Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 139-145
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155162

Hans汉斯

群$\mathbb{Z}_n^k$的自同构个数的均值

喻俊杰

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2025年3月30日；录用日期：2025年5月6日；发布日期：2025年5月23日

摘 要

令$\mathbb{Z}_n$表示模n剩余类群，$\mathbb{Z}_n^k$表示k个$\mathbb{Z}_n$做直积后的群，并记其自同构个数为$a_k(n)$。对任意的正整数n以及任意给定的正整数k，我们得到了$\sum_{n\le x} a_k(n)$的渐近公式，其表明$a_k(n)$的平均个数在不计常数因子的意义下是n^{k^2}。该结果可被视作是Euler函数的经典均值结果在群论意义下的推广。

关键词

群的自同构，渐近公式，Perron公式，Dirichlet卷积方法

On the Average Number of Automorphisms of the Group $\mathbb{Z}_n^k$

Junjie Yu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Mar. 30th, 2025; accepted: May 6th, 2025; published: May 23rd, 2025

Abstract

Let $\mathbb{Z}_n$ be the additive group of the residue classes modulo n, $\mathbb{Z}_n^k$ be the direct product of k $\mathbb{Z}_n$'s, and $a_k(n)$ be the number of automorphisms of $\mathbb{Z}_n^k$. For arbitrary positive integer n and any given positive integer k, we obtain the asymptotic formula for the sum $\sum_{n\le x} a_k(n)$, which indicates that the average value of $a_k(n)$ is n^{k^2} up to multiplying by a constant. This is a generalization, from a group theory viewpoint, of a classic result for the mean value of the Euler totient function.

Keywords

Automorphisms of Groups, Asymptotic Formula, Perron's Formula, Dirichlet Convolution Method

文章引用: 喻俊杰. 群$\mathbb{Z}_n^k$的自同构个数的均值[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 139-145. DOI: 10.12677/pm.2025.155162

1. 引言

令 $\mathbb{Z}$ 表示整数加群，$\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示模 n 剩余类群。众所周知，群 $\mathbb{Z}$ 的自同构个数为 Euler 函数 $\varphi(n)$。由初等方法容易得到：当 $x\ge 2$ 时，

$$\sum_{n\le x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x).$$

这表明群 $\mathbb{Z}_n$ 的自同构个数大约是 $6n/\pi^2$。

十九世纪中期，Camille Jordan [1]证明了群 $\mathbb{Z}_n^k:=\underbrace{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\times\cdots\times\mathbb{Z}_n}_{k个}$ 的自同构个数为

$$a_k(n)=n^{\frac{k(k-1)}{2}}\prod_{i=1}^{k}J_i(n),$$

其中 $J_i(n)$ 为 Jordan 函数 $J_i(n)=n^i\prod_{p|n}\left(1-1/p^i\right)$，$p$ 为素数，$i\in\mathbb{N}$。特别地，当 $i=1$ 时，便是大名鼎鼎的 Euler 函数

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ p\ 为素数.$$

对于任意的正整数 n，容易发现 $a_1(n)=\varphi(n)$。因此算术函数 $a_k(n)$ 可被视作是 Euler 函数在群论意义下的推广。本文我们主要考虑了 $k\ge 2$ 的情形，并得到了如下结果。

定理 1. 对充分大的 x，我们有

$$\sum\nolimits_{n\le x}a_k(n)=\frac{6x^{k^2+1}}{\left(k^2+1\right)\pi^2}G\left(k^2+1\right)+O_k\left(x^{k^2}\log x\right),\tag{1}$$

其中

$$G(s)=\prod\nolimits_p\left[1-\left(\frac{1}{p}-\sum\nolimits_{j=3}^{\frac{(k+1)k}{2}-1}\frac{b_j}{p^{j-1}}-\frac{(-1)^k}{p^{\frac{(k+1)k}{2}-1}}\right)\frac{1}{p^{s-k^2+1}}-1\right].$$

不难发现，当 $k=1$ 时，定理 1 的结果与上述关于 $\varphi(n)$ 的渐近公式的结果是基本一致的。

类比 L. Tóth、W. G. Nowak 以及翟文广(见[2]-[4])对群 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\mathbb{Z}_{n_3}$ 的子群个数的均值的研究，借助 Sehgal [5]等人得到的群 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ 的自同构个数的结果以及二维 Perron 公式，我们可以得到群 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ 的自同构的均值。进一步地，借助 Hillar 和 Rhea [6]关于群 $\mathbb{Z}_{p^{e_1}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p^{e_l}}$ 的自同构群阶数的结果，理论上我们可以得到对于任意的 $l\in\mathbb{N}$，群 $\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_l}$ 的自同构个数，进而利用 M. Balazard [7]等人得到的多维 Perron 公式去计算群 $\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_l}$ 的自同构个数的均值。碍于本文篇幅以及研究的复杂性，上述两个研究内容并未体现在本文中。

符号说明：在本文中，$\mathbb{N}$ 表示正整数集，$\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示模 n 剩余类群，$\mathbb{Z}_n^k$ 表示 k 个 $\mathbb{Z}_n$ 做直积后的群，μ 表示 Möbius 函数，ζ 表示 Riemann-zeta 函数，$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，$a_k(n)$ 表示群 $\mathbb{Z}_n^k$ 的

自同构个数，$*$ 表示 Dirichlet 卷积。对任意的复数 $s=\sigma+it$， σ 和 t 分别表示 s 的实部和虚部。

2. $a_k(n)$ 的卷积表示

由于 $a_k(n)$ 的表达式比较复杂，因此为将 $a_k(n)$ 表示为卷积，我们考虑先将由 $a_k(n)$ 生成的 Dirichlet 级数解析延拓后再进行卷积表示。在此之前，我们先考察下面这个多项式：

$$f(x)=\prod_{i=1}^{k}\left(1-x^i\right):=\sum_{j=0}^{k(k+1)/2} b_j x^j.$$

容易验证，$k=1$ 时，$b_0=1$，$b_1=-1$，$b_2=0$；$k=2$ 时，$b_3=1$；$k\geq 2$ 时，$b_2=-1$；$k\geq 3$ 时，$b_3=0$；$b_{k(k+1)/2}=(-1)^k$。下面我们开始对由 $a_k(n)$ 生成的 Dirichlet 级数进行解析延拓。我们有如下结果。

命题 1. 对任意实部大于 k^2+1 的复数 s，总有

$$A_k(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_k(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k^2}\prod_{p\mid n}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)}{n^s}=\frac{\zeta\left(s-k^2\right)}{\zeta\left(s-k^2+1\right)}G(s), \tag{2}$$

其中

$$G(s)=\prod_p\left[1-\left(\frac{1}{p}-\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{j-1}}-\frac{(-1)^k}{p^{\frac{k(k+1)}{2}-1}}\right)\frac{1}{p^{s-k^2+1}-1}\right]$$

证明： 容易验证 $a_k(n)$ 可乘。由于 $\sigma>k^2+1>1$，故根据 Riemann-zeta 函数 $\zeta(s)$ 的 Euler 乘积展开：

$$\zeta(s)=\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}p^{-ks}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1},$$

我们有

$$\begin{aligned}
A_k(s)&=\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)}{p^{r\left(s-k^2\right)}}\right)\\
&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-k^2}}-\frac{1}{p^{s-k^2+1}}-\frac{1}{p^{s-k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{s-k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{s-\frac{k(k-1)}{2}}}+\frac{1}{p^{2s-2k^2}}-\frac{1}{p^{2s-2k^2+1}}\right.\\
&\quad-\frac{1}{p^{2s-2k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{2s-2k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{2s-\frac{k(3k-1)}{2}}}+\frac{1}{p^{3s-3k^2}}-\frac{1}{p^{3s-3k^2+1}}-\frac{1}{p^{3s-3k^2+2}}\\
&\quad\left.+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{3s-3k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{3s-\frac{k(5k-1)}{2}}}+\cdots\right)\cdot\frac{\zeta\left(s-k^2\right)}{\zeta\left(s-k^2\right)}\\
&=\zeta\left(s-k^2\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-k^2+1}}-\frac{1}{p^{s-k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{s-k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{s-\frac{k(k-1)}{2}}}\right)\cdot\frac{\zeta\left(s-k^2+1\right)}{\zeta\left(s-k^2+1\right)}
\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2025.155162

$$=\frac{\zeta\left(s-k^2\right)}{\zeta\left(s-k^2+1\right)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{s-k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{s-\frac{k(k-1)}{2}}}-\frac{1}{p^{2s-2k^2+3}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{2s-2k^2+j+1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^k}{p^{2s-\frac{k(3k-1)}{2}+1}}-\frac{1}{p^{3s-3k^2+4}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{3s-3k^2+j+2}}+\frac{(-1)^k}{p^{3s-\frac{k(5k-1)}{2}+2}}+\cdots\right)$$

记

$$G(s):=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{s-k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{s-\frac{k(k-1)}{2}}}-\frac{1}{p^{2s-2k^2+3}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{2s-2k^2+j+1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^k}{p^{2s-\frac{k(3k-1)}{2}+1}}-\frac{1}{p^{3s-3k^2+4}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{3s-3k^2+j+2}}+\frac{(-1)^k}{p^{3s-\frac{k(5k-1)}{2}+2}}+\cdots\right) \quad (3)$$

当$\sigma>k^2-1$时，有

$$\log G(s)=\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^{s-k^2+2}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{s-k^2+j}}+\frac{(-1)^k}{p^{s-\frac{k(k-1)}{2}}}-\frac{1}{p^{2s-2k^2+3}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{2s-2k^2+j+1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^k}{p^{2s-\frac{k(3k-1)}{2}+1}}-\frac{1}{p^{3s-3k^2+4}}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^{3s-3k^2+j+2}}+\frac{(-1)^k}{p^{3s-\frac{k(5k-1)}{2}+2}}+\cdots\right)$$
$$\ll\sum_p\frac{1}{p^{\sigma-k^2+2}}\ll 1$$

从而$G(s)$在半平面$\sigma>k^2-1$绝对一致收敛，从而无穷乘积$G(s)$中的每一项可以求和为如下形式：

$$G(s)=\prod_p\left[1-\left(\frac{1}{p}-\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^j-1}-\frac{(-1)^k}{p^{\frac{k(k+1)}{2}-1}}\right)\frac{1}{p^{s-k^2+1}-1}\right]$$

又因为$\zeta\left(s-k^2\right)$和$\left(\zeta\left(s-k^2+1\right)\right)^{-1}$分别在$\sigma>k^2+1$和$\sigma>k^2$解析，故$A_k(s)$在$\sigma>k^2+1$绝对一致收敛。 □

容易发现，存在算术函数$g(n)$，使得

$$G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s},$$

从而根据 Dirichlet 级数乘积与算术函数卷积的关系，我们有如下推论。

推论 1. 对任意的$n\in\mathbb{N}$，有

$$a_k(n)=n^{k^2}*\left(n^{k^2-1}\mu(n)\right)*g(n) \quad (4)$$

3. 对$|g(n)|$的相关分析

由于$g(n)$的具体表达式未知且在实际应用卷积方法的过程中常涉及算术函数的绝对值的求和，因此我们在此分析$|g(n)|$。我们有如下命题。

命题 2. 对任意的$n\in\mathbb{N}$，

$$\left|g(n)\right|<n^{k^2-1}.$$

证明： 由(3)，对任意的素数 p 以及 $\alpha\in\mathbb{N}$，有

$$\left|g\left(p^{\alpha}\right)\right|=p^{\alpha\left(k^2-1\right)}\left|-\frac{1}{p}+\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^j-1}+\frac{(-1)^k}{p^{\frac{k(k+1)}{2}-1}}\right|=p^{\alpha\left(k^2-1\right)}\left|\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)\right| \tag{5}$$

由于 p 是素数，故$\left|\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)\right|<1$，因此对于任意的$n\in\mathbb{N}$，设$n=\prod_{p|n}p^{\alpha}$，从而有

$$\left|g(n)\right|<n^{k^2-1}$$

并且n^{k^2-1}关于 n 单调递增。 □

下面我们开始研究$\left|g(n)\right|$的求和。根据 Perron 公式(见[8] [9])，我们有如下结果。

命题 3. 对任何充分大的实数x，有

$$\sum_{n\le x}\left|g(n)\right|=O_k\left(x^{k^2-1}\log x\right). \tag{6}$$

证明： 不难发现，级数$\tilde{G}(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\left|g(n)\right|n^{-s}$的解析范围与$G(s)$相同，均为$\sigma>k^2-1$。在区域$\sigma>k^2$内，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g(n)\right|}{n^s}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma-k^2+1}}\le\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma-k^2+1}}=\frac{1}{\sigma-k^2}. \tag{7}$$

对任意的ε，令$\sigma=k^2-1+\varepsilon$，则对充分大的素数 p，有

$$\left|p^{s-k^2-1}-1\right|\ge\left|p^{\varepsilon}-1\right|\ge p^{\frac{\varepsilon}{2}}-1\ge p^{\frac{\varepsilon}{4}},$$

从而

$$\sum_p\log\left[1-\left(\frac{1}{p}-\sum_{j=3}^{\frac{k(k+1)}{2}-1}\frac{b_j}{p^j-1}-\frac{(-1)^k}{p^{\frac{k(k+1)}{2}-1}}\right)\frac{1}{p^{s-k^2+1}-1}\right]\ll\sum_p\frac{1}{p^{\frac{\varepsilon}{4}+1}}\ll\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\varepsilon}{4}+1}}=\frac{4}{\varepsilon},$$

故$\tilde{G}(s)$是有界的。

不失一般性，我们假定$x=N+1/2\ge2025$。根据 Perron 公式，我们有

$$\sum_{n\le x}\left|g(n)\right|=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\tilde{G}(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b)}{T}\right)+O\left(\frac{xH(2x)\log x}{T}\right), \tag{8}$$

其中$B(\sigma)=\left(\sigma-k^2\right)^{-1}$，$H(x)=x^{k^2-1}$，并且我们取$\sigma_1=k^2-1+1/\log x$。

利用围道积分法，下面我们在以$b\pm iT,\sigma_1\pm iT$为顶点的矩形围道考虑积分

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi}\tilde{G}(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

注意到在围道内部被积函数解析，因此下面我们将在矩形围道 Φ 的上、下、左三条边上做积分估计。

首先，在两条水平线段$\sigma_1<\sigma<b,t=\pm T$上，我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\tilde{G}(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\le\int_{\sigma_1}^{b}\left|\tilde{G}(s)\right|\frac{x^\sigma}{T}\mathrm{d}\sigma\ll\frac{x^b}{T}. \tag{9}$$

其次，在左边竖直线段 $-T\le t\le T,\sigma=\sigma_1$ 上，我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\tilde{G}(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll_k x^{k^2-1}\int_2^T\frac{\mathrm{d}t}{t}\ll_k x^{k^2-1}\log T. \tag{10}$$

最后，我们联立(8)~(10)并取 $b=k^2+1/\log x, T=x$ 来平衡所有的余项之后便能得到(6)。 □

4. 定理 1 的证明

有了前两节的准备，接下来我们就开始证明定理 1。

定理 1 的证明：根据(3)，我们有

$$\sum_{n\le x}a(n)=\sum_{uvw\le x}u^{k^2}v^{k^2-1}\mu(v)g(w)=\sum_{vw\le x}v^{k^2-1}\mu(v)g(w)\sum_{u\le\frac{x}{vw}}u^{k^2}\quad(u,v,w\in\mathbb{N}) \tag{11}$$

而

$$\sum_{u\le\frac{x}{vw}}u^{k^2}=\int_1^{\frac{x}{vw}}t^{k^2}\mathrm{d}t+\left(\lfloor t\rfloor-t\right)t^{k^2}\Big|_1^{\frac{x}{wv}}-k^2\int_1^{\frac{x}{vw}}\left(\lfloor t\rfloor-t\right)t^{k^2-1}\mathrm{d}t=\frac{x^{k^2+1}}{\left(k^2+1\right)v^{k^2+1}w^{k^2+1}}+O_k\left(\frac{x^{k^2}}{v^{k^2}w^{k^2}}\right) \tag{12}$$

故

$$\sum_{vw\le x}v^{k^2-1}\mu(v)g(w)O_k\left(\frac{x^{k^2}}{v^{k^2}w^{k^2}}\right)=O_k\left(x^{k^2}\sum_{vw\le x}\frac{|\mu(v)|}{v}\cdot\frac{|g(w)|}{w^{k^2}}\right)=O_k\left(x^{k^2}\sum_{v\le x}\frac{|\mu(v)|}{v}\sum_{w\le\frac{x}{v}}\frac{|g(w)|}{w^{k^2}}\right) \tag{13}$$

由命题 3 和分部求和，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{w\le\frac{x}{v}}\frac{|g(w)|}{w^{k^2}}&=\int_1^{\frac{x}{v}}\frac{1}{t^{k^2}}\mathrm{d}\left(O_k\left(\frac{x^{k^2-1}}{v^{k^2-1}}\log x\right)\right)\\&=O_k\left(\frac{v^{k^2}}{x^{k^2}}\left(\frac{x^{k^2-1}}{v^{k^2-1}}\log x\right)\right)+O_k\left(\int_1^{\frac{x}{v}}\frac{1}{t^{k^2+1}}\cdot\frac{x^{k^2-1}}{v^{k^2-1}}\log x\mathrm{d}t\right)\\&=O_k\left(\frac{v}{x}\log x\right)\end{aligned} \tag{14}$$

故

$$\sum_{vw\le x}v^{k^2-1}\mu(v)g(w)O_k\left(\frac{x^{k^2}}{v^{k^2}w^{k^2}}\right)=O_k\left(x^{k^2-1}\log x\sum_{v\le x}|\mu(v)|\right)=O_k\left(x^{k^2}\log x\right). \tag{15}$$

此外，

$$\begin{aligned}\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{vw\le x}\frac{\mu(v)g(w)}{v^2w^{k^2+1}}&=\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\mu(v)}{v^2}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{g(w)}{w^{k^2+1}}-\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{vw>x}\frac{\mu(v)g(w)}{v^2w^{k^2+1}}\\&=\frac{x^{k^2+1}}{\left(k^2+1\right)\zeta(2)}G\left(k^2+1\right)-\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{g(w)}{w^{k^2+1}}\sum_{v>\frac{x}{w}}\frac{\mu(v)}{v^2}\\&=\frac{6x^{k^2+1}}{\pi^2\left(k^2+1\right)}G\left(k^2+1\right)-\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{g(w)}{w^{k^2+1}}\sum_{v>\frac{x}{w}}\frac{\mu(v)}{v^2}\end{aligned} \tag{16}$$

借助有关 $\mu(n)$ 求和的经典结果[10]

$$\sum_{n\le x}\mu(n)=O\left(x\mathrm{e}^{-c\sqrt[10]{\log x}}\right),\tag{17}$$

其中 c 是正常数，从而我们有

$$\sum_{v>\frac{x}{w}}\frac{\mu(v)}{v^2}=\int_{\frac{x}{w}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}\left(\sum_{v\le\frac{x}{w}}\mu(v)\right)=\int_{\frac{x}{w}}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}\left(O\left(\frac{x}{w}\mathrm{e}^{-c\sqrt[10]{\log\frac{x}{w}}}\right)\right)=O\left(\frac{w}{x}\mathrm{e}^{-c\sqrt[10]{\log\frac{x}{w}}}\right),\tag{18}$$

因此

$$\frac{x^{k^2+1}}{k^2+1}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{g(w)}{w^{k^2+1}}\sum_{l>\frac{x}{w}}\frac{\mu(v)}{v^2}=O_k\left(x^{k^2}\mathrm{e}^{-c\sqrt[10]{\log\frac{x}{w}}}\right).\tag{19}$$

最后，联立(11) (12) (15) (16) (19)，我们就能得到定理 1。 □

致　谢

本论文的顺利完成离不开刘奎教授的宝贵意见及建议，作者在此向他表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Jordan, C. (1957) Traité substitutions et des equations algebriques. Gauthier-Yillars.

[2] Nowak, W.G. and Tóth, L. (2014) On the Average Number of Subgroups of the Group $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. *International Journal of Number Theory*, **10**, 363-374. https://doi.org/10.1142/s179304211350098x

[3] Tóth, L. and Zhai, W. (2018) On the Error Term Concerning the Number of Subgroups of the Groups $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ with m, n ≤ x. *Acta Arithmetica*, **183**, 285-299. https://doi.org/10.4064/aa171111-7-2

[4] Tóth, L. and Zhai, W. (2020) On the Average Number of Cyclic Subgroups of the Groups $\mathbb{Z}_{n1} \times \mathbb{Z}_{n2} \times \mathbb{Z}_{n3}$ with n_1, $n_2 \le n_3$. *Research in Number Theory*, **6**, Article No. 12. https://doi.org/10.1007/s40993-020-0186-6

[5] Sehgal, A., Sehgal, S. and Sharma, P.K. (2016) The Number of Automorphism of a Finite Abelian Group of Rank Two. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **19**, 163-171. https://doi.org/10.1080/09720529.2015.1103469

[6] Hillar, C.J. and Rhea, D.L. (2007) Automorphisms of Finite Abelian Groups. *The American Mathematical Monthly*, **114**, 917-923. https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920485

[7] Balazard, M., Naimi, M. and Pétermann, Y.-S. (2008) Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Möbius. *Acta Arithmetica*, **132**, 245-298. https://doi.org/10.4064/aa132-3-4

[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 第 2 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016.

[9] Karatsuba, A.A. (1945) Basic Analytic Number Theory. Nauka.

[10] Murty, M.R. (2001) Problems in Analytic Number Theory. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3441-6