Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 272-279
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155176

Hans汉斯

极小3-连通平面图的构造

祝誉升

南宁师范大学数学与统计学院，广西 南宁

收稿日期：2024年11月29日；录用日期：2025年4月14日；发布日期：2025年5月31日

摘　要

设$\mathcal{G}$是由满足以下条件的3-连通平面二部图所组成的图类：$\mathcal{G}$的一部是3度点的集合，另外一部是度至少为4的点的集合。本文证明了若G是极小3-连通平面图且G中不存在边e使得G/e或$G/e\backslash f$是极小3-连通平面图，则$G\in\mathcal{G}$，这里f与e相邻于一个3度点。

关键词

极小3-连通平面图，结构

The Structure of Minimally 3-Connected Planer Graphs

Yusheng Zhu

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: Nov. 29th, 2024; accepted: Apr. 14th, 2025; published: May 31st, 2025

Abstract

Let $\mathcal{G}$ be a set of minimally 3-connected planer graphs such that every member of $\mathcal{G}$ is a bipartite graph with one parts of vertices of degree three and the other parts of degree at least four. Let G be a minimally 3-connected planar graph. This paper show that if G has no edge e such that either G/e or $G/e\backslash f$ is minimally 3-connected planar graph then $G\in\mathcal{G}$; here e and f are two edges incident to a vertex of degree 3.

Keywords

Minimally 3-Connected Planar Graph, Structure

文章引用：祝誉升．极小 3-连通平面图的构造[J]．理论数学, 2025, 15(5): 272-279.
DOI: 10.12677/pm.2025.155176

1. 引言

本文所考虑的图都是简单图。设 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)$ 是 G 的顶点集合，$V(G)$ 是 G 的边集合。对于子集 $T\subseteq V(G)$，若 $G-T$ 是不连通的，则称 T 是 G 的一个点割。若 $|T|=k$，则称 T 是一个 k-点割。若 $|V(G)|\geq k$ 且 G 中没有 $k-1$-点割，则我们称 G 是 k-连通的。对任意 $x\in V(G)$，$d(x)$ 表示 x 的度。设 $A\subseteq V(G)$，用 $G[A]$ 表示 G 的由顶点集 A 导出的子图，用 $G-A$ 表示图 G 去掉顶点集 A 所得到的图。

设 T 是一个点割且 $|T|=\kappa(G)$，若 A 是 $G-T$ 至少一个分支但不是所有分支的并，则称 A 是一个 T-断片。在不引起混淆的情况，我们简称 A 是一个断片。若 A 是一个 T-断片，则易见 $\overline{A}:=G-T-A$ 也是 T-断片。若断片 A 中任意真子集都不再是断片，则称 A 为端片。设 G 是 k-连通图，$\mathcal{T}_0$ 是 G 中所有 k-点割的集合。取 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_0$，若 $N(A)\in\mathcal{T}$ 则称一个断片 A 是一个 $\mathcal{T}$-断片。设 A 是 $\mathcal{T}$-断片且 A 的任意真子集都不再是 $\mathcal{T}$-断片，则称 A 是 $\mathcal{T}$-端片。

设 $e=xy$ 是 k-连通图 G 的边，若将 e 的两个端点用一个新的顶点代替并使新的顶点与 x 和 y 的所有邻点连边所得到的图记为 G/e。若 G/e 还是 k-连通图则称 e 是 G 的 k-可收缩边，否则我们称 e 是不可收缩边。在不引起混淆的情况下我们简称 e 是 G 的可收缩边。若 G 是 k-连通图，e 是 G 的 k-可收缩边，则 G/e 是 k-连通图。e 是 G 的 k-可收缩边，则 G 和 G/e 连通度相同且 G/e 的顶点数比 G 的顶点数少。k-可收缩边的存在，使得人们可以用归纳法证明一些图的性质。例如，利用 3-连通图一定存在 3-可收缩边这一性质，人们利用归纳法证明了著名的 krutowski 定理。

Theorem 1. 设 G 是平面图当且仅当 G 不包含 $K_{3,3}$ 或 K_5 作为子式。

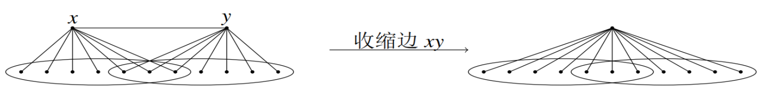

Figure 1. Contracting edge xy into a vertex
图 1. 边 xy 的收缩

另一方面，由定义可知，若 e 是 G 的不可收缩边，则 G 中存在 k-点割 T 使得 e 的两个端点都包含在 T 内。

设 e 是 k-连通图的边，若 $G-e$ 还是 k-连通图则称 e 是 G 的 k-可去边，在不引起混淆的情况下简称 e 是 G 的可去边。为方便叙述，我们记 $G\setminus e=G-e$。不存在可去边的 k-连通图称为极小 k-连通图。若 G 是极小 k-连通图，e 是 G 的一条边，由于 $G-e$ 不是 k-连通图，则 $G-e$ 中存在 $k-1$-点集 T 使得 $G-e-T$ 不连通且 $G-e-T$ 恰有两个分支 A_1 和 A_2 满足 e 的两个顶点分别包含在 A_1 和 A_2 中。

设 G_1 和 G_2 是两个图，$\phi:V(G_1)\to V(G_2)$ 是一一映射，满足 uv 是 G_1 的边当且仅当 $\phi(u)\phi(v)$ 是 G_2 的边。我们称 ϕ 是 G_1 到 G_2 的同构映射。此时，称 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1\cong G_2$。由定义可知，$G_1\cong G_2$ 表明这两个图本质上是一样的。

设 G 是 k-连通图，H 是由 G 的子图经过去点、去边和收缩边运算得到，我们称 H 是 G 的子式。设 H 和 G 都是 3-连通图且 H 是 G 的子式，称边 e 是 H-可去边，如果 $G\setminus e$ 是 3-连通图且包含 H 作为子式；称边 e 是 H-收缩边，如果 G/e 是 3-连通图且包含 H 作为子式。设 H 和 G 都是 3-连通图，H 是 G 的子式且 H 与 G 之间不构成同构关系，P.Seymour 在 1980 年证明了，除了一类特殊例外图，G 中存在 H-可去边或 H-可收缩边。

人们对极小 k-连通图的结构进行了诸多研究，得到了一系列结论。W.Mader [1]证明了极小 k-连通图

的每一个圈上至少有一个 k-度点，由此他给出了极小 k-连通图中 k-度点数量的下界。

Theorem 2. [1]设 G 是一个极小 k-连通图，则 G 中至少有 $\frac{(k-1)n+2k}{2k-1}$ 个 k 度点，这里的 n 是图 G 的顶点个数。

K.Ota [2]等人对极小 3-连通图的可收缩边分别进行了研究，N.Dean [3]等人对极小 3-连通图最长圈上的可收缩边的数目进行了估计，得到了如下结论：

Theorem 3. [2]设 G 是一个极小 3-连通图且 $|G|\geq 5$，则 G 中至少有 $\frac{|V(G)|+3t}{2}$ 条可收缩边，这里的 t 是度大于等于 3 的顶点个数。

Theorem 4. [3]设 G 是一个极小 3-连通图且 $|G|\geq 7$，C 是 G 的最长圈，则 C 上的可收缩边的数目不小于 $\frac{1}{3}|E(C)|$。

关于极小 3-连通图的构造，也已经有了很多的研究。为方便叙述，我们先介绍如下运算：

运算 A：设点 x 和边 ab 在 3-连通图 G 中不关联，在 ab 中插入一个点 y 并连接 xy；

运算 B：设边 ab 和边 cd 是 3-连通图 G 的两条边，在 ab 和 cd 中分别插入点 x 和 y 并连接 xy；

运算 C：设点 x，y，z 是 3-连通图 G 的三个点，在 G 加入一个新的顶点 w 并使其和 x，y，z 都连边。

定义 1.设 G 是连通图，路 P 称为弦路，如 P 与某一个圈 C 的公共部分仅为 P 中某一条边的两个端点。

定义 2.设 G 是连通图，S 是 $V(G)\cup E(G)$ 的子集，若 S 满足如下条件之一则称 S 是 3-compatible：

1) $S=\{x,ab\}$，其中 x 是点，ab 是边，$x\notin\{a,b\}$ 且 x-a 路和 x-b 路都不是 G-ab 中的弦路。

2) $S=\{ab,cd\}$，其中 ab 和 cd 是不同边，且 a-c 路，a-d 路，b-c 路，b-d 路都不是 G-ab-cd 中的弦路。

3) $S=\{x,y,z\}$，其中 x，y，z 是不同的顶点且 x-y 路，y-z 路，z-x 路都不是 G 中的弦路。

Robin W.Dawes [4]对极小 3-连通图的构造进行了研究，证明了如下定理：

Theorem 5. [4]设 H 是极小 3-连通图，G 是对 H 上的集合 S 进行运算 A 或运算 B 或运算 C 得到的图，则 G 是极小 3-连通图当且仅当 S 是 *3-compatible*。

定理 1 给出了极小 3-连通图的构造方式，但是这里必须要验证 S 是 3-*compatible*，这在实际应用中是不容易做到的。K.Ota 等人对曲面上的极小 3-连通图进行了研究，给出了这类图的边数的上界。

Theorem 6. [2]设 G 是阶为 n 的极小 3-连通图，G 可嵌入欧拉示性数为 χ 的闭曲面上，则有

$$|E(G)|\leq\begin{cases}2n-2 & \chi=2\\ 2n-\chi & \chi\leq 1\end{cases}$$

定理 2 证明的思路是用归纳法，即讨论一个极小 3-连通平面图如何通过运算得到更小的极小 3-连通图，并且每次这样的运算所减少的边的数目是可以确定的。另一方面，有学者对含有某一个图作为子式的 3-连通图的结构进行了研究。

Theorem 7. [5]设 G 和 H 是简单 3-连通图，H 是 G 的子式且 $G\neq W_n$，$H\neq W_3$，则 G 存在一条边使得 $G'=G\setminus e$ 或者 $G'=G/e$ 是简单 3-连通图且 H 是 G' 的子式。

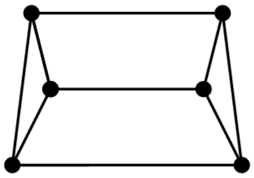

Figure 2. *Prism*
图 2. *Prism*

Theorem 8. [6]设 G 和 H 是简单 3-连通图，H 是 G 的子式且 G 不存在 H-可去边，则存在图 G' 使得 H 是 G' 子式且 G' 没有 H-可去边，其中 G' 满足如下条件之一：

1. $G' = G/e$；(运算一)
2. $G' = G \setminus f/e$，其中 e，f 与 G 的同一个 3-度点相关联；(运算二)
3. $G' = G - w$。(运算三)

Theorem 9. [6]设 G 是平面图，则如下结论成立：

1. $|E(G)| \le 3|V(G)| - 6$，等式成立当且仅当其嵌入平面时每一个面都是三边形。
2. 若 G 不含三边形，则 $|E(G)| \le 2|V(G)| - 4$，等式成立当且仅当其嵌入平面时每一个面都是四边形。

Theorem 10. [7]设 G 是简单 3-连通图，则 G 存在 *Prism* 作为子式当且仅当 $G \notin \{K_5 - e, K_5, K_{n-3,3}, W_n, K'_{n-3,3}, K''_{n-3,3}\}$。

关于极小 3-连通平面图的构造，S. R. Kingan 提出了如下问题：

问题 1. [6]设 G 是极小 3-连通平面图，且 $G \ne W_n$，则 G 是否可以通过一系列运算一和运算二得到 *prism*？

为了叙述方便，我们记满足条件 $G[V_3(G)] \cong \overline{K}_t$，$G[V_4(G)] \cong \overline{K}_t$ 的极小平面 3-连通图所组成的图类为 $\mathcal{G}$。令 $C = x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_nx_1$ 是长为 $2n$ 的圈，增加点 x_{ii}，使得 x_{ii} 与 x_i 的邻点都相邻，$i \in \{1,2,\cdots,n\}$。在此基础上增加点 a 和 b，使得 a 和 x_{ii} 相邻，b 和 x_i 相邻，$i \in \{1,2,\ldots,n\}$，我们把最终所得到的图记为 G_n。容易验证 $G \in \mathcal{G}$。令 $C_x = x_1x_2x_3\cdots x_nx_1$，$C_y = y_1y_2y_3\cdots y_ny_1$，$C_z = z_1z_2z_3\cdots z_nz_1$ 都是长为 n 的圈，其中 n 为偶数。将 z_i 与 x_i，y_i 相连，$i \in \{1,2,\cdots,n\}$。将所得到的图记为 H。对 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，用 z_{i1} 和 z_{i2} 替代 z_i 使得 z_{i1} 与 z_{i-1}，x_i，y_i 相连，z_{i2} 与 z_{i+1}，x_i，y_i 相连。我们把最终所得到的图记为 H_n。容易验证 $H_n \in \mathcal{G}$。

我们注意到 G_n 和 H_n 中的每一条边收缩后至少还要去掉两条边才能得到极小 3-连通图。因此，G_n 和 H_n 不能通过运算一和运算二得到更小的极小 3-连通平面图。进一步，由 G_n 和 H_n 可知图类 $\mathcal{G}$ 中存在无限多个图，这些图不能通过运算一和运算二得到更小的极小 3-连通平面图。

本文我们对问题 1 进行了研究，证明了如下结论：

Theorem 11. 设 G 是极小 3-连通平面图且不是轮图，若 G 不能通过一系列运算一和运算二得到更小的极小平面 3-连通图，则 $G \in \mathcal{G}$。

2. 主要定理的证明

为证明主要定理，我们需要如下引理。

Lemma 12. [8]设 G 是一个 k-连通图，T_i 是一个 k-点割，$i = 1,2$。令 A 是一个 T_1-断片，B 是一个 T_2-断片。若 $B \cap A \ne \varnothing$，则 $|T_2 \cap A| \ge |\overline{B} \cap T_1|$。

Lemma 13. [8]设 G 是一个 k-连通图，$\mathcal{T}$ 是 G 满足特定性质的 k-点割的集合。假设 $T_i \in \mathcal{T}$，F_i 是一个 T_i-断片，$i = 1,2$。若 F_1 是一个 $\mathcal{T}$-端片使得 $F_1 \subseteq F_2$ 但 $F_1 \ne F_2$ 且 $F_1 \cap F_2 \ne \varnothing$，则 $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing$，$F_1 \cap F_2$ 不是断片，$|T_2 \cap F_1| > |\overline{B} \cap T_1|$ 且 $|(T_2 \cap F_1) \cup (T_2 \cap T_1) \cup (F_2 \cap T)_1| > k$。

Lemma 14. [9]设 G 是 3-连通图，则 G 中的 3 度点至少关联一条 3-可收缩边。

Lemma 15. [9]设 G 是极小 3-连通图，e 是两端点度数都至少为 4 的边，则 e 是 G 的可收缩边。

Lemma 16. [6]设 G 是极小 3-连通图，$e = xy$ 是 G 的可收缩边，则如下结论成立：

1)若 $d(x) \ge 4$，$d(y) \ge 4$，则 G/e 是极小 3-连通图。

2)若 $d(x) = d(y) = 3$，则存在边集 $F \subseteq E(G/e)$ 且 $|F| \le 1$ 使得 $G/e - F$ 是极小 3-连通图。

Lemma 17. [10]设 G 是极小 3-连通图，x 是 G 的 3 度点。若 x 与两条不可收缩边关联，则 G 中有三

边形包含 x。

由定理 10 可知如下引理成立：

Lemma 18. 设 G 是简单 3-连通平面图，则 G 有 *Prism* 子式当且仅当 $G\notin\{W_n,K_5-e\}$。

由引理 18 和定理 8 可得如下引理：

Lemma 19. 设 G 是极小 3-连通平面图且 $G\notin\{W_n,K_5-e\}$，则存在极小 3-连通图使得 G' 有 *Prism* 子式且满足下列条件之一：

1) $G'=G/e$；

2) $G'=G\setminus f/e$，其中 e，f 与 G 的同一个 3 度点关联；

3) $G'=G-w$.

证明：由于 G 是极小 3-连通平面图，故 G 不存在 *Prism*-可去边。由定理 8 可知，存在 G' 使得 G' 存在 *Prism* 子式且满足定理条件。

Lemma 20. 设 G 是极小 3-连通平面图，xyz 是 G 的三边形，则 x，y，z 中至少有两个 3 度点。

证明：假设结论不成立。由 G 是极小 3-连通图可知 G 的每一个圈上至少有一个 3 度点。不妨设 $d(x)=3$。若 $d(y)\ge 4$，$d(z)\ge 4$，则由 G 为极小 3-连通图可知，$G-yz$ 中存在 2-点割 T 使得 $G-yz-T$ 的两个分支都至少 2 个点。记 $G-yz-T$ 的两个分支为 H_1 和 H_2。显然 $x\in T$。由对称性，设 $y\in H_1$，$z\in H_2$。由 $d(x)=3$ 可知 $|N(x)\cap H_1|=1$ 或 $|N(x)\cap H_2|=1$。不妨设 $|N(x)\cap H_1|=1$。于是 $T\cup\{y\}-x$ 是 G 的 2-点割，矛盾。故 y 或 z 必有一个点是 3 度点。引理整毕。

Lemma 21. 设 G 是极小 3-连通平面图且 w 是 G 顶点且 $N(w)=\{x_1,x_2,x_3\}$，$d(x_i)\ge 4$，这里 $i\in\{1,2,3\}$，则如下结果成立：

1) $G[\{x_1,x_2,x_3\}]\cong\overline{K_3}$；

2) $|E(w)\cap E_C(G)|\ge 2$。

证明：1) 假设结论不成立。不妨设 $x_1x_2\in E(G)$，于是 xx_1x_2 是三边形。注意到 $d(x_1)\ge 4$，$d(x_2)\ge 4$，这与引理 20 矛盾，故 $x_1x_2\notin E(G)$，同理可知 $x_1x_3\notin E(G)$，$x_2x_3\notin E(G)$。故 $G[\{x_1,x_2,x_3\}]\cong\overline{K_3}$。

2) 假设 $|E(w)\cap E_C(G)|\le 1$，则 w 与 2 条不可收缩边关联，设 wx_1 和 wx_2 是与 w 关联的不可收缩边。设 T 为包含 wx_1 的最小点割，A 为 $G-T$ 的一个分支。由于 $d(w)=3$，可知 $|N(w)\cap A|=1$ 且 $|N(w)\cap\overline{A}|=1$。此时，不妨设 $x_2\in A$，$x_3\in\overline{A}$。由于 wx_2 是不可收缩边，故存在最小点割 $T_1\supseteq\{w,x_2\}$。设 B 是 $G-T_1$ 的一个分支。

若 $A\cap B\ne\varnothing$，则由 $|N(w)\cap A|=1$ 可知 $N(w)\cap B\cap A=\varnothing$。于是 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$。若 $A\cap\overline{B}\ne\varnothing$，则同理可知 $\overline{A}\cap B\ne\varnothing$。于是 $\overline{A}=\overline{A}\cap T_1$。此时可知 $|\overline{A}|=1$，即 $d(x_3)=3$，矛盾。于是 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，进而 $\overline{B}=\overline{B}\cap T$。此时，我们易见 $x_1\in\overline{B}\cap T$。由 $d(x_1)\ge 4$ 可知，$|\overline{B}\cap T|\ge 2$。由于 $|A\cap T_1|>|\overline{B}\cap T|$，可知 $|A\cap T_1|\ge 3$，于是 $|T_1|\ge 4$，矛盾。所以 $A\cap B=\varnothing$。

同理，可以证明 $A\cap\overline{B}\ne\varnothing$。于是 $A=A\cap T_1$。由 $d(x_1)\ge 4$，可知 $|A\cap T_1|\ge 2$。故 $\overline{A}\cap T_1=\varnothing$。

不妨设 $A\cap\overline{B}\ne\varnothing$。于是 $|B\cap T|\ge 2$，故 $\overline{B}\cap T=\varnothing$。故 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$。故 $\overline{B}=\varnothing$，矛盾。引理证毕。

Lemma 22. 设 G 是极小 3-连通平面图，若 G 中存在三边形，则 G 可以通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。

证明：设 xyz 是 G 的三边形，由引理 20，不妨设 $d(x)=d(y)=3$。设 $N(x)=\{y,z,x^*\}$，$N(y)=\{x,z,y^*\}$，易见 xx^* 和 yy^* 都是 3-可收缩边。

若 $d(z)=3$，设 $N(z)=\{y,x,z^*\}$。易见 xx^* 不在三边形内(否则，若 xx^* 在三边形内，则不妨设 $x^*=y^*$，于是 $\{z^*,x^*\}$ 是 G 的 2 点割，矛盾)。于是，G/xx^* 是简单 3-连通图。若 G/xx^* 不是极小 3-连通图，则存在边集 F 使得 G/xx^*-F 是极小 3-连通图。将 xx^* 收缩后得到的点记为 $\overline{xx^*}$，则必有 F 中的边都与 $\overline{xx^*}$ 关联。进一步，由于 $d(y)=d(z)=3$，我们有 F 中的边都与 x^* 关联。若 $d(x^*)\geq 4$，F 中存在边 e 使得 $G-e$ 是 3-连通，矛盾。所以 $d(x^*)=3$，于是 $d_{G/xx^*}(\overline{xx^*})=4$，故 $|F|\leq 1$。即 G 可以通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。

若 $d(z)\geq 4$，此时，类似于上面的证明我们可知 $x^*\neq y^*$。若 xx^* 在三边形内，必有 x^* 与 z^* 相邻。由引理 20 可知 $d(x^*)=3$，于是 G/xx^*-zx^* 是极小 3-连通图。即 G 可以通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。故不妨设若 xx^* 不在三边形内。这里我们分 $d(x^*)=3$ 和 $d(x^*)\geq 4$ 两种情形讨论。若 $d(x^*)=3$，则 $d_{G/xx^*}(\overline{xx^*})=4$，又由于 F 中的边都与 $\overline{xx^*}$ 关联。故 $|F|\leq 1$，即 G 可以通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。若 $d(x^*)\geq 4$，由于 F 中的边都与 $\overline{xx^*}$ 关联，若 $|F|\geq 2$，则 F 中必有一条边，设为 e，是与 x^* 关联的，于是 $G-e$ 是 3-连通图，矛盾。故 $|F|\leq 1$ 并且 F 中的边一定是与 x 关联的，即 G 可以通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。

下面完场定理 11 的证明。

设 G 是极小 3-连通图且 G 不能通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图。由引理 22 可知 G 中不存在三边形。为证明定理 11，只需证明如下断言成立。

断言 若 $xy\in E(G)$，则 $d(x)=3$，$d(y)\geq 4$。

证明：若 $d(x)=d(y)=3$，设 $N(x)=\{x_1,x_2,y\}$。注意到 G 中不存在三边形，由引理 17，x 关联至少 2 条可收缩边。不妨设 xx_1 是可收缩边，则由 G 不含三边形可知，G/xx_1 是简单 3-连通图。由于 G 不能通过运算一或运算二得到更小的极小平面 3-连通图，可知 G/xx_1 不是极小 3-连通图。于是存在边集 F 使得 $G/xx_1\setminus F$ 是极小 3-连通图。

首先证明 F 中的边都与 $\overline{xx_1}$ 关联。否则，设 $e\in F$ 且 e 不与 $\overline{xx_1}$ 关联，则 e 是 G 的边且 e 不与 $\{x,x_1\}$ 中的点关联。显然，G/xx_1-e 是 3-连通图且 $G/xx_1-e\cong(G-e)/xx_1$。下面证明 $G-e$ 是 3-连通图。否则，设 $G-e$ 是 2-连通图，T 是 $G-e$ 的 2-点割，A 是 $G-e-T$ 的一个分支。若 $\{x,x_1\}\subseteq T$，则 $(G-e)/xx_1$ 不是 3-连通图，矛盾。若 $\{x,x_1\}\subseteq A$，则 $(G-e)/xx_1$ 不是 3-连通图，矛盾。因此，由对称性，$\{x,x_1\}\cap A\neq\varnothing$，$\{x,x_1\}\cap T\neq\varnothing$。由于 e 不与 $\{x,x_1\}$ 中的点关联，$|A|\geq 2$。于是，$(G-e)/xx_1$ 不是 3-连通图，矛盾。故 $G-e$ 是 3-连通图，这与 G 是极小 3-连通图矛盾。故 F 中的边都与 $\overline{xx_1}$ 关联。

若 $d(x_1)=3$，则 $d_{G/xx_1}(\overline{xx_1})=4$，于是 $|F|=1$，即 G 可以通过运算二得到更小的极小平面 3-连通图，矛盾。故不妨设 $d(x_1)\geq 4$。若 $|F|=1$，则 G 可以通过运算一得到更小的极小平面 3-连通图，矛盾。于是，$|F|\geq 2$。由于 $d(y)=3$，则 F 中存在边 e 且 e 不与 x_2，y 关联。因此，e 是 G 的边，故 e 在 G 中不与 $\{x_2,y\}$ 中的点关联。类似于上面的证明可知 $G-e$ 是 3-连通图，矛盾。所以，我们有 $d(x)\geq 4$ 或 $d(y)\geq 4$。

若 $d(x)\geq 4$，$d(y)\geq 4$，则由引理 15 可知 e 是可收缩边。于是由引理 16 可知 G/e 是极小 3-连通图，矛盾。于是断言成立，引理证毕。

基于图类 $\mathcal{G}$ 的构造特征，我们提出如下问题。

问题 2. 设 $G\in\mathcal{G}$，则 G 是否不能通过一系列运算一和运算二得到阶更小的极小 3-连通平面图？

问题 3. 设 $G\in\mathcal{G}$ 且 G 通过一系列运算一和运算二得到阶更小的极小 3-连通平面图。x 是 G 的任意 3 度点，则 G-x 是否为极小 3-连通平面图？

如果问题 2 的答案是肯定的，则可以得到极小 3-连通图不能通过一系列运算一和运算二得到阶更小的极小 3-连通平面图的充分必要条件，这将会是非常有意义的结论。关于问题 3，我们有如下局部的结论。

Theorem 23. 设 $G\in\mathcal{G}$，则 G 存在至少 6 个 3 度点，使得 G 去掉其中的每一个点后得到的图都是极小 3-连通平面图。

证明：设 x 是 G 的 3 度点且 $G-x$ 不再是 3-连通图，则存在包含 x 的 3-点割 T。我们将 G 中包含 3 度点的 3-点割的集合记为 $\mathcal{T}$。

断言 1. 设 A 是 G 的 $\mathcal{T}$-断片，则 $|A|\geq 4$。

证明：设 $T=N(A)$，x 是包含在 T 中的 3 度点。令 $x_1\in N(x)\cap A$，于是 $d(x_1)\geq 4$。故 $|A|\geq 2$ 且 $G[A]$ 中存在边。若 $|A|=2$，则易见 G 中存在三边形，矛盾。故不妨设 $|A|=3$。若 A 中有 2 个 3 度点，则易见 $T-x$ 中的点都是度至少为 4 的点。于是，x_1 必然与 $T-x$ 中的一个点相邻，即 G 中存在相邻的度至少为 4 的两个点，矛盾。若 A 中含有 2 个度至少为 4 的点，则易见 $T-x$ 中的点都是 3 度点。于是，A 中的 3 度点必定与 T 中的一个点相邻，即 G 中存在两个相邻的 3 度点，矛盾。故断言 1 成立。

断言 2. 设 A 是 G 的 $\mathcal{T}$-端片，则对 A 中的任意 3 度点 u 都有 $G-u$ 是 3-连通图。

证明：设 A 是一个 $\mathcal{T}$-端片。设 $T=N(A)$，x 是包含在 T 中的 3 度点。令 $x_1\in N(x)\cap A$，于是 $d(x_1)\geq 4$。故 $|A|\geq 4$ 且 $G[A]$ 中存在边，由此可知 A 中存在 3 度点。设 y 是 A 中的 3 度点，取 T_1 为 G 中包含 y 的 3-点割，B 为一个 T_1-断片。若 $B\cap A\neq\varnothing$，则由 A 是 G 的 $\mathcal{T}$-端片及引理 13 可知 $B\cap A$ 不是 T-断片。于是，我们有 $\overline{B}\cap\overline{A}=\varnothing$ 且 $|A\cap T_1|>|\overline{B}\cap T|$，$|B\cap T|>|\overline{A}\cap T_1|$。此时，若 $\overline{B}\cap A\neq\varnothing$，则同理可知 $B\cap\overline{A}=\varnothing$，且 $|\overline{B}\cap T|>|\overline{A}\cap T_1|$。此时，$\overline{A}=\overline{A}\cap T_1$。由于 $\overline{A}$ 是 $\mathcal{T}$-断片，因此，$|\overline{A}|\geq 4$。于是，$|T_1|\geq 4$，矛盾。故不妨设 $\overline{B}\cap A=\varnothing$，于是 $\overline{B}=\overline{B}\cap T$。类似于上面的证明，我们可知 $|T|\geq|\overline{B}|\geq 4$。故 $B\cap A=\varnothing$，$\overline{B}\cap A=\varnothing$，于是 $A\subseteq T_1$，即 $|T|\geq 4$，矛盾。故断言 2 成立。

断言 3. 设 A 是 G 的 $\mathcal{T}$-端片，则 A 中包含至少 2 个 3 度点。

证明：设 $T=N(A)$，x 是包含在 T 中的 3 度点。令 $x_1\in N(x)\cap A$，于是 $d(x_1)\geq 4$。设 A 恰好包含一个 3 度点，设为 u。此时必有 $|A|=4$ 且 T 中的点都是 3 度点。另一方面，注意到 T 中的每一个点都在 A 中有 3 个邻点，即 T 中的每一个点都在 $\overline{A}$ 中没有邻点，矛盾。故 A 至少包含 2 个 3 度点。断言 3 成立。

断言 4. 设 A 是 G 的 $\mathcal{T}$-端片，则 A 中包含至少 3 个 3 度点。

证明：用反证法。设 A 中恰有 2 个 3 度点。设 $T=N(A)$，x 是包含在 T 中的 3 度点。我们先证明 $|A|\geq 5$。如若不然，设 $A=\{x_1,x_2,y_1,y_2\}$，其中 $d(x_1)=d(x_2)=3$，$d(y_1)\geq 4$，$d(y_2)\geq 4$。于是 T 中至少有 2 个 3 度点。设 $T=\{u_1,u_2,u_3\}$，其中 u_1，u_2 是 3 度点。由 $\mathcal{G}$ 的定义可知 u_3 是度至少为 4 的点。此时，$G[\{x_1,x_2,y_1,y_2\}]\cong K_{2,3}$。注意到 u_1 同时与 y_1 和 y_2 相邻。令 $H=G-\{x_1,x_2,y_1,y_2,u_3\}$，此时，$H$ 是连通图。显然，$G/H\cong K_{3,3}$。这与 G 是平面图矛盾。

于是 $|A|\geq 5$。若 $|A|\geq 6$，则由 A 中恰有两个 3 度点可知 A 至少有 4 个度至少为 4 的点。由此，可知 $A\cup T$ 中至少有 6 个 3 度点。另一方面，由于 A 中恰有两个 3 度点，$A\cup T$ 中至多有 5 个 3 度点，矛盾。故不妨设 $|A|=5$。

设 $A=\{x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\}$，其中 $d(x_1)=d(x_2)=3$，$d(y_1)\geq 4$，$d(y_2)\geq 4$，$d(y_3)\geq 4$。于是 T 中至少有 2 个 3 度点。设 $T=\{u_1,u_2,u_3\}$，其中 $d(u_1)=3$，$d(u_2)=3$。若 u_3 是度至少为 4 的点，此时，$G[\{x_1,x_2,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3\}]\cong K_{4,3}$，这与 G 是平面图矛盾。故不妨设 $d(u_3)=3$，于是 $G[\{x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\}]\cong K_{3,3}$。此时，$G[\{u_1,u_2,u_3,y_1,y_2,y_3\}]$ 是 2-正则图，$G[\{u_1,u_2,u_3,y_1,y_2,y_3\}]$ 存在完美

匹配。令 $H=G-\{x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\}$，则易见 H 是连通图。于是，$G/H\cong K_{3,3}$，这与 G 是平面图矛盾。故断言 4 成立。

下面我们完成定理 23 的证明。首先，由定义可知 G 中至少有 4 个 3 度点。若 G 中恰有 4 个 3 度点则 $G\cong K_{4,3}$，这与 G 是平面图矛盾。故不妨设 G 至少有 6 个 3 度点。若 G 的每一个 3 度点去掉后都还是 3 连通图，则结论成立。故不妨设 G 存在 3 度点 x 使得 $G-x$ 不再是 3-连通图。我们将 G 中包含 3 度点的 3-点割的集合记为 $\mathcal{T}$。由定义可知 G 存在两个 $\mathcal{T}$ -端片，由断言 2 和断言 4 可知定理 23 成立。

参考文献

[1] Mader, W. (1972) Ecken Vom Gradn in Minimalenn-Fach Zusammenhangenden Graphen. *Archiv der Mathematik*, **23**, 219-224. https://doi.org/10.1007/bf01304873

[2] Ota, K. and Saito, A. (1988) Non-Separating Induced Cycles in 3-Connected Graphs. *Scientia Series A*, **2**, 101-105.

[3] Dean, N., Hemminger, R.L. and Ota, K. (1989) Longest Cycles in 3-Connected Graphs Contain Three Contractible Edges. *Journal of Graph Theory*, **13**, 17-21. https://doi.org/10.1002/jgt.3190130105

[4] Dawes, R.W. (1986) Minimally 3-Connected Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **40**, 159-168. https://doi.org/10.1016/0095-8956(86)90074-2

[5] Coullard, C.R. and Oxley, J.G. (1992) Extensions of Tutte's Wheels-And-Whirls Theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **56**, 130-140. https://doi.org/10.1016/0095-8956(92)90012-m

[6] Kingan, S.R. (2023) Deletable Edges in 3-Connected Graphs and Their Applications. arXiv:1 802.02660.

[7] Dirac, G.A. (1963) Some Results Concerning the Structure of Graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*, **6**, 183-210. https://doi.org/10.4153/cmb-1963-019-5

[8] Mader, W. (1988) Generalizations of Critical Connectivity of Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, **38**, 267-283. https://doi.org/10.1016/s0167-5060(08)70793-3

[9] Halin, R. (1969) Zur Theorie Dern-Fach Zusammenhängenden Graphen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **33**, 133-164. https://doi.org/10.1007/bf02992931

[10] Qin, C., Geng, J., Yang, H. and Xie, X. (2025) Contractible Edges in Spanning Trees of 3-Connected Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **41**, Article No. 22. https://doi.org/10.1007/s00373-025-02890-0