Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(6), 109-116
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.156195

嵌入型星形平面曲线的反向等周型不等式

贾艳丽[1]，**李雅如**[2*]，**高　翔**[1]

[1]中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
[2]中国海洋大学海德学院，山东 青岛

收稿日期：2025年3月31日；录用日期：2025年6月19日；发布日期：2025年6月27日

摘　要

本文研究了嵌入星形平面曲线的等周型不等式，建立了一组涉及曲线长度、曲线所围区域面积、曲率中心轨迹面积，以及曲线曲率半径与曲率中心轨迹的积分的参数不等式，并通过简单的傅里叶级数证明。利用这些等周型不等式，本文还推导出了一些新的Bonnesen型不等式。

关键词

等周不等式，曲率中心轨迹，稳定性，傅立叶级数，逆等周不等式

Reverse Isoperimetric-Type Inequality for Embedded Starshaped Plane Curves

Yanli Jia[1], **Yaru Li**[2*], **Xiang Gao**[1]

[1]College of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
[2]Hyder College, Ocean University of China, Qingdao Shandong

Received: Mar. 31st, 2025; accepted: Jun. 19th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

In this paper, we deal with the isoperimetric-type inequalities for the embedded starshaped plane curves. In fact, we establish a family of parametric inequalities involving the following geometric functionals associated with the given starshaped curves with a simple Fourier series proof: Length of the curve, areas of the region included by the curve and the locus of curvature centers, and integral of the curvature radius of the curve and the locus of curvature centers. Using our isoperimetric-type inequalities, we also derive some new Bonnesen-type inequalities.

*通讯作者。

文章引用: 贾艳丽, 李雅如, 高翔. 嵌入型星形平面曲线的反向等周型不等式[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 109-116.
DOI: 10.12677/pm.2025.156195

Keywords

Isoperimetric Inequality, Locus of Curvature Centers, Stability, Fourier Series, Reverse Isoperimetric Inequality

1. 介绍及主要成果

在本文中，我们介绍欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的等周不等式，其表述如下：

定理 1.1. (经典等周不等式)如果 γ 是一条长度为 L 的简单闭曲线，围成的区域面积为 A，那么：

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \tag{1.1}$$

当且仅当 γ 是圆时，等号成立。

这一著名事实为古希腊人所熟知，但直到 19 世纪才由 Edler [1]给出了完整的数学证明。自那以后，这一著名不等式的证明方法、加强形式、推广和应用不断涌现。

潘生亮等人[2]利用分析方法和曲率，得到了平面凸区域的反向不等式，如下所示：

定理 1.2. 如果 γ 是一条长度为 L 的简单闭曲线，围成的区域面积为 A，那么

$$L^2 \leq 4\pi\left(A + \left|\tilde{A}\right|\right) \tag{1.2}$$

其中 $\tilde{A}$ 是曲率中心轨迹所围区域的面积，当且仅当 γ 是圆时，等号成立。

高翔对这一结果进行了改进，如下所示[3]：

$$L^2 \leq 4\pi A + \pi\left|\tilde{A}\right| \tag{1.3}$$

方剑波将定理 1.2 的结果推广到星形区域，得到了以下结果[4]：

定理 1.3. 设 K 是一个周长为 $P(K)$、面积为 $a(K)$ 的星形域。用 $\tilde{a}(K)$ 表示 αK 的曲率中心轨迹所围的有向面积，则有：

$$p(K)^2 \leq 4\pi\left(a(K) + \tilde{a}(K)\right) \tag{1.4}$$

当且仅当 γ 是圆时，等号成立。

定理 1.4.(主要定理)设 γ 是一条长度为 L、围成面积为 A 的星形曲线，则有：

$$\int_\gamma k^2 \mathrm{d}s \geq \frac{\pi L}{A + \tilde{A}} \tag{1.5}$$

其中 k 是 γ 的曲率， $\tilde{A}$ 是曲率中心轨迹所围区域的面积。当且仅当 γ 是圆时，等号成立。

定理 1.5. 设 γ 是一条长度为 L、围成面积为 A 的星形曲线，若任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \omega, \xi$ 满足：

$$\begin{cases} \alpha, \lambda \geq 0 \\ \delta \leq 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \omega - \alpha \geq 0 \\ 2\beta + 2\lambda + 4\pi\delta + \xi - \alpha \geq 0 \\ 4\beta + 4\lambda + 8\pi\delta + \xi - 2\alpha + \omega \geq 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

则有：

$$\alpha\int_{\gamma}k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\geq 0 \tag{1.7}$$

其中，k 和 ρ 分别表示星形曲线 γ 的曲率和曲率半径，ρ_β 和 $\tilde{A}$ 分别表示曲率中心轨迹的曲率半径和所围面积。当且仅当 γ 是圆且参数满足：

$$\begin{cases}\alpha=0\\2\beta+4\pi\delta+\omega=0\end{cases} \tag{1.8}$$

注 1. 若取 $\alpha=\beta=\lambda$，$\delta=-1$，$\omega=\xi=4\pi$，则可得到定理 1.3 的结果。此外，若选择其他满足(1.6)的参数值，则可得到嵌入星形平面曲线的一些新的等周不等式，如下所示：

定理 1.6. 如果 γ 是一条长度为 L、围成区域面积为 A 的星形曲线，则有：

$$L^2\leq\int_{\gamma}k^2\mathrm{d}s+10\pi A+5\pi\tilde{A} \tag{1.9}$$

$$L^2\leq\pi\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2\mathrm{d}\theta+4\pi A+2\pi\tilde{A} \tag{1.10}$$

$$L^2\leq\frac{1}{\pi}\int_{\gamma}k^2\mathrm{d}s+3\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2\mathrm{d}\theta+\pi\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta \tag{1.11}$$

$$\pi\tilde{A}\leq 2\int_{\gamma}k^2\mathrm{d}s+\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2\mathrm{d}\theta \tag{1.12}$$

其中，k 和 ρ 分别表示星形曲线 γ 的曲率和曲率半径，ρ_β 和 $\tilde{A}$ 分别表示曲率中心轨迹的曲率半径和所围面积。当且仅当 γ 是圆时，等式(1.10)成立。

上述定理中，均表明当且仅当曲线为圆时等号成立，对于一般的星形曲线，当曲线形状越接近圆形时，不等式越接近等号。这意味着曲线的局部弯曲程度差异越小，即曲率的变化越平缓，各点的曲率半径越趋于一致。而曲率中心轨迹面积越大，说明曲线在弯曲过程中，其曲率中心的分布范围越广，曲线形状越偏离圆形，相应地，不等式两边的差距也会越大。

本文的结构如下：第 2 节回顾星形曲线的基本事实，引入一些几何量并用傅里叶级数表示。第 3 节首先证明等周不等式(1.5)，然后利用傅里叶级数给出定理 1.5 的一个更简单的证明。本研究在现有研究的基础上，进一步探讨了嵌入星形平面曲线的反向等周型不等式，并建立了一组涉及曲线长度、曲线所围区域面积、曲率中心轨迹面积，以及曲线曲率半径与曲率中心轨迹的积分的参数不等式。与方剑波的研究[4]相比，本研究不仅考虑了曲率中心轨迹的影响，还引入了曲率半径的积分，从而提供了一个更全面的不等式体系。此外，本研究还利用简单的傅里叶级数证明了这些不等式，为理解和应用这些不等式提供了新的视角。

2. 几何量和傅里叶级数

在本节中，首先介绍星形曲线的一些几何量。

假设 K 是一个关于原点的开星形域，并且其边界属于 $\mathbb{C}^2$ 类。在这种情况下，αK 被称为星形曲线[5]，记为 $\gamma(\theta)$。如果我们在 $\mathbb{R}^2$ 中引入极坐标 (r,θ)，那么 αK 可以用 θ 参数化如下：

$$\gamma\left(\theta\right)=\left(\gamma_1\left(\theta\right),\gamma_2\left(\theta\right)\right)=\left(r\left(\theta\right)\cos\theta,r\left(\theta\right)\sin\theta\right) \tag{2.1}$$

其中 $\theta\in\left[0,2\pi\right]$，$r\left(\theta\right)$ 表示 γ 的径向函数。那么可以计算出：

$$\begin{cases}\gamma'(\theta)=(r_\theta\cos\theta-r\sin\theta,r_\theta\sin\theta+r\cos\theta)\\ \gamma''(\theta)=(r_{\theta\theta}\cos\theta-2r_\theta\sin\theta-r\cos\theta,r_{\theta\theta}\sin\theta+2r_\theta\cos\theta-r\sin\theta)\end{cases} \tag{2.2}$$

其中，$r_\theta=\dfrac{\partial r}{\partial\theta}$，$r_{\theta\theta}=\dfrac{\partial^2 r}{\partial\theta^2}$。

如果用 L 和 A 分别表示 αK 的周长和围成的面积，那么可以计算出：

$$L=\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}|\gamma_\theta|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{2.3}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_\gamma \gamma_1\mathrm{d}\gamma_2-\gamma_2\mathrm{d}\gamma_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\mathrm{d}\theta \tag{2.4}$$

因此，$\gamma(\theta)$ 的曲率半径 $\rho(\theta)$ 和曲率 $k(\theta)$ 可以计算为：

$$k(\theta)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta^2}} \tag{2.5}$$

$$\rho(\theta)=\frac{1}{k(\theta)}=\sqrt{r^2+r_\theta^2} \tag{2.6}$$

接下来，我们考虑 $\gamma(\theta)$ 的曲率中心轨迹如下：

$$\beta(\theta)=\gamma(\theta)+\rho(\theta)\boldsymbol{N}(\theta)=\gamma(\theta)+\sqrt{r^2+r_\theta^2}\boldsymbol{N}(\theta)=(-r_\theta\sin\theta,r_\theta\cos\theta) \tag{2.7}$$

其中，$\boldsymbol{N}(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta^2}}(-r_\theta\sin\theta-r\cos\theta,r_\theta\cos\theta-r\sin\theta)$ 是沿 $\gamma(\theta)$ 的单位内法向量场。

然后，我们可以计算 $\beta(\theta)$ 所围的面积 $\tilde{A}$，星形曲线 $\tilde{\beta}(\theta)$ 的曲率中心轨迹的曲率 k_β 和曲率半径 ρ_β，如下所示：

$$\tilde{A}=\frac{1}{2}\int_\beta \beta_1\mathrm{d}\beta_2-\beta_2\mathrm{d}\beta_1=\int_0^{2\pi}r_\theta^2\mathrm{d}\theta \tag{2.8}$$

$$k_\beta(\theta)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{r_\theta^2+r_{\theta\theta}^2}} \tag{2.9}$$

$$\rho_\beta(\theta)=\frac{1}{k_\beta(\theta)}=\sqrt{r_\theta^2+r_{\theta\theta}^2} \tag{2.10}$$

由于给定的星形区域 K 的径向函数 $r(\theta)$ 总是连续、有界且以 2π 为周期的，它具有如下形式的傅里叶级数[6]：

$$r(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{2.11}$$

对式(2.1)关于 θ 求导，我们得到：

$$r'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}n(-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta) \tag{2.12}$$

$$r''(\theta)=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{2.13}$$

因此，由式(2.10)、(2.11)、(2.12)以及帕塞瓦尔等式，可以用 $r(\theta)$ 的傅里叶系数来表示这些几何量，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta=\pi a_0^2+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\\
&\tilde{A}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_\theta^2\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)\\
&\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)\\
&\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)\\
&L^2=\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta\right)^2\le 2\pi\int_0^{2\pi}\left(r^2+r_\theta^2\right)\mathrm{d}\theta=4\pi^2a_0^2+2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

3. 主要定理的证明

在本节中，本文开始证明定理 1.4。

证明. 根据赫尔德不等式，我们有

$$2\pi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{r^2+r_\theta^2}}\sqrt[4]{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta\le\sqrt{\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta}\sqrt{\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta^2}}\mathrm{d}\theta}$$

因此，我们得到

$$4\pi^2\le\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta^2}}\mathrm{d}\theta\right)=L\int_0^{2\pi}k\mathrm{d}\theta=L\int_\gamma k^2\mathrm{d}s$$

所以，结合不等式(1.4)，我们有

$$\left(A+\tilde{A}\right)\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\ge\frac{4\pi^2\left(A+\tilde{A}\right)}{L}\ge\frac{\pi L}{L^2}=\pi L$$

这意味着

$$\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\ge\frac{\pi L}{A+\tilde{A}}$$

此外，一方面，如果该不等式取等号，那么有 $L^2=4\pi\left(A+\tilde{A}\right)$，这是不等式(1.4)的取等条件，因此 γ 是一个圆。另一方面，如果曲线 γ 是一个圆，根据不等式(1.4)的取等条件，显然不等式(1.5)也取等号。

接下来，本文开始证明主要结果定理 1.5。

证明. 首先，由定理 1.4 的结果和均值不等式，我们有

$$\left(A+\tilde{A}\right)+\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\ge 2\sqrt{\left(A+\tilde{A}\right)\left(\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\right)}\ge 2\sqrt{\pi L}$$

因此，我们有

$$\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\ge 2\sqrt{\pi L}-A-\tilde{A}$$

所以，要证明不等式(1.7)，我们只需要证明在条件(1.6)下，将上述不等式代入公式(1.7)后得到的以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\\
&\geq\alpha\left(2\sqrt{\pi L}-A-\tilde{A}\right)+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\\
&\geq 2\alpha\sqrt{\pi L}+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+(\omega-\alpha)A+(\xi-\alpha)\tilde{A}\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

然后，利用$\gamma(\theta)$的傅里叶系数来表示几何量，我们有

$$\begin{aligned}
&2\alpha\sqrt{\pi L}+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+(\omega-\alpha)A+(\xi-\alpha)\tilde{A}\\
&=2\alpha\sqrt{\pi L}+\beta\left(2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)+\lambda\left(\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)\\
&\quad+\delta\left(4\pi^2a_0^2+2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)+(\omega-\alpha)\left(\pi a_0^2+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)\\
&\quad+(\xi-\alpha)\left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)\\
&=2\alpha\sqrt{\pi L}+(2\beta+4\pi\delta+\omega-\alpha)\pi a_0^2\\
&\quad+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\left(\beta\left(n^2+1\right)+\lambda n^2\left(n^2+1\right)+2\pi\delta\left(n^2+1\right)+\frac{\epsilon-\alpha}{2}n^2+(\omega-\alpha)\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

其中，我们有

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\,\mathrm{d}\theta\geq\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\theta=2\pi a_0$$

此外，我们有$a_0=\dfrac{L}{2\pi}\geq 0$这一事实。因此，由(1.6)可得

$$\begin{aligned}
&2\alpha\sqrt{\pi L}+(2\beta+4\pi\delta+\omega-\alpha)\pi a_0^2\\
&\geq 2\sqrt{2}\pi\sqrt{a_0}\alpha+(2\beta+4\pi\delta+\omega-\alpha)\pi a_0^2\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\left(\beta\left(n^2+1\right)+\lambda n^2\left(n^2+1\right)+2\pi\delta\left(n^2+1\right)+\frac{\xi-\alpha}{2}n^2+\frac{\omega-\alpha}{2}\right)\\
&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\left(\left(\beta+\lambda+2\pi\delta+\frac{\xi-\alpha}{2}\right)n^2+\lambda n^4+\beta+2\pi\delta+\frac{\omega-\alpha}{2}\right)\\
&\geq\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\left(2\beta+2\lambda+4\pi\delta+\frac{\xi-\alpha}{2}+\frac{\omega-\alpha}{2}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

这意味着

$$\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\geq 0$$

至此，我们证明了不等式(1.7)。

接下来，我们证明等式成立的条件。

证明. 如果星形曲线$\gamma(\theta)$是一个圆，假设圆的半径为p，那么其曲率中心的轨迹只是一个点，所以我们有$\tilde{A}=0$且$\rho_\beta=0$。因此

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\\
&=\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A\\
&=\alpha\int_\gamma \frac{1}{p^2}\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}p^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta(2\pi p)^2+\omega\left(\pi p^2\right)\\
&=\alpha 2\pi\frac{1}{p^2}+\beta 2\pi p^2+\delta 4\pi^2p^2+\omega\pi p^2\\
&=\alpha 2\pi\frac{1}{p^2}+(2\beta+4\pi\delta+\omega)\pi p^2
\end{aligned}$$

那么，对于满足

$$\begin{cases}\alpha=0\\ 2\beta+4\pi\delta+\omega=0\end{cases}$$

的参数α、β、λ、δ、ω、ξ，我们有

$$\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}=0$$

另一方面，如果(1.7)中的等式成立，那么

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_\gamma k^2\mathrm{d}s+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\\
&\ge\alpha\left(2\sqrt{\pi L}-A-\tilde{A}\right)+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+\omega A+\xi\tilde{A}\\
&\ge 2\alpha\sqrt{\pi L}+\beta\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\rho_\beta^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\delta L^2+(\omega-\alpha)A+(\xi-\alpha)\tilde{A}\\
&\ge 0
\end{aligned}$$

以及

$$L^2=\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\mathrm{d}\theta\right)^2\le 2\pi\int_0^{2\pi}\left(r^2+r_\theta^2\right)\mathrm{d}\theta$$

中的不等式都取等号，因此我们有

$$\int_\gamma k^2\mathrm{d}s=\frac{\pi L}{A+\tilde{A}}$$

并且

$$L^2=\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r_\theta^2}\mathrm{d}\theta\right)^2=2\pi\int_0^{2\pi}\left(r^2+r_\theta^2\right)\mathrm{d}\theta$$

所以星形曲线γ是一个圆。

然后，我们证明定理 1.7。

证明. 由(3.1)中的不等式以及第 2 节中的傅里叶级数表达式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma k^2 \mathrm{d}s + 10\pi A + 5\pi\tilde{A} - L^2 \\
&\geq 2\sqrt{\pi L} + (10\pi - 1)A + (5\pi - 1)\tilde{A} - L^2 \\
&= 2\sqrt{\pi L} + (10\pi - 1)\left(\pi a_0^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) + (5\pi - 1)\left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) \\
&-4\pi^2 a_0^2 - 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 + 1\right)\left(a_n^2 + b_n^2\right) \\
&= 2\sqrt{\pi L} + (6\pi - 1)\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi(10\pi - 1)}{2} + \frac{5\pi - 1}{2}\pi n^2 - 2\pi^2\left(n^2 + 1\right)\right)\left(a_n^2 + b_n^2\right) \\
&= 2\sqrt{\pi L} + (6\pi - 1)\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6\pi^2 - \pi}{2} + \frac{\pi - 1}{2}\pi n^2\right)\left(a_n^2 + b_n^2\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

然后，我们证明了(1.9)中的不等式。同样地，我们可以证明不等式(1.10~1.12)成立。

然后我们证明等式(1.10)成立的条件。一方面，如果星形曲线γ是一个圆，那么星形曲线的曲率中心轨迹是一个点。因此我们有$\rho_\beta = \tilde{A} = 0$。并且由定理 1.3 可知，当且仅当星形曲线是一个圆时，等式(1.10)成立。

参考文献

[1] Edler, F. (1882) Vervollstandigung der steiners chen elementar-geometrischen beweise fur densatz, dass der kreis grosseren acheninhalt besitzt als jede andere ebene gur gleich grossen umfanges. *Gott. N.*, 73-80.

[2] Pan, S.L. and Zhang, H. (2007) A Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, **48**, 303-308.

[3] Gao, X. (2010) A Note on the Reverse Isoperimetric Inequality. *Results in Mathematics*, **59**, 83-90. https://doi.org/10.1007/s00025-010-0056-y

[4] Fang, J. (2017) A Reverse Isoperimetric Inequality for Embedded Starshaped Plane Curves. *Archiv der Mathematik*, **108**, 621-624. https://doi.org/10.1007/s00013-017-1048-x

[5] Do Carmo, M. (1976) Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall.

[6] Kreyszig, E. (1991) Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley.