},\ \ldots,\ b_{i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}a_{i+n-1}\big\}. \end{cases}$$

上述构造的核心思路是利用完全二部图$K_{n,n}$ 的循环对称性，每一棵T_i 都由一批局部

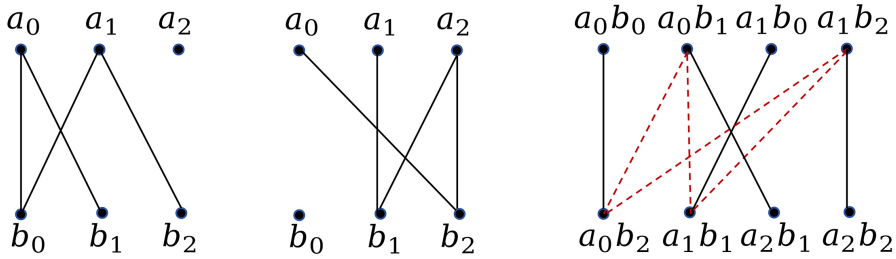


Figure 1. Subtrees T_0 and T_1; Dashed lines for the cycle of $\langle S_0, S_1\rangle_{L(K_{3,3})}$

图 1. 子树T_0和T_1；$\langle S_0, S_1\rangle_{L(K_{3,3})}$中的圈为虚线

结构相近的边构成生成子树。对每个下标i，子树T_i不含顶点$a_{i+\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1}$，剩余全部顶点依靠以$a_i, b_i, a_{i+\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}, b_{i+\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$为核心的边实现连通。文中所有顶点下标均按模$n$取值，因此各个$T_i$的构造模式完全一致，相互之间仅做顶点下标的循环平移。这套构造既能保证每一个T_i是连通的生成子树，又能够使得不同T_i的边集两两不交，这为在线图$L(K_{n,n})$中构造一组互不相交的连通支配集提供了条件。

容易验证$T_0, T_1, \ldots, T_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-1}$是边不相交的并且

$$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} E(T_i) = \begin{cases} E(P) \cup \{b_{n-1}a_n\}, & \text{若} n \text{ 是偶数;} \\ E(P) \cup \{a_{n-1}b_n,\ a_{n-1}b_{n+1},\ \ldots,\ a_{n-1}b_{n-1+\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\} & \\ \cup \{b_{n-1}a_n,\ b_{n-1}a_{n+1},\ \ldots,\ b_{n-1}a_{n-1+\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\}, & \text{若} n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

其中$P = a_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} b_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1} \ldots b_{n-2}a_{n-1}b_{n-1}$。

对于每个奇数n，容易检查$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} E(T_i)$诱导出一棵树，其中$a_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$是一个叶子点。因此我们定义$T_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$（$n$为奇数）如下：

$$\begin{cases} V(T_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}) = V(K_{n,n}) \setminus \{a_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\}, \\ E(T_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}) = E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} E(T_i) \setminus \{a_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} b_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\}. \end{cases}$$

至此，构造了$\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor$棵树（详细描述参见图 2和图 3）。

用$S_0, S_1, \cdots, S_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor-1}$表示$L(K_{n,n})$中对应于$E(T_0), E(T_1), \ldots, E(T_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor-1})$的顶点子集。$T_i$的连通性意味着$\langle S_i\rangle_{L(K_{n,n})}$的连通性，其中$0 \le i < \lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor$。进一步地，由于$T_0, T_1, \ldots, T_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor-1}$是$K_{n,n}$中阶为$2n-1$的边不相交子树，$E(K_{n,n}) \setminus E(T_i)$（$0 \le i \le \lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor - 1$）中的每条边都与$E(T_i)$中的某些边相邻，这意味着$L(K_{n,n})$中的顶点子集$S_0, S_1, \cdots, S_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor-1}$是$\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor$个不交的连通支配集。为方便起见，我们将根据$n$的奇偶性分两种情况讨论。

(i) n为奇数。边集$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor} E(T_i)$诱导出一条$P_1$，对应于$L(K_{n,n})$中的一条诱导$P_0$，即单个顶点$u$。因此，$S_0, S_1, \cdots, S_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor-1}$仍然是$L(K_{n,n}) - u$的不交连通支配集。由$K_{n,n}$的对称性，对任意顶点$v$，$L(K_{n,n}) - v$都有$\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor$个不交连通支配集。

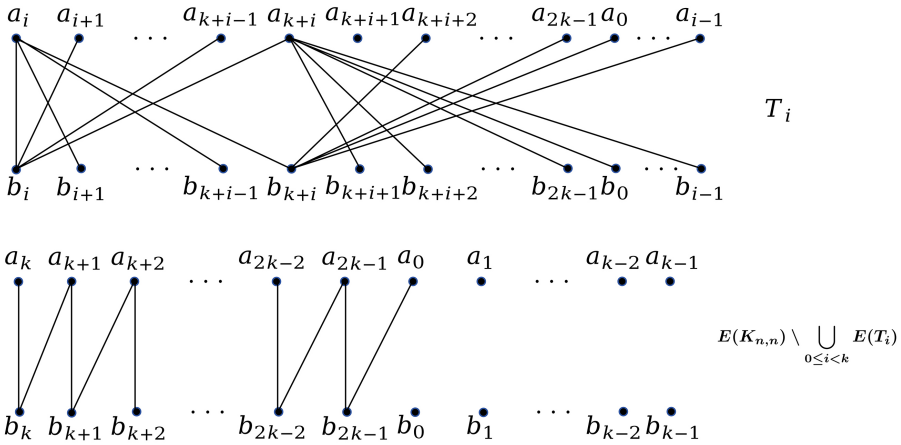


Figure 2. The edges of T_i and $E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<k} E(T_i)$ for even $n = 2k$

图 2. 对于偶数$n = 2k$，T_i和$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<k} E(T_i)$的边

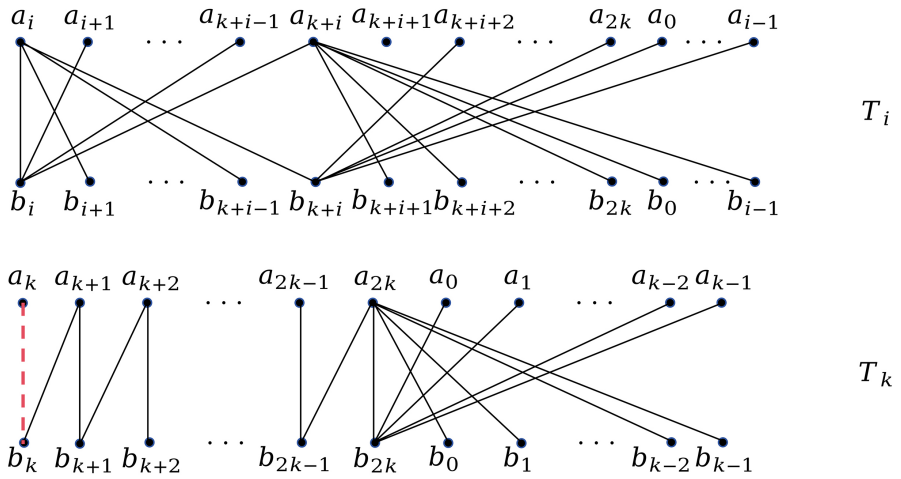


Figure 3. The edges of T_i and T_k for odd $n = 2k + 1$; $E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i\le k} E(T_i) = \{a_k b_k\}$

图 3. 对于奇数$n = 2k + 1$，T_i和T_k的边；$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i\le k} E(T_i) = \{a_k b_k\}$

(ii) n为偶数。边集$E(K_{n,n}) \setminus \bigcup_{0\le i<\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E(T_i)$诱导出一条$P_n$，对应于$L(K_{n,n})$中的一条诱导$P_{n-1}$，记为$Q$。因此，$S_0, S_1, \cdots, S_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$仍然是$L(K_{n,n}) - V(Q)$的不交连通支配集。由$K_{n,n}$的对称性，对任意$n$个顶点的诱导路径$P$，$L(K_{n,n}) - V(P)$都有$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$个不交连通支配集。

因此，为了证明定理1.2，根据命题2.2，只需证明对于任意$i \neq j$，$\langle S_i, S_j \rangle$的每个分支都含有一个圈。

断言3.1. 对于任意$0 \le i < j < k$，其中$k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$且$n = 2k + 1$，$\langle S_i, S_j \rangle$的每个分支都含有一个圈。

证明. 图 4描述了T_i和T_j的边。不失一般性，我们假设$\langle S_i, S_j \rangle$是连通的，因为一般情况可以逐个连通分支进行下述讨论。设$B = \langle S_i, S_j \rangle$。如果$B$的每个顶点的度都至少为2，则$B$中存在一个圈，证明完成。假设$B$中存在一个度为1的顶点。设$v_e$是$B$中这样的一个顶点，$e$是$K_{n,n}$中对应于$v_e$的边。那么可能出现以下两种情况。

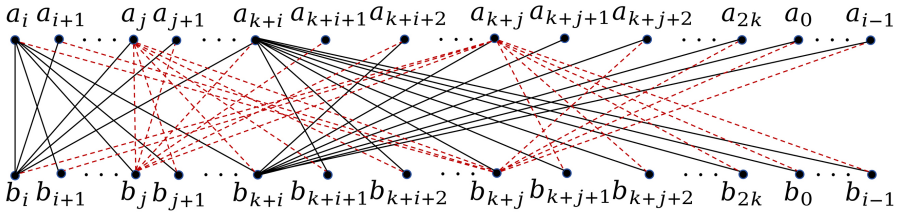


Figure 4. The edges of T_i and T_j wiht $i < j$; Solid lines for T_i, dashed lines for T_j

图 4. $i < j$时T_i和T_j的边；T_i为实线，T_j为虚线

情况*1.* 边e位于$E(T_i)$中。

根据我们的构造，对于每个$0 \le i < k$，$a_{k+i+1} \notin V(T_i)$，并且T_i中除a_i、b_i、a_{k+i}和b_{k+i}外的所有顶点都是叶子点。

B中度数为1的顶点v_e意味着e恰好与T_j中的一条边相邻。换句话说，e的一个端点是T_j的一个叶子点，而另一个端点不在T_j中。根据上述分析，a_{k+j+1}是不包含在T_j中的顶点，因此它是e的一个端点。由假设$i < j$和T_i的构造可知，a_{k+j+1}在T_i中的唯一邻点是b_{k+i}。这意味着T_i中只有一条边$e = a_{k+j+1}b_{k+i}$使得v_e在B中度数为1。注意v_e在B中的邻点是v_f，其中$f = a_jb_{k+i} \in E(T_j)$。因此$d_{T_i}(a_j) = 1$且$d_{T_i}(b_{k+i}) = k$，这意味着$d_B(v_f) = k + 1 \ge 3$。

情况*2.* 边e位于$E(T_j)$中。

我们考虑以下两种子情况。

情况*2.1.* $k + i + 1 < k + j$，等价地，$i + 1 < j$。

与情况1中讨论的论证类似，我们有T_j中满足$d_B(v_e) = 1$的唯一一条边是$e = a_{k+i+1}b_j$，并且v_e在B中的唯一邻点是v_f，其中$f = a_ib_j \in E(T_i)$。由$d_{T_j}(a_i) = 1$且$d_{T_j}(b_j) = k + 1$可知$d_B(v_f) = k + 2 \ge 3$。

情况*2.2.* $k + i + 1 = k + j$，等价地，$i + 1 = j$。

如前所述，$a_{k+i+1} = a_{k+j}$是不包含在T_i中的e的一个端点。考虑T_j中所有与a_{k+j}关联的边。对于任意$t = k + j + 1, k + j + 2, \cdots, k + j + k + 1$（$t$按模$2k + 1$取值），$a_{k+j}b_t$是$E(T_j)$中的一条边，并且进一步地，若$t \ne i$，则

(i) 每个b_t是T_i的一个叶子点；

(ii) 每个b_t（$t \ne j$）在T_i中与a_{k+i}相邻，而b_j在T_i中与a_i相邻。

为方便起见，在下面的讨论中我们总是将t限制在范围$k + j + 1 \le t \le k + j + k + 1$（模$2k + 1$）且$t \ne i$内。由(i)和(ii)，我们可以得出结论：对于任意$e = a_{k+j}b_t$，$d_B(v_e) = 1$。如(ii)中所讨论，v_e在B中的唯一邻点是v_f，其中

$$f = \begin{cases} a_{k+i}b_t, & \text{若} e = a_{k+j}b_t \ (t \ne j); \\ a_ib_j, & \text{若} e = a_{k+j}b_j. \end{cases}$$

现在我们来考察v_f在B中除v_e外的邻点。若$t=j$，则$d_{T_j}(a_i)=1$且$d_{T_j}(b_j)=k+1$。因此，$d_B(v_f)=k+2$。若$t\neq j$，注意到b_t是T_i和T_j的叶子点，且a_{k+i}是T_j的一个叶子点，则v_f是B中度数为2的顶点。在这种情况下，设v_h是v_f除v_e外的邻点。那么$h=a_{k+i}b_j$。不难检查$d_{T_i}(a_{k+i})=k+1$。因此，我们有$d_B(v_h)=k+2$。

现在我们准备证明断言3.1。若不存在$e\in E(T_j)$使得v_e是度数为1的顶点，那么根据前面的情况1讨论，B只有一个度数为1的顶点，因此B包含一个圈。假设情况2发生。若$i+1<j$，即子情况2.1发生，则B中至多有两个度数为1的顶点。在这种情况下，度数为1的顶点的邻点度数至少为3，如情况1和子情况2.1中所分析。那么B中也存在一个圈。因此我们只需要考虑$i+1=j$的情况。现在删除B中所有度数为1的顶点。回顾S_i中度数为1的唯一顶点是v_e，其中$e=a_{k+j+1}b_{k+i}$，且v_e的邻点在B中度数为$k\geq 3$。因此删除v_e不会产生任何新的度数为1的顶点。S_j中有k个度数为1的顶点，其中一个的邻点度数为$k+2$，其余$k-1$个的邻点度数都为2。因此删除操作将导致$k-1$个新的度数为1的顶点，它们都与同一个度数为$k+2$的顶点相邻。通过删除这$k-1$个新的度数为1的顶点，我们将得到B的一个连通子图，记为B'，且$\delta(B')\geq 2$。因此，正如该断言所述，B' 和B 都包含一个圈。 □

类似于断言3.1的证明，若n为偶数，则定理1.2立即得证。对于奇数n，我们需要单独处理S_k的情况。

断言3.2. 对于任意$0\leq i<k$，其中$k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$且$n=2k+1$，$\langle S_i,S_k\rangle$的每个分支都含有一个圈。

证明. 由构造可知，$a_k\notin V(T_k)$，并且$V(T_k)\setminus\{a_\ell,b_\ell\mid k+1\leq\ell\leq 2k\}$中的所有顶点都是$T_k$的叶子点。设$B=\langle S_i,S_k\rangle$。如前所述，我们可以假设$B$是连通的，且$v_e$是$B$中度数为1的顶点。我们考虑以下两种情况。

情况*1.* 边e位于$E(T_i)$中。

由此可得a_k是e的一个端点，因此$e=a_kb_i$。注意b_i在T_k中与a_{2k}相邻。因此v_e在B中的邻点是$f=a_{2k}b_i$。进一步地，$d_{T_i}(a_{2k})=1$（若$i\neq k-1$）或$d_{T_i}(a_{2k})=0$（若$i=k-1$），且$d_{T_i}(b_i)=k+1$。这意味着$d_B(v_f)=k+1$或$d_B(v_f)=k+2$。

情况*2.* 边e位于$E(T_k)$中。

此时，我们考虑以下两种情况。

(i) $0\leq i\leq k-2$。

这意味着$k+1\leq k+i+1\leq 2k-1$。根据T_k的构造，我们有$a_{k+i+1}b_{k+i}$，$a_{k+i+1}b_{k+i+1}\in E(T_k)$。由于$b_{k+i}$不是$T_i$的叶子点，我们有$e=a_{k+i+1}b_{k+i+1}$。因此$v_e$在$B$中的邻点是$v_f$，其中$f=a_{k+i}b_{k+i+1}\in E(T_i)$。容易检查当$i\neq 0$时$d_{T_k}(a_{k+i})=2$，且$d_{T_k}(b_{k+i+1})=2$。因此当$i\neq 0$时$d_B(v_f)=4$，当$i=0$时$d_B(v_f)=2$。

(ii) $i=k-1$。

那么$k+i+1=2k$，在这种情况下$e=a_{k+i+1}b_s$，其中$s=2k-1,2k,2k+1,\cdots,2k-1+k,2k-1+k+1$（模$2k+1$）。由于$b_{2k-1}$和$b_{k-1}$不是$T_i$的叶子点，若$e=a_{k+i+1}b_{2k-1}$或$e=a_{k+i+1}b_{k-1}$，则$v_e$不

是B中度数为1的顶点。对于$e = a_{2k}b_s$（$s = 2k, 0, 1, 2, \cdots, k-2$），$v_e$在$B$中度数为1，且$v_e$在$B$中的邻点是$v_f$，其中$f = a_{2k-1}b_s$。注意$d_{T_k}(a_{2k-1}) = 2$。对于$b_s$，若$0 \le s \le k-2$，则$d_{T_k}(b_t) = 1$；若$s = 2k$，则$d_{T_k}(b_t) = k+1$。因此

$$d_B(v_f) = \begin{cases} 3, & \text{若} f = a_{2k-1}b_s \ (0 \le s \le k-1); \\ k+3, & \text{若} f = a_{2k-1}b_{2k}. \end{cases}$$

通过删除B中度数为1的顶点，我们得到B的一个连通子图B'，它至多有一个度数为1的顶点。所以B'中存在一个圈，因此B中也存在一个圈。这就完成了断言3.2的证明。 □

定理1.2由断言3.1和断言3.2得出。 ■

基金项目

本研究得到国家自然科学基金(12271099)和福建省自然科学基金(2023J01413)的资助。

参考文献

[1] Hasunuma, T. (2001) Completely Independent Spanning Trees in the Underlying Graph of a Line Digraph. *Discrete Mathematics*, **234**, 149-157. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(00)00377-0

[2] Hasunuma, T. (2002) Completely Independent Spanning Trees in Maximal Planar Graphs. In: Goos, G., Hartmanis, J., van Leeuwen, J. and Kučera, L., Eds., *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Springer, 235-245. https://doi.org/10.1007/3-540-36379-3_21

[3] Péterfalvi, F. (2012) Two Counterexamples on Completely Independent Spanning Trees. *Discrete Mathematics*, **312**, 808-810. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.11.015

[4] Araki, T. (2013) Dirac's Condition for Completely Independent Spanning Trees. *Journal of Graph Theory*, **77**, 171-179. https://doi.org/10.1002/jgt.21780

[5] Hasunuma, T. (2016) Minimum Degree Conditions and Optimal Graphs for Completely Independent Spanning Trees. In: Lipták, Z. and Smyth, W., Eds., *Combinatorial Algorithms*, Springer, 260-273. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29516-9_22

[6] Hong, X. and Liu, Q. (2016) Degree Condition for Completely Independent Spanning Trees. *Information Processing Letters*, **116**, 644-648. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2016.05.004

[7] Chang, H., Wang, H., Yang, J. and Chang, J. (2015) A Note on the Degree Condition of Completely Independent Spanning Trees. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **98**, 2191-2193. https://doi.org/10.1587/transfun.e98.a.2191

[8] Fan, G., Hong, Y. and Liu, Q. (2014) Ore's Condition for Completely Independent Spanning Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **177**, 95-100. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.06.002

[9] Hong, X. and Zhang, H. (2020) A Hamilton Sufficient Condition for Completely Independent Spanning Tree. *Discrete Applied Mathematics*, **279**, 183-187. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.08.013

[10] Chang, Y., Pai, K., Hsu, C., Yang, J. and Chang, J. (2021) Constructing Dual-Cists of Folded Divide-and-Swap Cubes. *Theoretical Computer Science*, **856**, 75-87. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2020.12.023

[11] Chen, G., Cheng, B. and Wang, D. (2021) Constructing Completely Independent Spanning Trees in Data Center Network Based on Augmented Cube. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **32**, 665-673. https://doi.org/10.1109/tpds.2020.3029654

[12] Hasunuma, T. and Morisaka, C. (2011) Completely Independent Spanning Trees in Torus Networks. *Networks*, **60**, 59-69. https://doi.org/10.1002/net.20460

[13] Pai, K., Yang, J., Yao, S., Tang, S. and Chang, J. (2014) Completely Independent Spanning Trees on Some Interconnection Networks. *IEICE Transactions on Information and Systems*, **97**, 2514-2517. https://doi.org/10.1587/transinf.2014edl8079

[14] Qin, X., Hao, R. and Chang, J. (2020) The Existence of Completely Independent Spanning Trees for Some Compound Graphs. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **31**, 201-210. https://doi.org/10.1109/tpds.2019.2931904

[15] Chen, X., Li, J. and Lu, F. (2023) Two Completely Independent Spanning Trees of p_4-Free Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **39**, Article No. 30. https://doi.org/10.1007/s00373-023-02622-2

[16] Chen, X., Liu, Q. and Yang, X. (2023) Two Completely Independent Spanning Trees of Split Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **340**, 76-78. https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.07.001

[17] Hong, X. (2024) Mimimal Graphs for Completely Independent Spanning Trees and Completely Independent Spanning Trees in Complete t-Partite Graph. *Contributions to Discrete Mathematics*, **19**, 23-35. https://doi.org/10.55016/ojs/cdm.v19i2.62694

[18] Wang, Y., Cheng, B., Qian, Y. and Wang, D. (2022) Constructing Completely Independent Spanning Trees in a Family of Line-Graph-Based Data Center Networks. *IEEE Transactions on Computers*, **71**, 1194-1203. https://doi.org/10.1109/tc.2021.3077587

[19] Hasunuma, T. (2023) Completely Independent Spanning Trees in Line Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **39**, Article No. 90. https://doi.org/10.1007/s00373-023-02688-y

[20] Lai, J.C. and He, W.H (2025) Completely Independent Spanning Trees in the Line Graphs of Complete Bipartite Graphs. *Advances in Applied Mathematics*, **14**, 81-92. (In Chinese) https://doi.org/10.12677/aam.2025.142054