Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 280-286
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155177

加权Laplace在Bakry-Émery Ricci曲率条件下的Li-Yau梯度估计

——关于Li-Yau梯度估计的研究

唐　也，段　涵

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年3月21日；录用日期：2025年4月26日；发布日期：2025年5月31日

摘　要

本文研究了在Bakry-Émery Ricci曲率条件下加权Laplace算子的Li-Yau梯度估计的问题，利用Bochner公式与加权Laplace公式以及极大值定理等处理Li-Yau梯度问题的方法，获得了加权Laplace在Bakry-Émery Ricci曲率有下界的条件下，热方程的正解$u(x, t)$的最优Li-Yau梯度估计。

关键词

Li-Yau梯度估计，Bakry-Émery Ricci曲率，Bochner公式，极大值定理

Li-Yau Gradient Estimation of Weighted Laplace under Bakry-Émery Ricci Curvature

—Research on Li-Yau Gradient Estimation

Ye Tang, Han Duan

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 21st, 2025; accepted: Apr. 26th, 2025; published: May 31st, 2025

Abstract

In this paper, the problem of Li-Yau gradient estimation of weighted Laplace operator under Bakry-Émery Ricci curvature is studied. Bochner formula, weighted Laplace formula and the maximum theorem are used to deal with the Li-Yau gradient problem. The optimal Li-Yau gradient estimation for the positive solution $u(x, t)$ of the heat equation is obtained under the condition of lower bound for weighted Laplace Bakry-Émery Ricci curvature.

文章引用: 唐也, 段涵. 加权 Laplace 在 Bakry-Émery Ricci 曲率条件下的 Li-Yau 梯度估计[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 280-286. DOI: 10.12677/pm.2025.155177

Keywords

Li-Yau Gradient Estimation, Bakry-Émery Ricci Curvature, Bochner Formula, Maximum Theorem

1. 引言

P. Li 和 S.-T. Yau 在[1]中，设 (M_n, g) 是一个 n 维完备黎曼流形，且在 $B_p(2R)$ 上满足 $Ric \ge -K$，设 $u(x,t)$ 是热方程 $(\Delta - \partial_t)u = 0$ 在 $B_p(2R)\times[0,T]$ 上的正解，则 $\forall \alpha > 1$，在 $B_p(2R)\times[0,T]$ 上 $\exists c(n)$，使得

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha\frac{u_t}{u} \le \frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)} + \frac{c(n)\alpha^2}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \sqrt{K}R\right) \tag{1}$$

在(1)中，令 $R\to\infty$ 可以得到整体梯度估计

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha\frac{u_t}{u} \le \frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)} \tag{2}$$

进一步，在(2)中，若 $K = 0$，令 $\alpha \to 1$，可以得到最优 Li-Yau 梯度估计

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} \le \frac{n}{2t} \tag{3}$$

Li-Yau 梯度估计在微分几何和几何分析中有很多应用，例如，可以得到 Harnack 不等式，热核的上下界估计，Green 函数估计，特征值估计，Laplacian 比较定理等。

在 R_n 中，将热核 $H(x,y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{-d^2(x,y)}{4t}$ 带入(3)可以取得等号，因此(3)是最优的。然而对于 $K > 0$ 时不是最优的，到目前为止有许多关于 Li-Yau 梯度估计的改进。

在与(1)条件相同的假设下，Davies [2]将(2)改进为

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha\frac{u_t}{u} \le \frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)}, \forall \alpha > 1$$

Hamilton [3]在 $Ric \ge -K(K \ge 0)$ 的闭流形 (M_n, g) 上得到了

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \mathrm{e}^{2Kt}\frac{u_t}{u} \le \mathrm{e}^{4Kt}\frac{n}{2t}$$

BaKry-Qian [4]在 $Ric \ge -K(K \ge 0)$ 的完备流形 (M_n, g) 上得到了

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right)\frac{u_t}{u} \le \frac{n}{2t} + \frac{nK}{2}\left(1 + \frac{K}{3}t\right)$$

Li-Xu [5]将上述结果推广为以下非线性形式

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{\sinh(Kt)\cosh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)}\right)\frac{u_t}{u} \le \frac{nK}{2t}\left(1 + \coth(Kt)\right)$$

对比以上改进的梯度估计，都是把常数α改为形如$\alpha(t,K)$的函数替代，该函数严格大于 1，但当 t 趋于 0 时都收敛于 1。一个自然的问题：能否找到$K>0$的最优 Li-Yau 梯度估计，即当$K>0$时，α是否可以取 1? Qi S. Zhang [6]给出了一种方法，在闭流形上肯定回答了上述问题。

设(M_n,g)是一个 n 维闭黎曼流形，且满足$Ric\ge -K(K\ge 0)$，设$u(x,t)$是热方程$(\Delta-\partial_t)u=0$在$M\times[0,T]$上的正解，$diam_M$为M的直径，则存在$c_1=c_1(n)$和$c_2=c_2(n)$，使得在$M\times[0,T]$上有

$$t\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\right)\le\frac{n}{2}+\sqrt{2nK(1+Kt)(1+t)dian_M}+\sqrt{K(1+Kt)(c_1+c_2K)t}$$

当$K=0$时，得到(3)，并且 Zhang 指出在非紧流形上，$\alpha=1$一般是不成立的。

Qi S. Zhang [6]主要证明方法为利用 Hamilton 梯度估计，热核高斯上下界估计，体积比较定理，Harnack 不等式进行积分迭代。最近，X. Y. Song [7]等人改进了 Zhang 的做法，利用了极大值原理直接得到了结果，避免了繁琐的迭代过程。最近 Wu [8]进一步改进了 Zhang 的结果得到了

$$t\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\right)\le\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{nKt}{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}(1+t)\,dian_M}+\sqrt{\frac{Kt}{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}(c_1+c_2K)t}$$

推广 Li-Yau 梯度估计的另一种方向是考虑 Ricci 曲率的推广，例如考虑 Bakry-Émery Ricci 曲率和 m-Bakry-Émery Ricci 曲率，Song X Y 在[9]中沿用了 Qi S.Zhang [6]的方法，在 Bakry-Émery Ricci 曲率和 m-Bakry-Émery Ricci 曲率有下界的情况下分别得到了加权热方程$(\Delta_f-\partial_t)u=0$的正解 u 的最优 Li-Yau 梯度估计。本文中我们将改用 X.Y.Song [7]中的极大值定理的方法去证明。

定理 1：设(M_n,g)是一个 n 维闭黎曼流形，且满足$Ric_f\ge -K(K\ge 0)$，$|\nabla f|\le L(L\ge 0)$。设$u(x,t)$是热方程$(\Delta_f-\partial_t)u=0$在$M\times[0,T]$上的正解，$diam_M$为M的直径，存在依赖于 n 的常数 c，使得

$$t\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\partial_t u}{u}\right)\le\frac{n}{2}+c\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt)(1+t)}\,diam_M+c\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt)\left(t+Kt+L^2t+A^2t+A^2Kt\right)}$$

其中$A=\sup_{x\in M}|f(x)|$。

定理 2：设(M_n,g)是一个 n 维闭黎曼流形，且满足$Ric_f^{m,n}\ge -K(K\ge 0)$，设$u(x,t)$是热方程$(\Delta_f-\partial_t)u=0$在$M\times[0,T]$上的正解，$diam_M$为$M$的直径，则存在依赖于 n 的常数c_3与$\tilde{c}$，使得

$$t\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\partial_t u}{u}\right)\le\frac{m}{2}+\sqrt{2mK(1+Kt)(c_3+t)}\,diam_M+\tilde{c}\sqrt{K(1+Kt)(t+Kt)}$$

其中$m-n=n\delta$。

2. 预备知识

m-Bakry-Émery Ricci 曲率：$Ric_f^{m,n}:=Ric+Hessf-\frac{1}{m-n}df\otimes df\ (m>n)$

Bakry-Émery Ricci 曲率：$Ric_f=Ric_f^{\infty,n}=Ric+Hessf$

f-Laplacian operator：$\Delta_f=\Delta-\langle\nabla f,\nabla\rangle$

加权 Bochner 公式：$\Delta_f|\nabla u|^2=2|Hessu|^2+2\langle\nabla u,\nabla\Delta_f u\rangle^2+2Ric_f(\nabla u,\nabla u)$

特别的，如果 $Ric_f \geq -K\left(K \geq 0\right)$，则 $Ric_f\left(\nabla u, \nabla u\right) \geq -K\left|\nabla u\right|^2$

柯西不等式：$\left|Hessf\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right)^2}{n} = \frac{\left(\Delta f\right)^2}{n}$

权方不等式：$\left(a \pm b\right)^2 \geq \frac{a^2}{1+\delta} - \frac{b^2}{\delta}$，$\delta > 0$。

3. 定理证明

3.1. 定理 1 证明

令 $Q = \frac{\left|\nabla u\right|^2}{u^2} - \frac{\partial_t u}{u} = \left|\nabla \ln u\right|^2 - \partial_t \ln u$

因此，$\Delta_f Q = \Delta_f \left|\nabla \ln u\right|^2 - \partial_t \Delta_f \ln u$。

利用 Bochner 公式，柯西不等式，以及 $\Delta_f \ln u = -Q \,\&\, \Delta \ln u = \Delta_f \ln u + \left\langle \nabla \ln u, \nabla f \right\rangle \,\&\, \left|\nabla f\right| \leq L$，得到：

$$\left(\Delta_f - \partial_t\right)Q + 2\left\langle \nabla \ln u, \nabla Q \right\rangle \geq \frac{2}{n}\left(Q^2 - 2QL\left|\nabla \ln u\right|\right) - 2K\left|\nabla \ln u\right|^2$$

另一方面：

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta_f - \partial_t\right)(tQ) + 2\left\langle \nabla \ln u, \nabla (tQ) \right\rangle \\
&= t\left[\left(\Delta f - \partial_t\right)Q + 2\left\langle \nabla \ln u, \nabla Q \right\rangle\right] - Q \\
&\geq \frac{2}{n}\left(tQ^2 - 2L\left|\nabla \ln u\right| tQ\right) - 2Kt\left|\nabla \ln u\right|^2 - Q \\
&= \frac{2}{n}tQ^2 - \frac{4}{n}L\left|\nabla \ln u\right| tQ - 2Kt\left|\nabla \ln u\right|^2 - Q
\end{aligned}$$

因此，$t\left[\left(\Delta_f - \partial_t\right)(tQ) + 2\left\langle \nabla \ln u, \nabla (tQ) \right\rangle\right] \geq \frac{2}{n}t^2Q^2 - \frac{4}{n}Lt\left|\nabla \ln u\right| tQ - 2Kt^2\left|\nabla \ln u\right|^2 - tQ$。

假设 tQ 在 $\left(x_0, t_0\right)$ 处取得极大值，由极大值定理知

$$\nabla(tQ)\big|_{(x_0,t_0)} = 0,\ \Delta(tQ)\big|_{(x_0,t_0)} \leq 0,\ \partial_t(tQ)\big|_{(x_0,t_0)} \geq 0,$$

因此，$t_0\left[\left(\Delta_f - \partial_t\right)\left(t_0 Q\left(x_0,t_0\right)\right) + 2\left\langle \nabla \ln u\left(x_0,t_0\right), \nabla\left(t_0 Q\left(x_0,t_0\right)\right)\right\rangle\right] \leq 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \geq t\left[\left(\Delta_f - \partial_t\right)\left(t_0 Q\left(x_0,t_0\right)\right) + 2 < \nabla \ln u\left(x_0,t_0\right), \nabla\left(t_0 Q\left(x_0,t_0\right)\right)\right] \\
&\geq \frac{2}{n}\left(t_0 Q\left(x_0,t_0\right)^2 - \left(\frac{4}{n}Lt_0\left|\nabla \ln u\left(x_0,t_0\right)\right| + 1\right)t_0 Q\left(x_0,t_0\right) - 2Kt_0^2\left|\nabla \ln u\right|^2\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

由一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq \left|\frac{b}{a}\right| + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}$ 知，在不等式(4)中，

$$\begin{aligned}
t_0 Q\left(x_0,t_0\right) &\leq \left|\frac{-\left(\frac{4}{n}Lt_0\left|\nabla \ln u\left(x_0,t_0\right)\right| + 1\right)}{\frac{2}{n}}\right| + \sqrt{\left|\frac{-2Kt_0{}^2\left|\nabla \ln u\right|^2}{\frac{2}{n}}\right|} = 2Lt_0\left|\nabla \ln u\left(x_0,t_0\right)\right| + \frac{n}{2} + \sqrt{nK}t_0\left|\nabla \ln u\left(x_0,t_0\right)\right| \\
&= \frac{n}{2} + \left(2L + \sqrt{nK}\right)t_0\left|\nabla \ln u\left(x_0,t_0\right)\right|
\end{aligned} \tag{5}$$

从 Qi S.Zhang [6]可以看出利用 Hamilton 梯度，热核估计，体积比较定理，Harnack 不等式(与 Qi S.Zhang，类似的方法)，具体可从 Song [9]定理 1.1 中证明过程可以看出

$$t^2\left|\nabla \ln u(x,t)\right|^2 \le c(n)(1+Kt)\left(t+Kt+L^2t+A^2t+A^2Kt+diam_M^2+diam_M^2t\right)$$

因此(5)变为

$$t_0Q(x_0,t_0)\le \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt_0)\left(t_0+Kt_0+L^2t_0+A^2t_0+A^2Kt_0+diam_M^2+diam_M^2t_0\right)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow TQ(x,T) &\le t_0Q(x_0,t_0)\\ &\le \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt_0)\left(t_0+Kt_0+L^2t_0+A^2t_0+A^2Kt_0+diam_M^2+diam_M^2t_0\right)}\\ &\le \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+KT)\left(T+KT+L^2T+A^2T+A^2KT+diam_M^2+diam_M^2T\right)}\end{aligned}$$

由 T 的任意性知：

$$\begin{aligned}tQ &= t\left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\partial_t u}{u}\right)\\ &\le \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt)\left(t+Kt+L^2t+A^2t+A^2Kt+diam_M^2+diam_M^2t\right)}\\ &= \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\sqrt{(1+Kt)\left(\left(t+Kt+L^2t+A^2t+A^2Kt\right)+(1+Kt)(1+t)\right)diam_M^2}\\ &\le \frac{n}{2}+c(n)\left(L+\sqrt{K}\right)\left(\sqrt{(1+Kt)\left(t+Kt+L^2t+A^2t+A^2Kt\right)}+\sqrt{(1+Kt)(1+t)}\,diam_M\right)\end{aligned}$$

证毕。

3.2. 定理二证明

令 $Q=\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\partial_t u}{u}=|\nabla \ln u|^2-\partial_t \ln u$

因此，

$$\begin{aligned}\Delta_f Q &= \Delta_f|\nabla \ln u|^2-\partial_t\Delta_f \ln u\\ &= 2|hess \ln u|^2+2\langle\nabla \ln u,\nabla\Delta_f \ln u\rangle+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)-\partial_t\Delta_f \ln u\\ &\ge \frac{2(\nabla \ln u)^2}{n}+2\langle\nabla \ln u,\nabla\Delta_f \ln u\rangle+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)-\partial_t\Delta_f \ln u\\ &= \frac{2\left(\nabla_f \ln u+\langle\nabla f,\nabla \ln u\rangle\right)^2}{n}+2\langle\nabla \ln u,\nabla\Delta_f \ln u\rangle+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)-\partial_t\Delta_f \ln u\\ &= \frac{2\left(-Q+\langle\nabla f,\nabla \ln u\rangle\right)^2}{n}-2\langle\nabla \ln u,\nabla Q\rangle+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)+\partial_t Q\\ &\ge \frac{2Q^2}{n(1+\delta)}+\frac{2\langle\nabla f,\nabla \ln u\rangle^2}{n\delta}-2\langle\nabla \ln u,\nabla Q\rangle+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)+\partial_t Q\\ &= \frac{2Q^2}{m}+\frac{2\langle\nabla f,\nabla \ln u\rangle^2}{m-n}+2Ric_f(\nabla \ln u,\nabla \ln u)-2\langle\nabla \ln u,\nabla Q\rangle+\partial_t Q\\ &= \frac{2Q^2}{m}+2Ric_f^{m.n}(\nabla \ln u,\nabla \ln u)-2\langle\nabla \ln u,\nabla Q\rangle+\partial_t Q\ge \frac{2Q^2}{m}-2K|\nabla \ln u|^2-2\langle\nabla \ln u,\nabla Q\rangle+\partial_t Q\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left(\Delta_f-\partial_t\right)Q+2\left\langle\nabla\ln u,\nabla Q\right\rangle\geq\frac{2Q^2}{m}-2K\left|\nabla\ln u\right|^2$$

同定理一中的(5)一样的方法得到：

$$t\left[\left(\Delta_f-\partial_t\right)(tQ)+2\left\langle\nabla\ln u,\nabla(tQ)\right\rangle\right]\geq\frac{2}{m}(tQ)^2-tQ-2t^2K\left|\nabla\ln u\right|^2$$

假设 tQ 在 (x_0,t_0) 处取得极大值，由极大值定理知：

$$\nabla(tQ)\big|_{(x_0,t_0)}=0,\ \Delta(tQ)\big|_{(x_0,t_0)}\leq0,\ \partial_t(tQ)\big|_{(x_0,t_0)}\geq0,$$

$$\begin{aligned}0&\geq t\left[\left(\Delta_f-\partial_t\right)\left(t_0Q(x_0,t_0)\right)+2\left\langle\nabla\ln u(x_0,t_0),\nabla\left(t_0Q(x_0,t_0)\right)\right\rangle\right]\\&\geq\frac{2}{m}\left(t_0Q(x_0,t_0)\right)^2-t_0Q(x_0,t_0)-2t_0^2K\left|\nabla\ln u(x_0,t_0)\right|^2\end{aligned}\tag{6}$$

由一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\leq\left|\frac{b}{a}\right|+\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}$ 知，(6)式的根

$$\begin{aligned}\Rightarrow t_0Q(x_0,t_0)&\leq\left|\frac{-1}{\frac{2}{m}}\right|+\sqrt{\left|\frac{-2t_0^2K\left|\nabla\ln u(x_0,t_0)\right|^2}{\frac{2}{m}}\right|}\\&=\frac{m}{2}+\sqrt{mK}t_0\left|\nabla\ln u(x_0,t_0)\right|\end{aligned}\tag{7}$$

利用 Hamilton 梯度，热核估计，体积比较定理，Harnack 不等式(与 Qi S.Zhang，类似的方法)可以看出，具体可从 Song [9]定理 1.3 中的证明过程可以看出

$$t^2\left|\nabla\ln u(x,t)\right|^2\leq2(1+Kt)\left(c_1(m)t+c_2(m)Kt+c_3diam_M^2+diam_M^2t\right)$$

因此不等式(7)变为

$$\begin{aligned}&t_0Q(x_0,t_0)\leq\frac{m}{2}+\sqrt{mK}\sqrt{2(1+Kt_0)\left(c_1(m)t_0+c_2(m)Kt_0+c_3diam_M^2+diam_M^2t_0\right)}\\&\Rightarrow TQ(x,T)\leq t_0Q(x_0,t_0)\\&\qquad\leq\frac{m}{2}+\sqrt{mK}\sqrt{2(1+Kt_0)\left(c_1(m)t_0+c_2(m)Kt_0+c_3diam_M^2+diam_M^2t_0\right)}\\&\qquad\leq\frac{m}{2}+\sqrt{mK}\sqrt{2(1+KT)\left(c_1(m)T+c_2(m)KT+c_3diam_M^2+diam_M^2T\right)}\end{aligned}$$

由 T 的任意性知，

$$\begin{aligned}tQ&\leq\frac{m}{2}+\sqrt{mK}\sqrt{2(1+Kt)\left(c_1(m)t+c_2(m)Kt+c_3diam_M^2+diam_M^2t\right)}\\&=\frac{m}{2}+\sqrt{2mK(1+Kt)\left(\left(c_1(m)t+c_2(m)Kt\right)+2mK(1+Kt)(c_3+t)\right)diam_M^2}\\&\leq\frac{m}{2}+\tilde{c}\sqrt{K(1+Kt)(t+Kt)}+\sqrt{2mK(1+Kt)(c_3+t)}\,diam_M\end{aligned}$$

证毕。

参考文献

[1] Li, P. and Yau, S.T. (1986) On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator. *Acta Mathematica*, **156**, 153-201.

https://doi.org/10.1007/bf02399203

[2] Davies, E.B. (1989) Heat Kernels and Spectral Theory. Cambridge Tracts in Math., Vol. 92, Cambridge University. Press.

[3] Hamilton, R.S. (1993) Matrix Harnack Estimate for the Heat Equation. *Communications in Analysis and Geometry*, **1**, 113-126. https://doi.org/10.4310/cag.1993.v1.n1.a6

[4] Bakry, D. and Qian, Z. (2005) Volume Comparison Theorems without Jacobi Fields. *Conference on Potential Theory*, Bucharest, 115-122.

[5] Li, J. and Xu, X. (2011) Differential Harnack Inequalities on Riemannian Manifolds I: Linear Heat Equation. *Advances in Mathematics*, **226**, 4456-4491. https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.12.009

[6] Qi, S. and Zhang, Q.S. (2021) A Sharp Li-Yau Gradient Bound on Compact Manifolds.

[7] Song, X., Wu, L. and Zhu, M. (2024) A Direct Approach to Sharp Li-Yau Estimates on Closed Manifolds with Negative Ricci Lower Bound. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **153**, 291-305. https://doi.org/10.1090/proc/16950

[8] Wu, J. (2024) An Improvement of the Sharp Li-Yau Bound on Closed Manifolds. *Archiv der Mathematik*, **123**, 309-318. https://doi.org/10.1007/s00013-024-02027-4

[9] Song, X.Y. and Wu, L. (2023) Li-Yau Gradient Estimates on Closed Manifolds under Bakry-Mery Ricci Curvature Conditions. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **60**, 19.