Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 97-107
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155158

分数阶非线性薛定谔系统规范解的存在性

张　惠

云南师范大学数学学院，云南　昆明

收稿日期：2025年3月19日；录用日期：2025年4月30日；发布日期：2025年5月22日

摘　要

本文主要研究了一类分数阶非线性薛定谔系统在 $H^s\left(R^N\right)\times H^s\left(R^N\right)$ 中的规范解的存在性，且解满足

$$\int_{R^N}\left|u_1\right|^2\mathrm{d}x=a_1,\int_{R^N}\left|u_2\right|^2\mathrm{d}x=a_2.$$

其中规定 $s\in(0,1),a_1,a_2>0,\lambda_1,\lambda_2\in R$ 是以拉格朗日乘子出现的未知参数，$h_i:R^N\to[0,\infty)$ 为有界连续函数。考虑 $f_i=\left|u_i\right|^{p_i-2}u_i,i=1,2$ 且 $F\left(u_1,u_2\right)=\omega\left|u_1\right|^{r_1}\left|u_2\right|^{r_2}$，$\omega,r_1,r_2$ 是正的常数。

关键词

非线性薛定谔系统，变分方法，规范解

Existence of Normalized Solution for Fractional Nonlinear Schrödinger Systems

Hui Zhang

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Mar. 19th, 2025; accepted: Apr. 30th, 2025; published: May 22nd, 2025

Abstract

This article mainly studies a class of fractional nonlinear Schrödinger coupled systems with the existence of the normalized solution in $H^s\left(R^N\right)\times H^s\left(R^N\right)$, and the solution satisfies

$$\int_{R^N}\left|u_1\right|^2\mathrm{d}x=a_1,\int_{R^N}\left|u_2\right|^2\mathrm{d}x=a_2.$$

文章引用: 张惠. 分数阶非线性薛定谔系统规范解的存在性[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 97-107.
DOI: 10.12677/pm.2025.155158

Among them, it is specified that $s\in(0,1), a_1,a_2>0, \lambda_1,\lambda_2\in R$ is a Lagrange multiplier; $h_i: R^N\to[0,\infty)$ is a bounded continuous function. Consider $f_i=|u_i|^{p_i-2}u_i, i=1,2$ and $F(u_1,u_2)=\omega|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2}$, where ω, r_1, r_2 are positive constant.

Keywords

Nonlinear Schrödinger System, Variational Method, Normalized Solution

1. 引言

研究方程(1.1)

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u_1=\lambda_1 u_1+h_1(x)f_1(u_1)+\partial_1 F(u_1,u_2),\\ (-\Delta)^s u_2=\lambda_2 u_2+h_2(x)f_2(u_2)+\partial_2 F(u_1,u_2),\end{cases}\tag{1.1}$$

规范解的存在性主要来自非线性薛定谔方程的耦合系统

$$\begin{cases}i\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}=(-\Delta)^s\varphi_1-h_1(x)g_1\left(|\varphi_1|^2\right)\varphi_1-\partial_1 G\left(|\varphi_1|^2,|\varphi_2|^2\right)\varphi_1,\\ i\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}=(-\Delta)^s\varphi_2-h_2(x)g_2\left(|\varphi_2|^2\right)\varphi_2-\partial_2 G\left(|\varphi_1|^2,|\varphi_2|^2\right)\varphi_2,\end{cases}\tag{1.2}$$

其由于质量

$$\int_{R^N}|\varphi_1|^2\,\mathrm{d}x, \int_{R^N}|\varphi_2|^2\,\mathrm{d}x$$

沿着(1.2)的轨迹保持不变，因此可以认为它是规定了的。其驻波解是具有 $\varphi_i(x,t)=\mathrm{e}^{-i\lambda_i t}$ 。$u_i(x)$ 形式的解，它是对某 $\lambda_1,\lambda_2\in R$ 的，且这个假设使得有 $f_i=g_i(|u_i|)u_i$ ，以及 $F(u_1,u_2)=\dfrac{1}{2}G(|u_1|,|u_2|)$ 。

$(-\Delta)^s$ 表示为分数阶拉普拉斯函数，其定义为

$$(-\Delta)^s u_j=C(N,s)P.V.\int_{R^N}\frac{u_j(x)-u_j(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y, j=1,2,$$

这里的符号 $P.V.$ 是柯西主值， $C(N,s)$ 是一个合适的正的正则化常数。算子 $(-\Delta)^s$ 可以看作 Levy 稳定扩散过程的无限小发生元[1]。它起源于描述应用科学领域的各种现象，如分数阶量子力学、势垒问题、马尔科夫问题和相变现象。近几十年来，分数阶薛定谔方程问题的研究引起了广泛关注，参见参考文献[2]-[4]。对于 $\lambda_i\in R$ ，我们可以认为它是未知的，在这种研究路线中具有特殊的意义，因为它解释了质量守恒。而分数阶耦合系统的规范解揭示了非局部相互作用下的新型波动行为，其数学形式(如幂律衰减、参数依赖)和物理效应(如反常能量转移)为调控复杂动力学提供了新工具。

到目前为止，关于方程(1.1)中的频率 $\lambda_i\in R$ ，存在两种截然不同的研究路线：一种是将方程(1.1)中的频率 λ_i 视为一个给定的常数。另一种是将频率 λ_i 视为一个给定的未知参数，在这种情况下，规定质量 $\int_{R^N}u_i^2\mathrm{d}x=a_i$ 的值是很自然的，使得 λ_i 以拉格朗日乘子出现，这样把 L^2 -约束问题称为规范解问题。此时，

出现一个新的临界指数，L^2-临界指数(也称为质量临界指数)：$r=2+\frac{4s}{N}$，称$r<2+\frac{4s}{N}$为L^2-次临界，而称$r>2+\frac{4s}{N}$为L^2-超临界。

在局部情况下，当$s=1$时，分数阶拉普拉斯$(-\Delta)^s$约化为局部微分算子$(-\Delta)$。如果$V(x)\equiv 0$且$u_2=0$，Jeanjean [5]利用山路定理来处理规范解的存在性，对于这类问题的更多结果，请参考文献[5]-[7]。

对于其他关于非线性薛定谔系统的解，亦有许多。例如，Bartsch 和 Jeanjean [8]证明以下一类椭圆方程的耦合系统

$$\begin{cases}-\Delta u_1=\lambda_1 u_1+f_1(u_1)+\partial_1 F(u_1,u_2),\\ -\Delta u_2=\lambda_2 u_2+f_2(u_2)+\partial_2 F(u_1,u_2),\end{cases}\tag{1.3}$$

规范解的存在性。作者在论文中考虑了$f_i=\mu_i|u_i|^{p_i-1}u_i$，$F(u_1,u_2)=\beta|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2}$的情况，其中$\mu_i,\beta$是正的常数，$p_1,p_2,r_1+r_2\in(2,2^*)\setminus 2+\frac{4}{N}$。

关于$0<s<1$的情况，可用的结果很少。在论文[9] [10]中，作者证明了分数阶非线性薛定谔方程的一些存在性和渐进结果。而规范解的存在性意味着物理或数学模型所描述的现象在理论上有解，为进一步研究系统的行为提供了基础。例如，在量子力学中，若该系统用于描述粒子的状态，规范解的存在性表示存在特定的粒子状态分布满足所给定的分数阶薛定谔耦合关系。对于幂型组合非线性的特殊情况，即$f(t)=\mu|t|^{q-2}t+|t|^{p-2}t$，并且$h(x)=1$，以及$V(x)\equiv 0$，其中$2<q<p<2_s^*=\frac{2N}{N-2s}$，Zhang [11]证明了质量次临界和质量超临界下的规范解的存在性和不存在性结果。

基于以上讨论，h_i满足以下条件：

(H1) $h_i\in C^1(R^N,R),\max_{x\in R^N}h_i(x)=h_i^{\max}>\inf_{x\in R}h_i=h_i^0, i=1,2$；

(H2) $h_i^{-1}\{h_i^{\max}\}=\{\alpha_i^1,\alpha_i^2,\cdots,\alpha_i^l\}$，其中，$\alpha_i^t\cap\alpha_i^j=\alpha$，即$h_i(\alpha)$。

为了保持思想和结果的简单性，考虑$F(s,t)=\omega|s|^{r_1}|t|^{r_2}$，以及非线性项$f_i=|u_i|^{p_i-2}u_i$。由于$h_i$为有界连续函数，可假设存在$\mu_1,\mu_2>0$，使得

$$\mu_1<h_1,h_2<\mu_2,$$

即$\mu_1=\max\{h_1^0,h_2^0\},\mu_2=\min\{h_1(\alpha),h_2(\alpha)\}$。

因此寻找耦合系统

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u_1=\lambda_1 u_1+\mu_1|u_1|^{p_1-2}u_1+r_1\omega|u_1|^{r_1-2}|u_2|^{r_2}u_1,\\ (-\Delta)^s u_2=\lambda_2 u_2+\mu_2|u_2|^{p_2-2}u_2+r_2\omega|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2-2}u_2,\\ \int_{R^N}|u_1|^2\mathrm{d}x=a_1,\int_{R^N}|u_2|^2\mathrm{d}x=a_2,\end{cases}\tag{1.4}$$

正的径向解$(u_1,u_2)\in H_{rad}^s(R^N)\times H_{rad}^s(R^N)$，其中$\omega,r_1,r_2>0$，且$2\le r_1+r_2<2+\frac{4s}{N},p_i\in\left(2,2+\frac{4s}{N}\right)$。(1.4)的弱解$(u_1,u_2)$对应于能量泛函

$$J_\mu(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2+\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\frac{\mu_1}{p_1}|u_1|^{p_1}+\frac{\mu_2}{p_2}|u_2|^{p_2}\mathrm{d}x-\omega\int_{R^N}|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_1}\mathrm{d}x\tag{1.5}$$

限制在球体

$$S=\left\{(u_1,u_2)\in H^s_{rad}\left(R^N\right)\times H^s_{rad}\left(R^N\right)\mid \int_{R^N}|u_1|^2\,\mathrm{d}x=a_1,\int_{R^N}|u_2|^2\,\mathrm{d}x=a_2\right\} \tag{1.6}$$

上的一个临界点，其中 $S=S(a_1)\times S(a_2)$。

众所周知，$J_\mu(u_1,u_2)\in C^1\left(H^s\left(R^N\right)\times H^s\left(R^N\right),R\right)$ 且

$$\begin{aligned}J^1_\mu(u_1,u_2)(\varphi_1,\varphi_2)=&\int_{R^N}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi_1+(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi_2\mathrm{d}x\\&-\int_{R^N}\mu_1|u_1|^{p_1-2}u_1\varphi_1\mathrm{d}x\\&-\int_{R^N}\mu_2|u_2|^{p_2-2}u_2\varphi_2\mathrm{d}x\\&-\int_{R^N}r_1\omega|u_1|^{r_1-2}|u_2|^{r_2}u_1\varphi_1\\&+r_2\omega|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2-2}u_2\varphi_2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

本文的主要结果如下：

定理 1.1. 对 $a_1,a_2>0$ 使得系统(1.4)存在弱解 $((u_1,\lambda_1),(u_2,\lambda_2))$，满足 $\int_{R^N}|u_i|^2\,\mathrm{d}x=a_i$，$\lambda_i<0$，且 $J_\mu(u_1,u_2)<0,i=1,2$。

在整篇论文中，除非另有说明，将使用以下符号：

- $C_1,C_2,C_3,\cdots$ 表示为任意正常数，其值不相关；
- $|\cdot|_p$ 表示空间的 $L^p\left(R^N\right)$ 通常范数 $\left(\int_{R^N}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},p\in[1,+\infty)$。用 H 表示具有通常范数 $\|\cdot\|$ 的空间 $H^s_{rad}\left(R^N\right)$；
- $o_n(1)$ 表示实序列，其中当 $n\to+\infty,o_n(1)\to0$。

2. 主要结果的证明

引理 2.1. 以下成立：

(i) $J_\mu(u_1,u_2)$ 在 S 中有下界；

(ii) $J_\mu(u_1,u_2)$ 在 $H\times H$ 中的每个最小化序列有界。

证明. (i) 由于 $2\le r_1+r_2<2+\frac{4s}{N}$，存在 $q>1$ 有

$$\max\left\{\frac{2}{r_1},\frac{2+\frac{4s}{N}}{2+\frac{4s}{N}-r_2}\right\}\le q\le\min\left\{\frac{2+\frac{4s}{N}}{r_1},\frac{2}{(2-r_2)^+}\right\},$$

这表明 $2\le r_1q,r_2q'\le2+\frac{4s}{N}$，因而

$$\int_{R^N}|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2}\,\mathrm{d}x\le\int_{R^N}|u_1|^{r_1}_{r_1q}|u_2|^{r_2}_{r_2q^1}\,\mathrm{d}x<\infty.$$

根据分数阶 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式[12]，可知当 $2\le q\le2^*_s$，存在常数 $C=C(s,N,q)$，使得

$$\int_{R^N}|u|^\alpha\,\mathrm{d}x\le C(s,N,\alpha)\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(\alpha-2)}{4s}}\left(\int_{R^N}|u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{N(\alpha-2)}{4s}}, \tag{2.1}$$

因此

$$
\begin{aligned}
J_\mu(u_1,u_2) &= \frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2+\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\frac{\mu_1}{p_1}|u_1|^{p_1}+\frac{\mu_2}{p_2}|u_2|^{p_2}+\omega|u_1|^{r_2}|u_2|^{r_2}\,\mathrm{d}x\\
&\ge \frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2+\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x-C(N,a_1,p_1)\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p_1-2)}{4s}}\\
&\quad -C(N,a_1,p_2)\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p_2-2)}{4s}}\\
&\quad -C(N,q)\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(r_1q-2)}{4sq}}\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(r_2q^1-2)}{4sq^1}}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

由于 $p_i\in\left(2,2+\frac{4s}{N}\right),i=1,2$，显然 $0<\frac{N(p_i-2)}{4s}<1$，又 $2\le r_1+r_2<2+\frac{4s}{N}$，因此 $\frac{N(r_1q-2)}{4sq}+\frac{N(r_2q'-2)}{4sq'}<1$，这保证了 $J_\mu(u_1,u_2)$ 有下界且强制于 S 。

(ii) 由于 $(u_1,u_2)\in S$，从(2.2)可以直接得到结论。

根据引理 2.1 可知

$$m(a_1,a_2)=\inf_{u\in S}J_\mu(u_1,u_2)$$

存在。

设能量泛函 $I_\mu:H^s(R^N)\to R$ 定义为：

$$I_\mu(u)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_{R^N}|u|^p\mathrm{d}x.$$

类似地，可证明 $I_\mu(u)$ 在 $S(a)$ 中有下界，因此记 $m_p^\mu(a)=\inf_{u\in S}I_\mu(u)$ 。

引理 **2.2.** 对任意的 $\mu,a>0$，有 $m_p^\mu(a)=\inf_{u\in S(a)}I_\mu(u)<0$ 。

证明. 设 $u_0\in S(a),\tau\in R$，定义

$$(\tau*u_0)=\mathrm{e}^{\frac{N\tau}{2}}u_0(\mathrm{e}^\tau x),x\in R^N.$$

那么 $(\tau*u_0)\in S(a)$，因此

$$I_\mu(u)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tau*u_0\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_{R^N}|\tau*u|^p\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2s\tau}}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu\mathrm{e}^{(p-2)N\tau}}{p}\int_{R^N}|u_0|^p\mathrm{d}x.$$

由于 $p\in\left(2,2+\frac{4s}{N}\right)$，所以存在 $\tau<0$，使得

$$=\frac{\mathrm{e}^{2s\tau}}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu\mathrm{e}^{(p-2)N\tau}}{p}\int_{R^N}|u_0|^p\mathrm{d}x<0,$$

因此

$$m_p^\mu(a)=\inf_{u\in S(a)}I_\mu(u)<0. \tag{2.3}$$

□

引理 **2.3.** 如果 $\mu>0$，那么对任意的 $a>0$，存在 $s_0\in(0,1)$，对每一个 $s\in(s_0,1)$，方程

$$(-\Delta)^s u=\lambda u+\mu|u|^{p-2}u$$

存在解 $(\lambda_a,u_a)\in R^-\times H^s(R^N)$，且满足 $u_a>0,|u|_2^2=a,I_\mu(u_a)=m_p^\mu(u_a)$。

证明. 据[13]可知，存在 $s_0\in(0,1)$，对每一个 $s\in(s_0,1)$，方程

$$(-\Delta)^s u=\lambda u+\mu|u|^{p-2}u$$

存在唯一正的、径向的最小能量解 $\omega(x)$。

对任意的 $\lambda<0$，设 $u_\lambda(x)=\lambda^{\frac{1}{p-2}}\omega\left(\lambda^{\frac{1}{2s}}x\right)$，则

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s(u_\lambda(x))+\lambda u_\lambda(x)-\mu|u_\lambda(x)|^{p-2}u_\lambda(x)\\&=\lambda^{1+\frac{1}{p-2}}\left[(-\Delta)^s\omega\left((-\lambda)^{\frac{1}{2s}}x\right)-\mu\left|\omega\left((-\lambda)^{\frac{1}{2s}}x\right)\right|^{p-2}\omega\left((-\lambda)^{\frac{1}{2s}}x\right)\right]=0.\end{aligned}$$

由此可知，$u_\lambda(x)$ 是方程

$$(-\Delta)^s u=\lambda u+\mu|u|^{p-2}u$$

唯一正的、径向的最小能量解。

令 $|u_\lambda(x)|_2^2=a$，则 $\lambda^{\frac{4s-N(p-2)}{2s(p-2)}}|\omega|_2^2=a$，因此取 $\lambda_a=\left(\frac{a}{|\omega|_2^2}\right)^{\frac{2s(p-2)}{4s-N(p-2)}}$，推出 $u_{\lambda_a}(x)\in H^s(R^N)$ 是方程

$$(-\Delta)^s u=\lambda_a u+\mu|u|^{p-2}u$$

唯一正的、径向的最小能量解，且 $|u_{\lambda_a}(x)|_2^2=a$。即 $u_{\lambda_a}(x)$ 是能量泛函

$$I_\mu(u)=\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_{R^N}|u|^p\mathrm{d}x.$$

限制在 L^2-球 $S(a)$ 上的最小能量解，其中 λ_a 以拉格朗日乘子的形式出现。 □

引理 **2.4**。对任意的 $\mu_1,\mu_2,\mu,a_1,a_2,a>0$，有

(i) 映射 $a\to m_p^\mu(a)$ 是严格单调递减的；

(ii) $m(a_1,a_2)\le m_{p_1}^{\mu_1}(a_1)+m_{p_2}^{\mu_2}(a_2)<0$。

证明. 对 $\varepsilon>0$，存在 $u\in S(b_1)\cap C_o^\infty(R^N)$ 且 $v\in S(b_2-b_1)\cap C_o^\infty(R^N)$，使得 $I_\mu(u)\le m_\mu^{b_1}+\varepsilon,I_\mu(v)\le m_\mu^{b_2-b_1}+\varepsilon.$

由于 u 和 v 有紧支集，通过平行平移，可以取得 R 足够大满足

$$\tilde{v}(x)\le v(x-R),\mathrm{supp}(u)\cap\mathrm{supp}(v)=\varnothing.$$

则 $u+\tilde{v}\in S(b_2)$，因此

$$m_\mu^{b_2-b_1}\le I_\mu(u+\tilde{v})\le I_\mu(u)+I_\mu(\tilde{v})+\varepsilon\le m_\mu^{b_1}+m_\mu^{b_2}+3\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，对任意 $b_2>b_1>0$，可得 $m_\mu^{b_1}>m_\mu^{b_2}$。即映射 $a\to m_p^\mu(a)$ 是严格单调递减的。

(i) 证明完成。

(ii) 由于 $\omega>0$，显然有

$$m(a_1,a_2)\le m_{p_1}^{\mu_1}(a_1)+m_{p_2}^{\mu_2}(a_2)<0. \tag{2.4}$$

引理 **2.5.** 设 $\{(u_1^n,u_2^n)\}\in S$ 是关于 $m(a_1,a_2)$ 的最小化 (PS) 序列，则存在 $(u_1,u_2)\in E$，$(\lambda_1,\lambda_2)\in R\times R$，以及序列 $\{(\lambda_1^n,\lambda_2^n)\}\subset R\times R$，使得子列有：

(a) 在 $H\times H$ 以及 $L^2(R^N)\times L^2(R^N)$ 中，$(u_1^n,u_2^n)\overset{弱}{\rightarrow}(u_1,u_2)$；对任意 $q\in(2,2^*)$，在 $L^q(R^N)$ 中，$(u_1^n,u_2^n)\rightarrow(u_1,u_2)$。

(b) 在 $R\times R$ 中，$(\lambda_1^n,\lambda_2^n)\rightarrow(\lambda_1,\lambda_2)$。

(c) 在 E^* 中，$J_\mu^1(u_1^n,u_2^n)-\lambda_1^n(u_1^n,0)-\lambda_2^n(0,u_2^n)\rightarrow0$。

(d) (u_1,u_2) 是系统(1.4)的解，其中 (λ_1,λ_2) 由(b)给定。如果 $\lambda_1<0$，那么在 H 中，$u_1^n\rightarrow u_1$；类似地，如果 $\lambda_2<0$，那么在 H 中，$u_2^n\rightarrow u_2$。

证明. (a)可在[14]中找到。若 $\{(u_1^n,u_2^n)\}\in S$ 是关于 $m(a_1,a_2)$ 的最小化序列，即当 $n\rightarrow\infty$ 时

$$J_\mu(u_1^n,u_2^n)\rightarrow m(a_1,a_2).$$

由前面引理 2.1，$\{(u_1^n,u_2^n)\}\in S$ 是有界的，根据 Berestyski 和 Lions [14]，可知在 E^* 中

$$|J|_s^1(u_1^n,u_2^n)\rightarrow0,$$

等价于在 E^* 中有

$$J_\mu^1(u_1^n,u_2^n)-\frac{1}{|u_1|_2^2}\left\langle J_\mu^1(u_1^n,u_2^n),(u_1^n,0)\right\rangle(u_1^n,0)-\frac{1}{|u_2|_2^2}\left\langle J_\mu^1(u_1^n,u_2^n),(0,u_2^n)\right\rangle(0,u_2^n)\rightarrow0.$$

因此在 E^* 中有

$$J_\mu^1(u_1^n,u_2^n)-\lambda_1^n(u_1^n,0)-\lambda_2^n(0,u_2^n)\rightarrow0,$$

以及

$$\lambda_1^n=\frac{1}{|u_1^n|_2^2}\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1^n\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\mu_1|u_1^n|^{p_1}+\omega|u_1^n|^{r_2}|u_2^n|^{r_2}\,\mathrm{d}x\right), \tag{2.5}$$

$$\lambda_2^n=\frac{1}{|u_2^n|_2^2}\left(\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2^n\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\mu_2|u_2^n|^{p_2}+\omega|u_1^n|^{r_2}|u_2^n|^{r_2}\,\mathrm{d}x\right), \tag{2.6}$$

这证明了(c)。

对于(b)的证明，即要证明 $\{(\lambda_1^n,\lambda_2^n)\}\subset R\times R$ 是有界的，则通过引理 2.1 可知 $\{(u_1^n,u_2^n)\}\subset E$ 是有界的，即可证明(b)。因此 (u_1,u_2) 是系统(1.4)的解，其中 (λ_1,λ_2) 由(b)给定。由于

$$\int_{R^N}|u_1^n|^{p_1}\mathrm{d}x\rightarrow\int_{R^N}|u_1|^{p_1}\mathrm{d}x,\int_{R^N}|u_2^n|^{r_1}|u_2^n|^{r_2}\mathrm{d}x\rightarrow\int_{R^N}|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2}\mathrm{d}x,$$

以及

$$\left\langle J_\mu^1(u_1^n,u_2^n)-\lambda_1^n(u_1^n,0),(u_1^n,0)\right\rangle-\left\langle J_\mu^1(u_1^n,u_2^n)-\lambda_1(u_1,0),(u_1,0)\right\rangle=0$$

这一事实，可得

$$\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1^n\right|_2^2-\lambda_1^n\left|u_1^n\right|_2^2\to\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|_2^2-\lambda_1^n\left|u_1\right|_2^2, \tag{2.7}$$

从而在 H 中有 $u_i^n\overset{弱}{\to}u_i$，因此

$$\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|_2^2\le\liminf\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1^n\right|_2^2,\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|_2^2\le\liminf\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2^n\right|_2^2,$$

又因为 $\lambda_1^n\to\lambda_1$，从(2.7)得到

$$\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1^n\right|_2^2\to\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|_2^2,\left|u_1^n\right|_2^2\to\left|u_1\right|_2^2.$$

因此，在 E 中，$\left(u_1^n,u_2^n\right)\to\left(u_1,u_2\right)$，其中 $\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)^{\frac{1}{2}}$ 表示 E 的通常范数。根据 Brezis-Lieb 引理[15]有

$$\int_{R^N}\left|u_i^n\right|^{p_i}\mathrm{d}x\to\int_{R^N}\left|u_i^n-u_i\right|^{p_1}\mathrm{d}x+\int_{R^N}\left|u_i\right|^{p_i}\mathrm{d}x+o_n(1), \tag{2.8}$$

又由于

$$\int_{R^N}\left|u_i^n-u_i\right|^{p_1}\mathrm{d}x\le\left(\int_{R^N}\left|u_i^n-u_i\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_i}{2}-\frac{N(p_i-2)}{4s}}.$$

因此得到 $\int_{R^N}\left|u_i^n-u_i\right|^{p_i}\mathrm{d}x\to0$，从而由(2.8)有

$$\int_{R^N}\left|u_i^n\right|^{p_i}\mathrm{d}x\to\int_{R^N}\left|u_i\right|^{p_i}\mathrm{d}x.$$

结合 $m\left(a_1,a_2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}J_\mu\left(u_1^n,u_2^n\right)$ 有

$$\begin{aligned}
&m\left(a_1,a_2\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1^n\right|^2+\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2^n\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\frac{\mu_1}{p_1}\left|u_1^n\right|^{p_1}+\frac{\mu_2}{p_2}\left|u_2^n\right|^{p_2}+\omega\left|u_1^n\right|^{r_2}\left|u_2^n\right|^{r_2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{R^N}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_1\right|^2+\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_2\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}\frac{\mu_1}{p_1}\left|u_1\right|^{p_1}+\frac{\mu_2}{p_2}\left|u_2\right|^{p_2}+\omega\left|u_1\right|^{r_2}\left|u_2\right|^{r_2}\mathrm{d}x\\
&=J_\mu\left(u_1,u_2\right),
\end{aligned}$$

由于 $\left(u_1,u_2\right)\in S$，可得 $m\left(a_1,a_2\right)=J_\mu\left(u_1,u_2\right)$。

因此存在 $\left|y_n\right|\to\infty$，那么考虑 $\tilde{u}_i^n(x)=u_i\left(x+y_n\right)$，显然 $\left\{\left(\tilde{u}_1^n,\tilde{u}_2^n\right)\right\}\subset S$，它也是 $m\left(a_1,a_2\right)$ 的最小化序列。而且存在 $\tilde{u}_i\in H$，使得在 E 中，$\left(\tilde{u}_1^n,\tilde{u}_2^n\right)\overset{弱}{\to}\left(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\right)$；在 $R^N\times R^N$ 上，$\left(\tilde{u}_1^n,\tilde{u}_2^n\right)\to\left(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\right)$ 几乎处处成立，由前面证明，可知在 E 中，$\left(\tilde{u}_1^n,\tilde{u}_2^n\right)\to\left(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\right)$。

引理 **2.6.** (i) 设当 $N\ge3$ 时，$p\in\left(1,1+\frac{N}{N-2}\right)$；当 $N=1,2$ 时，$p\in(1,+\infty)$。如果 $u\in H^s\left(R^N\right)$ 是光滑函数且满足 $(-\Delta)^s u\ge0$，那么 $u\equiv0$。

(ii) 设 $p\in\left(1,1+\frac{N}{N-2}\right)$，那么 $(-\Delta)^s u\ge u^p$ 在 R^N 中没有正的古典解。

证明. 此定理的证明参考文献[16]。

引理 **2.7.** 设 $N\le 4$ 或 $N\ge 5$，$p_1\in\left(1,1+\frac{N}{N-2}\right)$。如果 $(u_1,u_2)\in E$ 是(1.4)式的解，且满足 $u_1>0,u_2\ge 0$，那么 $\lambda_1<0$。如果 $(u_1,u_2)\in E$ 是(1.4)式的解，且满足 $u_2>0,u_1\ge 0$，那么 $\lambda_2<0$。

证明. 首先证明第一中情形：当 $u_1>0$ 满足方程

$$(-\Delta)^s u_1=\lambda_1 u_1+\mu_1|u_1|^{p_1-2}u_1+r_1\omega|u_1|^{r_1-2}|u_2|^{r_2}u_1.$$

如果 $\lambda_1\ge 0$，那么上述方程的右边都是非负的，据引理 2.6 可知 $u_1\equiv 0$，这与假设 $u_1>0$ 矛盾。因此 $\lambda_1<0$ 成立。其中 $\lambda_1<0$ 表示在光滑函数 u_1 分量上，系统存在 $J_\mu(u_1,u_2)$ 约束，使得 u_1 在满足 $\int_{R^N}u_i^2\mathrm{d}x=a_i$ 条件下使 $J_\mu(u_1,u_2)$ 达到极小值。当 $r_1,\omega>0$ 且 $2\le r_1+r_2<2+\frac{4s}{N}$，$p_1\in\left(2,2+\frac{4s}{N}\right)$，$\lambda_1<0$ 保证了 u_1 不会无限制地增大，$\lambda_1 u_1$ 这一项对 u_1 的增长起到抑制作用，使得 u_1 在系统中处于一个合理的状态，从而得到规范解 u_1，由此可得 u_1 的正则性。相反，如果 $\lambda_1\ge 0$，会导致系统的解出现不稳定或者不符合物理实际等情况，此时无法得到规范解。

类似的，可以证明第二种情形成立。 □

定理 1.1 的证明。

证明. 根据引理 2.1，存在有界极小序列 $\left\{\left(\tilde{u}_1^n,\tilde{u}_2^n\right)\right\}\subset S$ 满足 $J_\mu\left(u_1^n,u_2^n\right)\to m(a_1,a_2)$，那么应用引理 2.5，存在 $(u_1,u_2)\in S$，使得 $J_\mu(u_1,u_2)=m(a_1,a_2)$。因此通过拉格朗日乘子定理，存在 $\lambda_i\in R$ 使得

$$\begin{cases}J_\mu^1\left(u_1^n,u_2^n\right)\left(u_1^n,0\right)=\lambda_1\Phi^1(u_1)u_1,\\ J_\mu^1\left(u_1^n,u_2^n\right)\left(0,u_2^n\right)=\lambda_1\Phi^1(u_2)u_2,\end{cases}\tag{2.9}$$

其中 $\Phi(u_i):H\to R$ 由

$$\Phi(u_i)=\frac{1}{2}\int_{R^N}|u_i|^2\mathrm{d}x$$

给定。因此根据(2.9)，可知

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u_1=\lambda_1 u_1+\mu_1|u_1|^{p_1-2}u_1+r_1\omega|u_1|^{r_1-2}|u_2|^{r_2}u_1,\\ (-\Delta)^s u_2=\lambda_2 u_2+\mu_2|u_2|^{p_2-2}u_2+r_2\omega|u_1|^{r_1}|u_2|^{r_2-2}u_2,\end{cases}\tag{2.10}$$

现在需要证明 $u_1,u_2>0$。从泛函 $J_\mu(u_1,u_2)$ 的定义，很容易检验 $J_\mu(|u_1|,|u_2|)=J_\mu(u_1,u_2)$。由于 $(u_1,u_2)\in S$，可以得到

$$m(a_1,a_2)=J_\mu(u_1,u_2)=J_\mu(|u_1|,|u_2|)\ge m(a_1,a_2).$$

这意味着 $J_\mu(|u_1|,|u_2|)=m(a_1,a_2)$，因此，可以用 $(|u_1|,|u_2|)$ 来代替 (u_1,u_2)。而且，如果用 $\left(u_1^*,u_2^*\right)$ 来表示 (u_1,u_2) 的径向对称[17]，那么

$$\iint_{R^{2N}}\frac{\left(u_i(x)-u_i(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\iint_{R^{2N}}\frac{\left(u_i^*(x)-u_i^*(y)\right)^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2.11}$$

$$\int_{R^N}|u_i|^{p_i}\mathrm{d}x=\int_{R^N}\left|u_i^*\right|^{p_i}\mathrm{d}x,\int_{R^N}|u_i|^2\mathrm{d}x=\int_{R^N}\left|u_i^*\right|^2\mathrm{d}x,$$

则 $\left(u_1^*,u_2^*\right)\in S$，且 $J_\mu\left(u_1^*,u_2^*\right)=m(a_1,a_2)$，因此可以用 $\left(u_1^*,u_2^*\right)$ 来替代 (u_1,u_2)。

现在，证明对所有 $x \in R^N$ ，有 $u_1, u_2 > 0$ ，假设(1) $u_1 = 0, u_2 = 0$ ；(2) $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ ；(3) $u_1 = 0, u_2 \neq 0$ 。

(1) 由于 $\left|u_i^n\right|^{p_i} \to 0, \int_{R^N}\left|u_i^n\right|^2 \mathrm{d}x \to 0$ ，且 $\int_{R^N}\left|u_1^n\right|^{r_1}\left|u_2^n\right|^{r_2}\mathrm{d}x \to 0$ ，那么 $\limsup J_\mu\left(u_1^n, u_2^n\right) \geq 0$ ，与 $m\left(a_1, a_2\right) < 0$ 矛盾。

(2) 那么

$$\limsup J_\mu\left(u_1^n, u_2^n\right) \geq \frac{1}{2}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_1\right|_2^2 - \frac{\mu_1}{p_1}\int_{R^N}\left|u_1\right|^{p_1}\mathrm{d}x \geq m_{\mu_1}\left(\bar{a}_1\right)$$

其中 $\bar{a}_1 := \left|u_1\right|_2^2 \leq a_1$ ，根据引理 2.4，知道 $m_\mu\left(\bar{a}_1\right) \geq m_\mu\left(a_1\right)$ ，由于 $m_\mu\left(a_2\right) < 0$ ，这与(2.4)矛盾，证明完成。

(3) 情况与(2)类似。

泛函 $J_\mu\left(u_1, u_2\right)$ 满足以上引理，因此方程(1.4)有解 $\left(\left(u_1, \lambda_1\right), \left(u_2, \lambda_2\right)\right)$ ，其中 u_1, u_2 为正的、径向的。定理 1.1 得证。 □

3. 结论

对应规范解的性质分析如下：设 $u_1^0, u_2^0 \in H^s\left(R^N\right)$ 为(2.10)的解，再设 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in H^s\left(R^N\right)$ 为方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u_1 + u_1 = u_1^0 + \lambda_1 u_1^0 + \mu_1\left|u_1^0\right|^{p_1-2} u_1^0 + r_1\omega\left|u_1^0\right|^{r_1-2}\left|u_2^0\right|^{r_2} u_1^0 := f_1(x), \\ (-\Delta)^s u_2 + u_2 = u_2^0 + \lambda_2 u_2^0 + \mu_2\left|u_2^0\right|^{p_2-2} u_2^0 + r_2\omega\left|u_1^0\right|^{r_1}\left|u_2^0\right|^{r_2-2} u_2^0 := f_2(x),\end{cases} \tag{3.1}$$

的解，由条件可得

$$\min\left\{\frac{2}{p_1-2}, \frac{2}{p_2-2}, \frac{2}{r_1+r_2-2}, 2\right\} > \frac{N}{2s}.$$

记

$$q_0 = \max\left\{\frac{2}{p_1-2}, \frac{2}{p_2-2}, \frac{2}{r_1+r_2-2}, 2\right\}.$$

令

$$\kappa(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{1+|\xi|^{2s}}\right), \xi \in R^N,$$

其中 F^{-1} 表示 Fourier 逆变换，则

$$\tilde{u}_1(x) = \left(\kappa * f_1\right)(x) = \int_{R^N}\kappa(x-\xi) f_1(\xi)\mathrm{d}\xi, \tilde{u}_2(x) = \left(\kappa * f_2\right)(x) = \int_{R^N}\kappa(x-\xi) f_2(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因此可得对任意 $q > q_0$ 都有 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L^q\left(R^N\right) \cap L^\infty\left(R^N\right)$ 。从而方程组(3.1)的解有意义。于是

$$\begin{cases}(-\Delta)^s\left(\tilde{u}_1 - u_1^0\right) + \left(\tilde{u}_1 - u_1^0\right) = 0, \\ (-\Delta)^s\left(\tilde{u}_2 - u_2^0\right) + \left(\tilde{u}_2 - u_2^0\right) = 0,\end{cases}$$

易知，$\tilde{u}_1 = u_1^0 > 0, \tilde{u}_2 = u_2^0 > 0$ 。类似于[18]中的定理(3.4)，存在常数 $\alpha \in (0,1)$ ，使得 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in C^{0,\alpha}\left(R^N\right)$ 且当 $|x| \to +\infty$ 时，$\tilde{u}_1(x) \to 0, \tilde{u}_2(x) \to 0$ 。由于 $u_1^0 > 0, u_2^0 > 0$ ，且能被 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ 控制，故 $u_1^0, u_2^0 \in L^\infty\left(R^N\right)$ 且当 $|x| \to +\infty$ 时，$u_1^0(x) \to 0, u_2^0(x) \to 0$ 。由此可以得到规范解 u_1^0, u_2^0 的衰减性。其反映了系统在空间无穷远处的行为，说明系统的影响在远离某个区域后会逐渐消失，例如在描述物理场的分布时，这表示场的强度在足够远

的地方趋于零，符合物理上的局域性原理。

对于该结果，例如在量子力学中的双粒子系统，分数阶薛定谔耦合系统的规范解可以用来描述两种粒子的量子态。其中，每个粒子的波函数由规范解中的一个分量表示，而耦合项则体现了粒子之间的相互作用。比如规范解可以给出粒子在空间中的概率分布，从而帮助确定量子阱中找到每个粒子的可能性。同时，通过分析规范解的能量本征值，可以了解系统的能量状态，这对于研究量子系统的激发态和光学性质等非常重要。

参考文献

[1] Applebaum, D. (2004) Levy Processes—From Probability to Finance and Quantum Groups, Notices. *American Mathematical Society*, **51**, 1336-1347.

[2] Servadei, R. and Valdinoci, E. (2014) The Brezis-Nirenberg Result for the Fractional Laplacian. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 67-102. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2014-05884-4

[3] Yang, Y., Zhang, J. and Shang, X. (2013) Positive Solutions of Nonhomogeneous Fractional Laplacian Problem with Critical Exponent. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **13**, 567-584. https://doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.567

[4] Yan, S., Yang, J. and Yu, X. (2015) Equations Involving Fractional Laplacian Operator: Compactness and Application. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 47-79. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.04.012

[5] Jeanjean, L. (1997) Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **28**, 1633-1659. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(96)00021-1

[6] Hirata, J. and Tanaka, K. (2019) Nonlinear Scalar Field Equations with L^2 Constraint: Mountain Pass and Symmetric Mountain Pass Approaches. *Advanced Nonlinear Studies*, **19**, 263-290. https://doi.org/10.1515/ans-2018-2039

[7] Molle, R., Riey, G. and Verzini, G. (2022) Normalized Solutions to Mass Supercritical Schrödinger Equations with Negative Potential. *Journal of Differential Equations*, **333**, 302-331. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.06.012

[8] Bartsch, T. and Jeanjean, L. (2017) Normalized Solutions for Nonlinear Schrödinger Systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **148**, 225-242. https://doi.org/10.1017/s0308210517000087

[9] Yang, T. (2020) Normalized Solutions for the Fractional Schrödinger Equation with a Focusing Nonlocal L^2-Critical or L^2-Supercritical Perturbation. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article 051505. https://doi.org/10.1063/1.5144695

[10] Zhang, X., Squassina, M. and Zhang, J. (2024) Multiplicity of Normalized Solutions for the Fractional Schrödinger Equation with Potentials. *Mathematics*, **12**, Article 772. https://doi.org/10.3390/math12050772

[11] Luo, H. and Zhang, Z. (2020) Normalized Solutions to the Fractional Schrödinger Equations with Combined Nonlinearities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, Article No. 143. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01814-5

[12] Frank, R.L., Lenzmann, E. and Silvestre, L. (2015) Uniqueness of Radial Solutions for the Fractional Laplacian. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **69**, 1671-1726. https://doi.org/10.1002/cpa.21591

[13] Fall, M.M. and Valdinoci, E. (2014) Uniqueness and Nondegeneracy of Positive Solutions of $(-\Delta)^s u+u=u^p$ in R^N When s Is Close to 1, *Communications in Mathematical Physics*, **69**, 383-404. https://doi.org/10.1007/s00220-014-1919-y

[14] Berestycki, H. and Lions, P.-L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations, II Existence of Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 347-375. https://doi.org/10.1007/bf00250556

[15] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhauser.

[16] Brändle, C., Colorado, E., de Pablo, A. and Sánchez, U. (2013) A Concave—Convex Elliptic Problem Involving the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **143**, 39-71. https://doi.org/10.1017/s0308210511000175

[17] Almgren, F.J. and Lieb, E.H. (1989) Symmetric Decreasing Rearrangement Is Sometimes Continuous. *Journal of the American Mathematical Society*, **2**, 683-773. https://doi.org/10.1090/s0894-0347-1989-1002633-4

[18] Felmer, P., Quaas, A. and Tan, J. (2012) Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **142**, 1237-1262. https://doi.org/10.1017/s0308210511000746