

基于双线性方法求两分量Coupled-Higgs方程的呼吸子解

吕梦琦

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年3月23日; 录用日期: 2025年4月25日; 发布日期: 2025年5月14日

摘 要

呼吸子解作为一种重要的局域波解, 在非线性波动力学中扮演重要的角色。本文利用Hirota双线性方法, 构造出Coupled-Higgs方程的双线性形式, 然后结合特殊的幂级数展开, 求出Coupled-Higgs方程的呼吸II型解, 为了进一步验证和展示理论结果, 利用Mathematica对呼吸波进行了可视化。

关键词

孤子解, 呼吸II型解, Hirota方法, Coupled-Higgs方程

Breather Solutions for the Two-Component Coupled-Higgs Equations Based on the Bilinear Method

Mengqi Lyu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 23rd, 2025; accepted: Apr. 25th, 2025; published: May 14th, 2025

Abstract

Breather solutions, as an important type of localized wave solution, play a significant role in non-linear wave dynamics. In this paper, the Hirota bilinear method is employed to construct the bilinear form of the Coupled-Higgs equation. Then, by combining a special power series expansion, the Breather Type II solutions of the Coupled-Higgs equation are derived. To further validate and illustrate the theoretical results, the breather waves are visualized using Mathematica.

Keywords

Soliton Solutions, Breather-II Solutions, Hirota Method, Coupled-Higgs Equation



1. 引言

非线性偏微分方程(PDE)及其解析解的研究在各种学术领域都具有极大的需求,它们提供了现实世界问题中物理方面的更深层次的知识。这些方程对于建模广泛的场景是必不可少的,如光纤表征、电磁学、流体动力学、信号处理、生物物理学、粒子物理学等。解析解和数值解对于理解非线性模型的结构和探索其行为是必要的。近年来,各种求解方法有很大进展,但如今寻找复杂的非线性偏微分方程的解仍然是一个重大的挑战。

非线性可积系统在许多科学领域中具有重要意义,精确解对于掌握复杂问题的物理学、验证数值方法和发展解析假设是至关重要的;因此,寻找这些非线性偏微分方程的精确解成为数学家们关注的主要问题。玻色-爱因斯坦凝聚态[1]、非局部介质[2]、超流体[3]、等离子体[4]和光学系统[5]中提出了不同的方法来构造非线性可积系统的显式解,如达布变换方法[6]、Hirota 双线性方法[7] [8]、逆散射方法[9]和 Riemann-Hilbert 方法[10]。Coupled Higgs 方程最早在文献[11]中提出

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - cu + r|u|^2 - 2uv = 0, \\ v_{tt} + v_{xx} - r(|u|^2)_{xx} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

函数 v 表示一个实标量介子场,而 u 表示一个复标量核子场。当 $c < 0$ 且 $r < 0$ 时,该系统为耦合的非线性 Klein-Gordon 方程;而当 $c > 0$ 且 $r > 0$ 时,该系统则转变为 Coupled-Higgs 方程。系统(1)描述了粒子物理学中中性标量介子与守恒标量核子相互作用。该方程可以从耦合的非线性薛定谔方程中简化得到。耦合系统(1)和经典的 Klein-Gordon 方程($c < 0, r < 0$)和 Higgs 方程($c > 0, r > 0$)有关[12]。

将方程(1)中第一个方程单独拿出来

$$u_{tt} - u_{xx} - cu + r|u|^2 - 2uv = 0 \quad (2)$$

方程(2)在场论、粒子物理和电磁波等多个领域有许多重要的作用,方程(2)和基本粒子物理学中经典 u^4 场论相关。并根据研究表示,耦合系统(1)有 n 孤子解,而方程(2)只有单孤子解,耦合的希格斯粒子等式(1)具有比系统(2)更丰富的可积特性。

在本文中,我们主要关注 $c > 0, r > 0$ 时,特殊的,取 $c=1, r=1$ 时的两分量 Coupled-Higgs 方程。

$$\begin{aligned} u_{1tt} - u_{1xx} - u_1 + (\delta_1 |u_1|^2 + \delta_2 |u_2|^2)u_1 - 2u_1v &= 0, \\ u_{2tt} - u_{2xx} - u_2 + (\delta_1 |u_1|^2 + \delta_2 |u_2|^2)u_2 - 2u_2v &= 0, \\ v_{tt} + v_{xx} - (\delta_1 |u_1|^2 + \delta_2 |u_2|^2)_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

很多文献中都已给出 Coupled-Higgs 方程用 Hirota 双线性展开法求单孤子解,双孤子解,利用 pfaffian 展开求多分量 Coupled-Higgs 方程的 n 孤子解等[13],在文献[14]中,对呼吸子解进行了分类,呼吸I型解可以通过求取极限得到怪波解,而呼吸II型解不能通过求极限得到怪波解,且在单分量系统中不存在呼吸II型解,它的解可以看成一个亮孤波和一个暗孤波组合形成的解。文献[15]给出了 $1+1$ 维 Coupled-Higgs 方程双线性方法求解的一般呼吸子解(呼吸I型解),并且给出了求极限状态下的怪波解。呼吸II型解描述的

是亮孤波和暗孤波在非线性介质中的周期性演化,这种相互作用在非线性光学、流体力学和等离子体物理中具有重要应用。目前对于呼吸II型解的研究相对较少,本文将研究方程(3)的呼吸II型解。

2. Hirota 双线性方法

Hirota 双线性方法又称“广田直接方法”,是日本数学家广田(R. Hirota)在 1971 年提出的。在本文中,我们主要使用 Hirota 双线性方法进行 Coupled-Higgs 方程的求解。Hirota 双线性方法及其性质如下。

双线性算子又称 D-算子[16] [17],形式如下:

$$D_t^m D_x^n f \cdot g = (\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n f(t, x) g(t', x') \Big|_{t'=t, x'=x}. \quad (4)$$

其中 $f(x, t)$ 和 $g(x, t)$ 都是关于 x 和 t 的函数, m, n 为非负整数。

$$\exp(\delta D_n) a_n b_n = \exp \left[\delta \left(\frac{\partial}{\partial_n} - \frac{\partial}{\partial_{n'}} \right) \right] a_n \cdot b_n \Big|_{n'=n} = a_{n+\delta} b_{n-\delta}. \quad (5)$$

双线性微分算子具有很多性质:

性质 1: 函数 $f(t, x)$ 与自身的奇数次双线性导数为零,即 $m+n$ 为奇数时有

$$D_t^m D_x^n f \cdot f = 0. \quad (6)$$

性质 2: 交换函数 $f(t, x)$ 与 $g(x, t)$ 的双线性导数的顺序,当导数是偶次时其值不变,当导数是奇次时要改变符号

$$D_t^m D_x^n f \cdot g = (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n g \cdot f. \quad (7)$$

上式中,由定义可得

$$\begin{aligned} D_t^m D_x^n f \cdot g &= (\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n f(t, x) g(t', x') \Big|_{t'=t, x'=x} \\ &= (-1)^{m+n} (\partial_{t'} - \partial_t)^m (\partial_{x'} - \partial_x)^n g(t', x') f(t, x) \Big|_{t=t', x=x'} \\ &= (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n g \cdot f. \end{aligned} \quad (8)$$

特别地,当 $m+n$ 为奇数且 $g(t, x) = f(t, x)$ 时,公式(6)化成(5)。

性质 3: 函数 $f(t, x)$ 与数 1 的双线性导数是通常的导数,即

$$D_t^m D_x^n f \cdot 1 = \partial_t^m \partial_x^n f. \quad (9)$$

性质 4: 两个线性指数函数的双线性导数等于指数相加的线性指数函数的适当倍数,如果设

$$\xi_j = \omega_j t + k_j x + \xi_j^{(0)} \quad (j=1, 2),$$

则有

$$\begin{aligned} D_t^m D_x^n e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} &= (\omega_1 - \omega_2)^m (k_1 - k_2)^n e^{\xi_1 + \xi_2}, \\ D_t^m D_x^n e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_1} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

3. 两分量 Coupled-Higgs 方程的呼吸子解

下面我们利用双线性方法求解方程(3),对方程(3)中的变量做如下变量变换:

$$u_1 = \rho_1 e^{i(k_1 x + \omega_1 t)} \frac{g}{f}, \quad u_2 = \rho_2 e^{i(k_2 x + \omega_2 t)} \frac{h}{f}, \quad v = 2[\ln f]_{xx} - \frac{c}{2}. \quad (11)$$

其中 $k_j, \omega_j, \rho_j (j=1,2)$ 是实数, g, h 为复函数, f 为实函数。将方程(11)代入方程(3), 可得方程(3)的双线性形式:

$$\begin{aligned} & (-2i\omega_1 D_t - 2ik_1 D_x + D_t^2 - D_x^2) g \cdot f = 0, \\ & (-2i\omega_2 D_t - 2ik_2 D_x + D_t^2 - D_x^2) h \cdot f = 0, \\ & (D_t^2 + D_x^2 + A) f \cdot f = \delta_1 \rho_1^2 g \cdot g^* + \delta_2 \rho_2^2 h \cdot h^*. \end{aligned} \quad (12)$$

这里 g^*, h^* 分别为 g, h 的复共轭, A 是积分常数。

为求解方程(12), 我们对函数 g, h, f 摄动展开成 ε 的幂级数形式如下:

$$\begin{aligned} g &= 1 + g^{(1)} \varepsilon + g^{(2)} \varepsilon^2, \\ h &= 1 + h^{(1)} \varepsilon + h^{(2)} \varepsilon^2, \\ f &= 1 + f^{(2)} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (13)$$

记

$$\begin{aligned} D_1 &= -2i\omega_1 D_t - 2ik_1 D_x + D_t^2 - D_x^2, \\ D_2 &= -2i\omega_2 D_t - 2ik_2 D_x + D_t^2 - D_x^2, \\ D_3 &= D_t^2 + D_x^2 + A. \end{aligned} \quad (14)$$

将式(13)代入方程(12), 比较 ε 的各次幂系数, 可得以下系数满足的方程组:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : D_1 1 \cdot 1 &= 0, D_2 1 \cdot 1 = 0, \\ D_3 1 \cdot 1 &= \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_2^2, \\ \varepsilon^1 : D_1 (g^{(1)} \cdot 1) &= 0, D_2 (h^{(1)} \cdot 1) = 0, \\ 0 &= \delta_1 \rho_1^2 (g^{(1)} + g^{(1)*}) + \delta_2 \rho_2^2 (h^{(1)} + h^{(1)*}), \\ \varepsilon^2 : D_1 (1 \cdot f^{(2)} + g^{(2)} \cdot 1) &= 0, D_2 (1 \cdot f^{(2)} + h^{(2)} \cdot 1) = 0, \\ D_3 (1 \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot 1) &= \delta_1 \rho_1^2 (g^{(2)} + g^{(2)*} + g^{(1)} g^{(1)*}) + \delta_2 \rho_2^2 (h^{(2)} + h^{(2)*} + h^{(1)} h^{(1)*}), \\ \varepsilon^3 : D_1 (g^{(1)} \cdot f^{(2)}) &= 0, D_2 (h^{(1)} \cdot f^{(2)}) = 0, \\ 0 &= \delta_1 \rho_1^2 (g^{(1)} g^{(2)*} + g^{(2)} g^{(1)*}) + \delta_2 \rho_2^2 (h^{(1)} h^{(2)*} + h^{(2)} h^{(1)*}), \\ \varepsilon^4 : D_1 (g^{(2)} \cdot f^{(2)}) &= 0, D_2 (h^{(2)} \cdot f^{(2)}) = 0, \\ D_3 (f^{(2)} \cdot f^{(2)}) &= \delta_1 \rho_1^2 g^{(2)} g^{(2)*} + \delta_2 \rho_2^2 h^{(2)} h^{(2)*}. \end{aligned} \quad (15)$$

对于方程(15)我们假设 $g^{(1)}, g^{(2)}, h^{(1)}, h^{(2)}, f^{(2)}$ 具有如下形式的解

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= a_1 e^{\eta}, g^{(2)} = G(1, 1^*) e^{\eta + \eta^*}, \\ h^{(1)} &= b_1 e^{\eta}, h^{(2)} = H(1, 1^*) e^{\eta + \eta^*}, f^{(2)} = F(1, 1^*) e^{\eta + \eta^*} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\eta_1 = Px + \Omega t$, 并且 $a_1, b_1, G(1, 1^*), H(1, 1^*)$ 是复常数, $F(1, 1^*)$ 是实常数。将方程(16)代入方程(15)可求得方程的呼吸子解为

$$\begin{aligned}
u_1 &= \rho_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} \frac{1 + a_1 e^{\eta_1} \varepsilon + M \cdot F(1, 1^*) e^{\eta_1 + \eta_1^*} \varepsilon^2}{1 + F(1, 1^*) e^{\eta_1 + \eta_1^*} \varepsilon^2}, \\
u_2 &= \rho_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \frac{1 + b_1 e^{\eta_1} \varepsilon + N \cdot F(1, 1^*) e^{\eta_1 + \eta_1^*} \varepsilon^2}{1 + F(1, 1^*) e^{\eta_1 + \eta_1^*} \varepsilon^2}, \\
N &= 2 \left[\ln \left(1 + F(1, 1^*) e^{\eta_1 + \eta_1^*} \varepsilon^2 \right) \right]_{xx} - \frac{c}{2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

其中各参数满足以下关系式

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{\delta_1 \rho_1^2}{\delta_2 \rho_2^2} a_1, \\
M &= \frac{2i\omega_1 (\Omega + \Omega^*) + 2ik_1 (P + P^*) + (\Omega + \Omega^*)^2 - (P + P^*)^2}{2i\omega_1 (\Omega + \Omega^*) + 2ik_1 (P + P^*) - (\Omega + \Omega^*)^2 + (P + P^*)^2}, \\
N &= \frac{2i\omega_2 (\Omega + \Omega^*) + 2ik_2 (P + P^*) + (\Omega + \Omega^*)^2 - (P + P^*)^2}{2i\omega_2 (\Omega + \Omega^*) + 2ik_2 (P + P^*) - (\Omega + \Omega^*)^2 + (P + P^*)^2}, \\
F(1, 1^*) &= \frac{\delta_1 \rho_1^2 |a_1|^2 + \delta_2 \rho_2^2 |b_1|^2}{2(P + P^*)^2 + 2(\Omega + \Omega^*)^2 + 2\gamma(\tau + \tau^*)^2 + A(2 - M - M^*)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

且 $M = N$ ，即 $(P + P^*)(k_1 - k_2) + (\omega_1 - \omega_2)(\Omega + \Omega^*) = 0$ 。并有以下关系式成立

$$\begin{aligned}
2i\omega_j \Omega + 2ik_j P - \Omega^2 + P^2 &= 0, \\
A + k_j^2 - \omega_j^2 &= 0, \quad A = \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_2^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

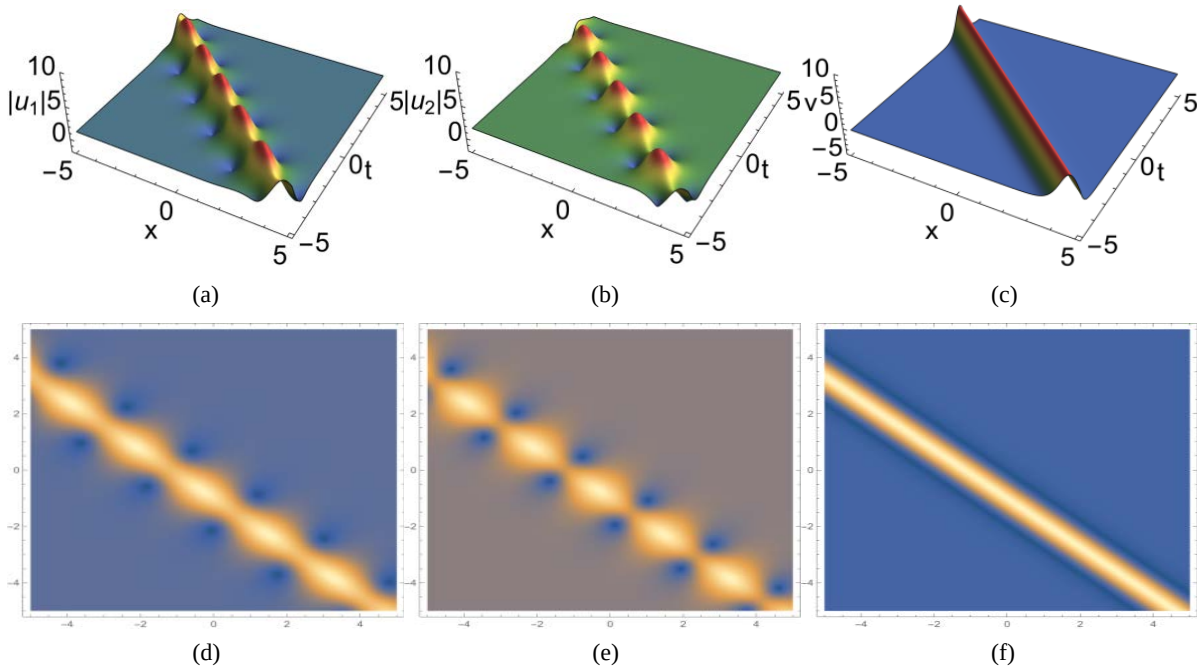


Figure 1. Parameters: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$, $a_1=1+I$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I-\sqrt{3}$, $\Omega=-2+\sqrt{3}I$

图 1. 参数: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$, $a_1=1+I$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I-\sqrt{3}$, $\Omega=-2+\sqrt{3}I$

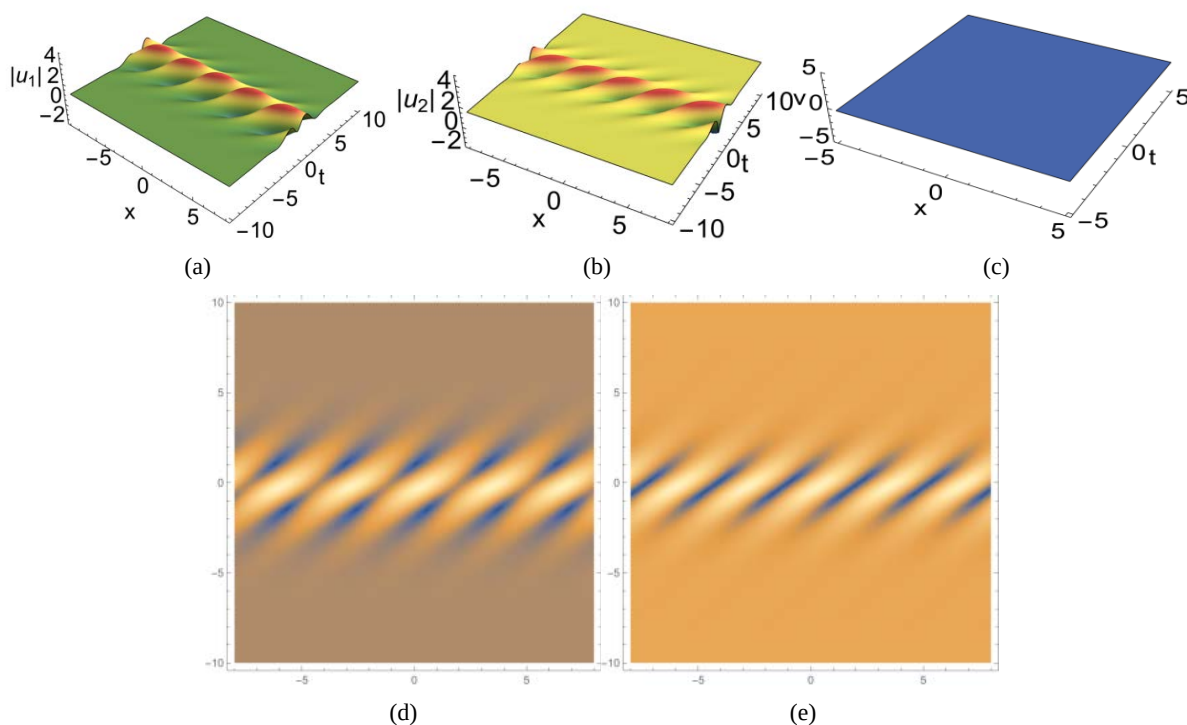


Figure 2. Parameters: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$, $a_1=3I$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I$, $\Omega=-1+\sqrt{3}I$

图 2. 参数: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$, $a_1=3I$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I$, $\Omega=-1+\sqrt{3}I$

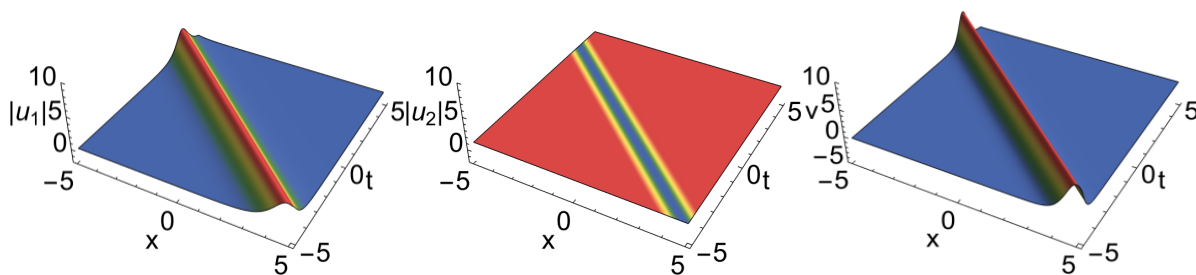


Figure 3. Parameters: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=0$, $\rho_2=1$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I-\sqrt{3}$, $\Omega=-2+\sqrt{3}I$

图 3. 参数: $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$, $\rho_1=0$, $\rho_2=1$, $k_1=k_2=2$, $P=-2I-\sqrt{3}$, $\Omega=-2+\sqrt{3}I$

当 $\varepsilon=1$ 时呼吸 II 型解(17)可写为如下双曲函数的形式

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} \left(\frac{M+1}{2} + \frac{M-1}{2} \tanh[\eta_{1R} + \tau] + \frac{a_1}{2} e^{i\eta_{1I} - \tau} \operatorname{sech}[\eta_{1R} + \tau] \right), \\ u_2 &= \rho_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \left(\frac{M+1}{2} + \frac{M-1}{2} \tanh[\eta_{1R} + \tau] + \frac{b_1}{2} e^{i\eta_{1I} - \tau} \operatorname{sech}[\eta_{1R} + \tau] \right), \\ v &= 2P_R^2 \operatorname{sech}^2[\eta_{1R} + \tau] - \frac{c}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $e^{2\tau} = F(1, 1^*)$ 。

短波分量 u_1, u_2 都是呼吸子解, 对于呼吸子解(17), 函数取模长后求取周期是较为复杂的, 我们可以研究取定某个参数后解的周期状况及振幅。由方程(20)可以看出这种解是由亮孤子和暗孤子组合形成的

解, 在其他的多分量非线性方程中也出现过该类型的解。与以往的呼吸 I 型解不同[13], 在文献[13]中这种类型的解被称为呼吸 II 型解, 从呼吸 II 型解导不出怪波解, 而且在单分量的系统中不会出现呼吸 II 型解。图 1(a)~(b), 我们可以看到 u_1, u_2 都是呼吸 II 型解, 图 1(c) 中 v 是一个亮孤子解, 图 1(d)~(f) 为对应参数下孤子解所对应的密度图。图 2(a)~(b), 我们可以看到 u_1, u_2 都是呼吸 II 型解, 图 2(c) 中长波 L 是一个亮孤子解, 图 2(d)~(f) 为孤子解所对应的密度图。图 2 中 v 是一个平面波时对应的解。当 $\rho_1 = 0$ 或 $\rho_2 = 0$ 时, 短波分量 u_1 或 u_2 就是亮孤子解, 另外一个短波分量就是暗孤子解, 见图 3。

4. 总结与展望

呼吸 II 型解可以被视为一个亮孤波和一个暗孤波在时间和空间上的相互作用, 这种相互作用表现为亮 - 暗孤波的周期性振荡和能量交换, 这种解在非线性物理中具有重要意义。本文借助 Hirota 双线性方法构造特殊的展开形式给出两分量 Coupled-Higgs 方程的呼吸 II 型解, 并绘制其图像。本文的研究结果为非线性可积系统的研究提供了新的视角, 丰富了对耦合 Higgs 方程动力学的理解。所推导的呼吸子解在非线性光学、等离子体物理和凝聚态物理等领域具有潜在的应用价值, 特别是在描述局域化振荡现象和能量传输机制方面。此外, 本文的研究方法也为求解其他复杂非线性偏微分方程的呼吸子解提供了参考框架, 为相关领域的进一步研究奠定了基础。后续读者也可利用该方法求其他方程的呼吸 II 型解。

参考文献

- [1] Bludov, Y.V., Konotop, V.V. and Akhmediev, N. (2009) Matter Rogue Waves. *Physical Review A*, **80**, Article 033610. <https://doi.org/10.1103/physreva.80.033610>
- [2] Horikis, T.P. and Ablowitz, M.J. (2017) Rogue Waves in Nonlocal Media. *Physical Review E*, **95**, Article 042211. <https://doi.org/10.1103/physreve.95.042211>
- [3] Ganshin, A.N., Efimov, V.B., Kolmakov, G.V., Mezhev-Deglin, L.P. and McClintock, P.V.E. (2008) Observation of an Inverse Energy Cascade in Developed Acoustic Turbulence in Superfluid Helium. *Physical Review Letters*, **101**, Article 065303. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.065303>
- [4] Bailung, H., Sharma, S.K. and Nakamura, Y. (2011) Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions. *Physical Review Letters*, **107**, Article 255005. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.107.255005>
- [5] Solli, D.R., Ropers, C., Koonath, P. and Jalali, B. (2007) Optical Rogue Waves. *Nature*, **450**, 1054-1057. <https://doi.org/10.1038/nature06402>
- [6] Zhang, H. and Chen, F. (2019) Dark and Antidark Solitons for the Defocusing Coupled Sasa-Satsuma System by the Darboux Transformation. *Applied Mathematics Letters*, **88**, 237-242. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.09.002>
- [7] Hirota, R. (2004) The Direct Method in Soliton Theory. Cambridge University Press.
- [8] Hu, X., Li, C., Nimmo, J.J.C. and Yu, G. (2004) An Integrable Symmetric (2+1)-Dimensional Lotka-Volterra Equation and a Family of Its Solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **38**, 195-204. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/1/014>
- [9] Weng, W. and Yan, Z. (2021) Inverse Scattering and N -Triple-Pole Soliton and Breather Solutions of the Focusing Nonlinear Schrödinger Hierarchy with Nonzero Boundary Conditions. *Physics Letters A*, **407**, Article 127472. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127472>
- [10] Anderson, D. (1998) Complex Variables, Introduction and Applications, by Mark J. Ablowitz and Athanassios S. Fokas. *Optics & Photonics News*, **9**, 46-47.
- [11] Tajiri, M. (1983) On N -Soliton Solutions of Coupled Higgs Field Equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, **52**, 2277-2280. <https://doi.org/10.1143/jpsj.52.2277>
- [12] Tsegel'nik, V.V. (2000) Self-similar Solutions of a System of Two Nonlinear Partial Differential Equations. *Differential Equations*, **36**, 480-482. <https://doi.org/10.1007/bf02754472>
- [13] Tang, W. (2023) Soliton Dynamics to the Higgs Equation and Its Multi-Component Generalization. *Wave Motion*, **120**, Article 103144. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103144>
- [14] Ling, L., Zhao, L.-C. and Guo, B. (2014) Darboux Transformation and Classification of Solution for Mixed Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **32**, 285-304. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.08.023>

-
- [15] Zha, Q.L. (2020) Dynamics of Localized Wave Solutions for the Coupled Higgs Field Equation. *Nonlinear Dynamics*, **101**, 1181-1198. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05860-8>
 - [16] Hirota, R. (1971) Exact Solution of the Korteweg—De Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, **27**, 1192-1194. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.27.1192>
 - [17] 陈登远. 孤子引论[M]. 上海: 科学出版社, 2006.