

具有 4×4 Lax对的NLS方程的黎曼 - 希尔伯特问题

曹一苇

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年3月30日; 录用日期: 2025年4月30日; 发布日期: 2025年5月22日

摘 要

本文首先阐述了具有 4×4 Lax对的NLS方程的来历、表示形式, 并将其表示为矩阵的分块形式, 通过对Lax对、特征函数以及对称性的分析, 得出全局关系, 并表示出 $s(k)$ 和 $S(k)$ 的形式, 进而构造黎曼 - 希尔伯特问题, 并通过 M_n 之间的关系, 计算出其跳跃矩阵。

关键词

具有 4×4 Lax对的NLS方程, Lax对, 黎曼 - 希尔伯特问题

The Riemann-Hilbert Problem for the NLS Equation with a 4×4 Lax Pair

Yiwei Cao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 30th, 2025; accepted: Apr. 30th, 2025; published: May 22nd, 2025

Abstract

In this paper, the origin and representation of the square matrix NLS equation with a 4×4 Lax pair are first expounded, and it is expressed as the block form of the matrix. Through the analysis of lax pair, eigenfunction and symmetry, we establish the global relation and derive the explicit forms of $s(k)$ and $S(k)$. And then the Riemann-Hilbert problem is constructed, and its jump matrix is calculated through the relationship between M_n .

Keywords

The NLS Equation with a 4×4 Lax Pair, Lax Pair, Riemann-Hilbert Problem

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

黎曼-希尔伯特问题是 Fokas 方法中分析非线性方程的初边值问题的重要一环, 2002 年, Fokas 在分析半直线上非线性薛定谔方程(NLS)、KdV 方程、sine-Gordon 方程的初边值问题时, 给出了这些方程的黎曼-希尔伯特问题[1]。2012 年, Lenells 将 Fokas 方法进一步推广到具有 3×3 Lax 对的方程中时, 给出了具有 3×3 Lax 对的方程的黎曼-希尔伯特问题[2]。

在过去二十年里, 多组分玻色-爱因斯坦凝聚体(BECs)的研究一直是一个非常活跃的研究领域。这些系统可以在平均场理论框架内推导得出, 它们所表现出的非线性激发的静态和动态特性可以通过一组耦合的格罗斯-皮塔耶夫斯基(Gross-Pitaevskii)方程很好地描述[3]-[6], 该方程组是所谓的散焦矢量非线性薛定谔(NLS)方程的一种变体[7] [8]。当原子种类内部和之间的排斥相互作用强度相等时(即可积情况, 也称为马纳科夫(Manakov)极限[9]), 在不存在囚禁势的情况下, 它可简化为散焦矢量非线性薛定谔方程。尤其是, 光捕获技术使得在自旋极化玻色-爱因斯坦凝聚体(spinor BECs)中实现原子囚禁成为可能, 无论其自旋超精细态如何[10][11], 在均匀环境中(即不存在囚禁势的情况下), 对于合适的相互作用系数选择, 具有 $F=1$ 的自旋极化玻色-爱因斯坦凝聚体可以用矩阵非线性薛定谔(NLS)方程来描述:

$$iQ_t + Q_{xx} - 2vQQ^\dagger Q = 0_{2 \times 2}, \quad (1)$$

其中 $Q(x, t)$ 是一个 2×2 的复矩阵值函数, $Q^\dagger$ 表示 Q 的厄米共轭。当 $v=-1$ (相应地, $v=+1$) 时, 系统处于自聚焦(相应地, 自散焦)状态。如果选择 2×2 矩阵势 $Q(x, t)$ 为复对称矩阵, 即 $Q(x, t) = \text{diag}(q_1, q_{-1}) + q_0 \sigma_1$ (这里及以下 σ_j ($j=1, 2, 3$) 表示泡利矩阵), 方程(1)可用于描述具有 $F=1$ 的自旋极化玻色-爱因斯坦凝聚体; 自散焦情况($v=1$)对应于原子间的排斥相互作用和反铁磁自旋交换相互作用, 而 $v=1$ 描述了吸引原子间相互作用和铁磁自旋交换相互作用($v=-1$)。在这两种情况下, 函数 q_1, q_0, q_{-1} 与自旋构型为 $1, 0, -1$ 时量子场算符三个分量的真空期望值相关[12] [13]。

本文主要研究上述矩阵非线性薛定谔方程的一种推广形式, 即

$$iQ_t + Q_{xx} - 2Q\Sigma Q^\dagger \Omega Q = 0_{2 \times 2}, \quad (2)$$

其中 Q 是一个 2×2 的复矩阵函数, 已证明对于任意的 2×2 厄米矩阵 Σ, Ω , 该方程是可积的, Ω 可在不失一般性的情况下选择为规范形式, 即对角元素为 0 或者 ± 1 , 由于我们关注的是完全耦合系统, 而不是三角系统, 我们假设 Σ, Ω 都是 2×2 的对角矩阵, 元素为 ± 1 , 如果我们记 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ 和 $\Omega = \text{diag}(\omega_{11}, \omega_{22})$, 其中 $\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \omega_{11}^2 = \omega_{22}^2 = 1$, 并假设 $Q = Q(x, t)$ 是一个对称矩阵:

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} q_1(x, t) & q_0(x, t) \\ q_0(x, t) & q_{-1}(x, t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

那么方程(2)中非对角项的相容性要求 $\sigma_{11}\omega_{22} = \sigma_{22}\omega_{11}$, 由此可以得出方程有如下形式:

I. 散焦型的非线性薛定谔方程, 当 $\Sigma = \Omega = I_2$ (等同于 $\Sigma = \Omega = -I_2$), 即为

$$\begin{cases} iq_{1t} + q_{1xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 + 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_{-1} = 0, \\ iq_{-1t} + q_{-1xx} - 2q_{-1} \left[|q_{-1}|^2 + 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_1 = 0, \\ iq_{0t} + q_{0xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 + |q_0|^2 + |q_{-1}|^2 \right] - 2q_0 \bar{q}_{-1} q_{-1} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

II. 聚焦型的非线性薛定谔方程, 当 $\Sigma = -\Omega = I_2$ (等同于 $-\Sigma = \Omega = I_2$), 即为

$$\begin{cases} iq_{1t} + q_{1xx} + 2q_1 \left[|q_1|^2 + 2|q_0|^2 \right] + 2q_0^2 \bar{q}_{-1} = 0, \\ iq_{-1t} + q_{-1xx} + 2q_{-1} \left[|q_{-1}|^2 + 2|q_0|^2 \right] + 2q_0^2 \bar{q}_1 = 0, \\ iq_{0t} + q_{0xx} + 2q_1 \left[|q_1|^2 + |q_0|^2 + |q_{-1}|^2 \right] + 2q_0 \bar{q}_{-1} q_{-1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

III. 当 $\Sigma = \Omega = \sigma_3$ (等同于 $\Sigma = \Omega = -\sigma_3$), 即为

$$\begin{cases} iq_{1t} + q_{1xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 - 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_{-1} = 0, \\ iq_{-1t} + q_{-1xx} - 2q_{-1} \left[|q_{-1}|^2 - 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_1 = 0, \\ iq_{0t} + q_{0xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 - |q_0|^2 + |q_{-1}|^2 \right] + 2q_0 \bar{q}_{-1} q_{-1} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

IV. 当 $\Sigma = -\Omega = \sigma_3$ (等同于 $\Sigma = -\Omega = -\sigma_3$), 即为

$$\begin{cases} iq_{1t} + q_{1xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 - 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_{-1} = 0, \\ iq_{-1t} + q_{-1xx} - 2q_{-1} \left[|q_{-1}|^2 - 2|q_0|^2 \right] - 2q_0^2 \bar{q}_1 = 0, \\ iq_{0t} + q_{0xx} - 2q_1 \left[|q_1|^2 - |q_0|^2 + |q_{-1}|^2 \right] + 2q_0 \bar{q}_{-1} q_{-1} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

本文通过将 4×4 的矩阵划分为 4 个 2×2 的分块矩阵, 使用[14]中的方法探究具有 4×4 Lax 对的 NLS 方程的黎曼 - 希尔伯特问题

2. Lax 对, 特征函数和谱函数

2.1. 具有 4×4 Lax 对的 NLS 方程

在本文中, 将 4×4 矩阵表示为

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} \\ \tilde{X}_{21} & \tilde{X}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{X}_{11} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \tilde{X}_{12} = \begin{pmatrix} X_{13} & X_{14} \\ X_{23} & X_{24} \end{pmatrix} \\ \tilde{X}_{21} &= \begin{pmatrix} X_{31} & X_{32} \\ X_{41} & X_{42} \end{pmatrix}, \tilde{X}_{22} = \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} \\ X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

具有 4×4 lax 对的 NLS 方程存在 Lax 对的表达形式:

$$\begin{cases} \psi_x + ik\sigma_4 \psi = U(x, t) \psi, \\ \psi_t + 2ik^2 \sigma_4 \psi = V(x, t, k) \psi, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\psi = \psi(x, t, k)$ 是一个 4×4 的谱函数, $k \in \mathbb{C}$ 是一个等谱参数, $U(x, t), V(x, t, k)$ 和 σ_4 定义如下

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & Q \\ R & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, R = \Sigma Q^\dagger \Omega,$$

$$V(x, t, k) = -2ik^2 \sigma_4 + V_0, V_0 = i\sigma_4 (U_x - U^2),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

引入一个变换

$$\mu(x, t, k) = \psi(x, t, k) e^{i(kx + 2k^2 t) \sigma_4}, \quad (11)$$

通过这个变换, Lax 对(9)变换成

$$\begin{cases} \mu_x + ik[\sigma_4, \mu] = U(x, t)\mu, \\ \mu_t + 2ik^2[\sigma_4, \mu] = V(x, t, k)\mu, \end{cases} \quad (12)$$

这个方程可以成为如下形式

$$d \left[e^{i(kx + 2k^2 t) \sigma_4} \mu(x, t, k) \right] = W(x, t, k), \quad (13)$$

其中封闭差分单形 $W(x, t, k)$ 为

$$W(x, t, k) = e^{i(kx + 2k^2 t) \sigma_4} [U(x, t, k) \mu(x, t, k) dx + V(x, t, k) \mu(x, t, k) dt], \quad (14)$$

2.2. 特征函数

对于所考虑区域 $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ (见图 1) 中的任意点 (x, t) , $\{\gamma_j\}_1^3$ 分别表示在区域 Ω 中连接 (x_j, t_j) 与 (x, t) 的三条路径, 其中 $(x_1, t_1) = (0, T)$, $(x_2, t_2) = (0, 0)$, $(x_3, t_3) = (\infty, t)$, 因此, 对于每条路径上的点 (ξ, τ) 有

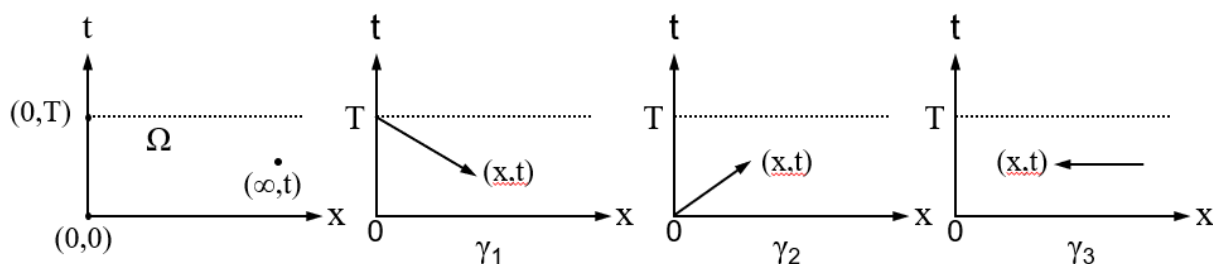


Figure 1. Regions Ω and three paths

图 1. 区域 Ω 以及三条路径

$$\gamma_j, j=1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \gamma_1: x - \xi &\geq 0, t - \tau \leq 0, \\ \gamma_2: x - \xi &\geq 0, t - \tau \geq 0, \\ \gamma_3: x - \xi &\leq 0, t - \tau = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

由一次形式可知, 我们可以使用沃尔泰拉积分方程来定义上述三条路径 $\{\gamma_j\}_1^3$ 上的三个特征函数 $\{\mu_j\}_{j=1}^3$:

$$\mu_j(x, t, k) = I + \int_{(x_j, t_j)}^{(x, t)} e^{i(kx + 2k^2 t) \sigma_4} W_j(\xi, t, k), j=1, 2, 3, (x, t) \in \Omega, \quad (16)$$

其中 $I = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, 积分是沿着从 (x_j, t_j) 到 (x, t) 的光滑曲线进行的, $W_j(x, t, k)$ 是由方程(14)给出的, 其中 $\mu(x, t, k)$ 被替换为 $\mu_j(x, t, k)$, 由于一次形式 W_j 是闭的, 所以 μ_j 与积分路径无关。如果我们选择积分路径平行于 x 轴和 t 轴, 那么积分方程(11)变为 ($j = 1, 2, 3$)

$$\mu_j = I + \int_{x_j}^x e^{-ik(x-\xi)\hat{\sigma}_4} (U\mu_j)(\xi, t, k) d\xi + e^{-ik(x-x_j)\hat{\sigma}_4} \int_{t_j}^t e^{-2ik^2(t-\tau)\hat{\sigma}_4} (V\mu_j)(x_j, \tau, k) d\tau, \quad (17)$$

方程(17)表明, 矩阵 $\mu_j(x, t, k)$ 的第一、第二、第三和第四列包含这些指数函数:

$$\begin{aligned} [\mu_j]_1 &: e^{2ik(x-\xi)+4ik^2(t-\tau)}, e^{2ik(x-\xi)+4ik^2(t-\tau)}, \\ [\mu_j]_2 &: e^{2ik(x-\xi)+4ik^2(t-\tau)}, e^{2ik(x-\xi)+4ik^2(t-\tau)}, \\ [\mu_j]_3 &: e^{-2ik(x-\xi)-4ik^2(t-\tau)}, e^{-2ik(x-\xi)-4ik^2(t-\tau)}, \\ [\mu_j]_4 &: e^{-2ik(x-\xi)-4ik^2(t-\tau)}, e^{-2ik(x-\xi)-4ik^2(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (18)$$

为了分析特征函数 $\{\mu_j\}_1^3$ 在复 k 平面上的有界区域, 我们需要使用曲线 $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(x) \text{Re } g(k) = 0, \text{ss } f(x) = ik, g(k) = 2ik^2\}$, 将复 k 平面划分为四个区域(见图 2)

$$\begin{aligned} D_1 &= \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(k) = -\text{Im } k < 0 \text{ and } \text{Re } g(k) - 2 \text{Re } k \text{Im } k < 0\}, \\ D_2 &= \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(k) = -\text{Im } k < 0 \text{ and } \text{Re } g(k) - 2 \text{Re } k \text{Im } k > 0\}, \\ D_3 &= \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(k) = -\text{Im } k > 0 \text{ and } \text{Re } g(k) - 2 \text{Re } k \text{Im } k < 0\}, \\ D_4 &= \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(k) = -\text{Im } k > 0 \text{ and } \text{Re } g(k) - 2 \text{Re } k \text{Im } k > 0\}. \end{aligned} \quad (19)$$

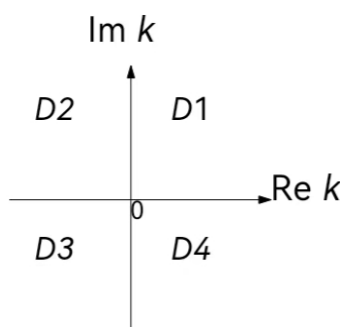


Figure 2. The division D_n of the area on the complex plane k

图 2. 区域 D_n 在复 k 平面上的划分

因此, 由方程(15)、(18)和(19)可得, 特征函数 $\{\mu_j\}_1^3$ 的不同列在复 k 平面上有界且解析的区域如下所示

$$\begin{cases} \mu_1: (D_2, D_3), \\ \mu_2: (D_1, D_4), \\ \mu_3: (D_3 \cup D_4, D_1 \cup D_2), \end{cases} \quad (20)$$

这里 $\mu_l: (D_i, D_j)$, $l = 1, 2, 3$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, D_i 对应 μ_l 的第一列和第二列, D_j 对应 μ_l 的第三列和第四列。

对于特殊的 x 或 t , 特征函数 $\{\mu_j\}_1^3$ 的有界区域更大。

当 $t = 0$ 时, 特征函数 $\{\mu_j\}_1^3$ 的有界区域为:

$$\begin{cases} \mu_1(x, 0, k) : (D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4), \\ \mu_2(x, 0, k) : (D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4), \end{cases} \quad (21)$$

当 $x=0$ 时, 特征函数 $\{\mu_j\}_1^3$ 的有界区域为:

$$\begin{cases} \mu_1(0, t, k) : (D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3), \\ \mu_2(0, t, k) : (D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4), \end{cases} \quad (22)$$

通过如下式子定义 $S(k)$, $s(k)$ 和 $\mathfrak{I}(k)$:

$$\begin{cases} \mu_1(x, t, k) = \mu_2(x, t, k) e^{-i(kx+2k^2t)\hat{\sigma}_4} S(k), \\ \mu_3(x, t, k) = \mu_2(x, t, k) e^{-i(kx+2k^2t)\hat{\sigma}_4} s(k), \\ \mu_3(x, t, k) = \mu_1(x, t, k) e^{-i(kx+2k^2t)\hat{\sigma}_4} \mathfrak{I}(k), \end{cases} \quad (23)$$

在 $(x, t) = (0, 0)$ 和 $(x, t) = (0, T)$ 处, 有

$$\begin{cases} S(k) = \mu_1(0, 0, k) = e^{2ik^2T\hat{\sigma}_4} \mu_2^{-1}(0, T, k), \\ s(k) = \mu_3(0, 0, k), \\ \mathfrak{I}(k) = \mu_1^{-1}(0, 0, k) \mu_3(0, 0, k) = S^{-1}(k) s(k) = e^{2ik^2T\hat{\sigma}_4} \mu_3(0, T, k), \end{cases} \quad (24)$$

由 μ_j 的定义, 可写为

$$\begin{aligned} s(k) &= I - \int_0^\infty e^{ik\xi\hat{\sigma}_4} (U\mu_3)(\xi, 0, k) d\xi, \\ S(k) &= I - \int_0^T e^{2ik^2\tau\hat{\sigma}_4} (V\mu_1)(0, \tau, k) d\tau = \left[I + \int_0^T e^{2ik^2\tau\hat{\sigma}_4} (V\mu_1)(0, \tau, k) d\tau \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\mu_j(0, t, k)$, $j=1, 2$ 和 $\mu_3(x, 0, k)$, $0 < x < \infty, 0 < t < T$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned} \mu_3(x, 0, k) &= I - \int_x^\infty e^{-ik(x-\xi)\hat{\sigma}_4} (U\mu_3)(\xi, 0, k) d\xi, \quad 0 < x < \infty, \quad k \in (D_3 \cup D_4, D_1 \cup D_2), \\ \mu_1(0, t, k) &= I - \int_t^T e^{-2ik^2(t-\tau)\hat{\sigma}_4} (V\mu_1)(0, \tau, k) d\tau, \quad 0 < t < T, \quad k \in (D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3), \\ \mu_2(0, t, k) &= I + \int_0^t e^{-2ik^2(t-\tau)\hat{\sigma}_4} (V\mu_2)(0, \tau, k) d\tau, \quad 0 < t < T, \quad k \in (D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4), \end{aligned} \quad (26)$$

此外, $\{S(k), s(k)\}$ 和 $\{(S^{-1}(k))^T, (s^{-1}(k))^T\}$ 有如下边界:

$$\begin{cases} S(k) : k \in (D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3), \\ s(k) : k \in (D_3 \cup D_4, D_1 \cup D_2), \\ (S^{-1})^T : k \in (D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4), \\ (s^{-1})^T : k \in (D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4). \end{cases} \quad (27)$$

2.3. 对称性

由方程(12), $(\mu_j^{-1})^T$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} (\mu_{j,x}^{-1})^T - ik[\sigma_4, (\mu_j^{-1})^T] = -U^T (\mu_j^{-1})^T, \\ (\mu_{j,t}^{-1})^T - 2ik^2[\sigma_4, (\mu_j^{-1})^T] = -V^T (\mu_j^{-1})^T, \end{cases} \quad (28)$$

$(\mu_j^{-1})^T$ 的有界区域如下

$$\begin{cases} (\mu_1^{-1})^T(x, t, k) : k \in (D_3, D_2), \\ (\mu_2^{-1})^T(x, t, k) : k \in (D_4, D_1), \\ (\mu_3^{-1})^T(x, t, k) : k \in (D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4), \end{cases} \quad (29)$$

并且 U 和 V 分别与各自的厄米共轭函数和矩阵转置有如下关系

$$U^\dagger = -\Xi^{-1}U\Xi, \quad V^\dagger = -\Xi^{-1}V\Xi, \quad (30)$$

$$U = -F^{-1}U^T F, \quad V = -F^{-1}V^T F, \quad (31)$$

其中 $\Xi = \begin{pmatrix} \Omega^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\Sigma \end{pmatrix}$ 和 $F = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & -\Omega \Sigma^{-1} \\ \Sigma^{-1} \Omega & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$,

可得

$$\Xi^{-1} \mu \Xi = (\mu^{-1})^\dagger, \quad (32)$$

$$\mu^T F \mu = F, \quad (33)$$

故有

$$\tilde{\mu}_{21} = \Sigma \tilde{\mu}_{12} \Omega, \quad (34)$$

$$\tilde{\mu}_{11} = \Omega^{-1} \tilde{\mu}_{22} \Omega, \quad (35)$$

因此 $s(k)$ 和 $S(k)$ 可以表示为如下形式:

$$s(k) = \begin{pmatrix} \Omega^{-1} \tilde{s}_{22}(\bar{k}) \Omega & \tilde{s}_{12}(k) \\ \Sigma \tilde{s}_{12}(\bar{k}) \Omega & \tilde{s}_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad S(k) = \begin{pmatrix} \Omega^{-1} \tilde{S}_{22}(\bar{k}) \Omega & \tilde{S}_{12}(k) \\ \Sigma \tilde{S}_{12}(\bar{k}) \Omega & \tilde{S}_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_{12}(k) \\ \tilde{s}_{22}(k) \end{pmatrix} = [\tilde{\mu}_2]_2(0, 0, k), \quad \begin{pmatrix} e^{-4ik^2 T} (\tilde{S}_{12}(k))^T \\ (\Sigma^{-1} \tilde{S}_{22}(t, \bar{k}) \Sigma)^T \end{pmatrix} = [\tilde{\mu}_2]_2(0, T, k), \quad (37)$$

2.4. 全局关系

根据公式(24), 可得全局关系:

$$-I + S^{-1}(T) s(k) + e^{2ik^2 T \hat{\sigma}_4} \int_0^\infty e^{-ik\xi \hat{\sigma}_4} (U \mu_3)(\xi, T, k) d\xi = 0, \quad (38)$$

这里的 $\mu_3(0, t, k), 0 < t < T$ 满足积分方程

$$\mu_3(0, T, k) = I - \int_x^\infty e^{ik\xi \hat{\sigma}_4} (U \mu_3)(\xi, t, k) d\xi, \quad 0 < x < \infty, k \in (D_3 \cup D_4, D_1 \cup D_2), \quad (39)$$

其(1,2)为

$$\tilde{S}_{22}^T(k) \tilde{s}_{12}(k) - \tilde{S}_{12}^T(k) \tilde{s}_{22}(k) = e^{4ik^2 T} c^+(k), \quad \text{Im } k \leq 0, \quad (40)$$

其中

$$c^+(k) = \int_0^\infty e^{2ik\xi} (U\mu_3)_{12}(\xi, T, k) dy. \quad (41)$$

3. 黎曼 - 希尔伯特问题

通过公式(9)以及谱函数的定义, 将公式(24)的向量解联系起来, 我们得到

$$M_-(x, t, k) = M_+(x, t, k) J(x, t, k), \operatorname{Im} k^2 = 0, \quad (42)$$

其中 $M_\pm(x, t, k)$ 是一个分段亚纯函数 $M(x, t, k)$ 的极限值(当 k 从 $\Omega_\pm$ 趋近于集合 $\{k \mid \operatorname{Im} k^2 = 0\}$), $M(x, t, k)$ 定义如下:

$$\begin{cases} M_+ = ([\tilde{\mu}_2]_1, [\tilde{\mu}_3]_2 \tilde{s}_{22}^{-1}(k)), k \in D_1; \\ M_- = ([\tilde{\mu}_1]_1 d^{-1}(k), [\tilde{\mu}_3]_2 \tilde{s}_{22}^{-1}(k)), k \in D_2; \\ M_+ = ([\tilde{\mu}_3]_1 (\Omega^{-1} \overline{\tilde{s}_{22}(\bar{k})} \Omega)^{-1}, [\tilde{\mu}_1]_2 (\Omega d(\bar{k}) \Omega^{-1})^{-1}), k \in D_3; \\ M_- = ([\tilde{\mu}_3]_1 (\Omega^{-1} \overline{\tilde{s}_{22}(\bar{k})} \Omega)^{-1}, [\tilde{\mu}_2]_2), k \in D_4, \end{cases} \quad (43)$$

其中

$$d(k) = \Omega^{-1} \overline{\tilde{s}_{22}(\bar{k})} \Omega - \tilde{s}_{12}(k) \tilde{s}_{22}^{-1}(k) (\Sigma \tilde{s}_{12}(\bar{k}) \Omega), \quad (44)$$

并且有

$$J(x, t, k) = \begin{cases} J_1, k \in D_1 \cap D_2, \\ J_2, k \in D_2 \cap D_3, \\ J_3, k \in D_3 \cap D_4, \\ J_4, k \in D_4 \cap D_1, J_2 = J_3 J_4^{-1} J_1, \end{cases} \quad (45)$$

其中 $J_n, n=1, 2, 3, 4$ 定义如下

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} E & 0_{2 \times 2} \\ (\Sigma \tilde{s}_{12}(\bar{k}) \Omega) d(k)^{-1} e^{2i\theta} & E \end{pmatrix}, \\ J_3 &= \begin{pmatrix} E & \tilde{s}_{12}(k) (\Omega d(\bar{k}) \Omega^{-1})^{-1} e^{-2i\theta} \\ 0_{2 \times 2} & E \end{pmatrix}, \\ J_4 &= \begin{pmatrix} E - \tilde{s}_{12}(k) \tilde{s}_{22}(k)^{-1} (\Sigma \tilde{s}_{12}(\bar{k}) \Omega) (\Omega^{-1} \overline{\tilde{s}_{22}(\bar{k})} \Omega)^{-1} & -\tilde{s}_{12}(k) \tilde{s}_{22}(k)^{-1} e^{-2i\theta} \\ (\Sigma \tilde{s}_{12}(\bar{k}) \Omega) (\Omega^{-1} \overline{\tilde{s}_{22}(\bar{k})} \Omega)^{-1} e^{2i\theta} & E \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (46)$$

设 $Q(x, t)$ 是定义在区域 $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ 的方程(2)的解, 且具有足够的光滑性及当 $x \rightarrow \infty$ 时的衰减性, 那么该解可以通过由初值数据定义的 $Q_0(x) = Q(x, 0)$, Dirichlet 边界数据定义的 $G_0(t) = Q(0, t)$, Neumann 数据定义的 $G_1(t) = Q_x(0, t)$ 重建。

利用这些初始数据和边值数据, 通过(46)定义跳跃矩阵, 并通过(36)定义谱函数 $S(k)$ 和 $s(k)$, 那么方程的解可以由矩阵函数 $M(x, t, k)$ 表示为

$$Q(x, k) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} (k \tilde{M}(x, t, k))_{12}, \quad (47)$$

该解满足具有初边值的方程(2), 其中 $M(x, t, k)$ 满足如下 Riemann-Hilbert 问题:

- M 在 $k \in \mathbb{C} \setminus \{k \mid \operatorname{Im} k^2 = 0\}$ 上分段亚纯;
- 在 $\{k \mid \operatorname{Im} k^2 = 0\}$ 处, M 满足跳跃条件(46), 其跳跃矩阵由谱函数 $\tilde{s}_{12}$, $\tilde{s}_{22}$, $\tilde{S}_{12}$, $\tilde{S}_{22}$ 定义;
- 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$M(x, t, k) = I + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (48)$$

参考文献

- [1] Fokas, A.S. (2002) Integrable Nonlinear Evolution Equations on the Half-Line. *Communications in Mathematical Physics*, **230**, 1-39. <https://doi.org/10.1007/s00220-002-0681-8>
- [2] Lenells, J. (2012) Initial-Boundary Value Problems for Integrable Evolution Equations with 3×3 Lax Pairs. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **241**, 857-875. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.01.010>
- [3] Pitaevskii, L. and Stringari, S. (2016) Bose-Einstein Condensation and Superfluidity. Oxford University Press.
- [4] Lieb, E.H., Seiringer, R. and Yngvason, J. (2001) Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Energy Functional. In: Thirring, W., Ed., *The Stability of Matter: From Atoms to Stars*, Springer, 685-697. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04360-8_45
- [5] Erdős, L., Schlein, B. and Yau, H. (2007) Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation. *Physical Review Letters*, **98**, Article ID: 040404. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.98.040404>
- [6] Kevrekidis, P.G., Frantzeskakis, D.J. and Carretero-González, R. (2008) Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment. Springer.
- [7] Ablowitz, M.J., Prinari, B. and Trubatch, A.D. (2003) Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511546709>
- [8] Kevrekidis, P.G., Frantzeskakis, D.J. and Carretero-González, R. (2015) The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons to Vortices and Vortex Rings. SIAM.
- [9] Manakov, S.V. (1974) On the Theory of Two-Dimensional Stationary Self-Focusing of Electromagnetic Waves. *Soviet Physics-JETP*, **38**, 248-253.
- [10] Ho, T. (1998) Spinor Bose Condensates in Optical Traps. *Physical Review Letters*, **81**, 742-745. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.81.742>
- [11] Kawaguchi, Y. and Ueda, M. (2012) Spinor Bose-Einstein condensates. *Physics Reports*, **520**, 253-381. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.07.005>
- [12] Ieda, J., Miyakawa, T. and Wadati, M. (2004) Exact Analysis of Soliton Dynamics in Spinor Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, **93**, Article ID: 194102. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.93.194102>
- [13] Uchiyama, M., Ieda, J. and Wadati, M. (2006) Dark Solitons in $F = 1$ Spinor Bose-Einstein Condensate. *Journal of the Physical Society of Japan*, **75**, Article ID: 064002. <https://doi.org/10.1143/jpsj.75.064002>
- [14] De Monvel, A.B., Fokas, A.S. and Shepelsky, D. (2004) The mKdV Equation on the Half-Line. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, **3**, 139-164.