

等周型不等式及其稳定性

李雅如¹, 贾艳丽², 高翔²

¹中国海洋大学海德学院, 山东 青岛

²中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛

收稿日期: 2025年3月31日; 录用日期: 2025年5月15日; 发布日期: 2025年5月31日

摘要

本文建立了一个新的几何量——沿外法线向量的曲率轨迹, 探讨了其几何意义及其与曲率中心轨迹的关系。并利用新的几何量建立了一组参数不等式:

$$\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \geq 0$$

同时, 本文还通过所建立的等周不等式推导出了一些新的几何Bonnesen型不等式, 并研究了这些不等式的稳定性。

关键词

等周不等式, 曲率中心轨迹, 稳定性, Bonnesen型不等式

The Isoperimetric Type Inequality and Its Stability

Yaru Li¹, Yanli Jia², Xiang Gao²

¹Hyder College, Ocean University of China, Qingdao Shandong

²School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong

Received: Mar. 31st, 2025; accepted: May 15th, 2025; published: May 31st, 2025

Abstract

In this paper, we establish a new geometric quantity-locus of curvature along outer normal vector. Its geometric meaning and its relationship with the curvature center locus are discussed. And, we

use the new geometric quantity to establish a family of parametric inequalities:

$$\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \geq 0$$

And we also use our isoperimetric inequalities to derive some new geometric Bonnesen-type in equalities. Furthermore, we investigate the stability property of such inequalities.

Keywords

Isoperimetric Inequality, Locus of Curvature Centers, Stability, Bonnesen-Type Inequalities

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍及主要结果

在本文中，我们介绍欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的等周不等式，其表述为：

定理 1. (经典等周不等式) 若 γ 是一条长度为 L 的简单闭曲线，它所围成区域的面积为 A ，那么：

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (1)$$

当且仅当 γ 是一个圆时，等号成立。

这一著名事实为古希腊人所熟知，但直到 19 世纪才给出了完整的数学证明。自那以后，这一著名不等式的证明方法、加强形式、推广和应用不断涌现。

1933 年，得到了一个著名的反向博内森型不等式：

定理 2. 对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的凸区域 D ，若 D 的边界 ∂D 是一条长度为 L 的卵形曲线，它所围成区域的面积为 A ，那么：

$$L^2 - 4\pi A \leq \pi^2 (\rho_M - \rho_m)^2 \quad (2)$$

其中 ρ_M 和 ρ_m 分别是 ∂D 的连续曲率半径 ρ 的最大值和最小值。当且仅当 $\rho_M = \rho_m$ ，即 ∂D 是一个圆时，等号成立。

1955 年，Pleijel 对反向博内森型不等式 结果进行了如下改进[1]：

$$L^2 - 4\pi A \leq \pi(4 - \pi)(\rho_M - \rho_m)^2 \quad (3)$$

当且仅当 ∂D 是一个圆时，等号成立。

潘生亮等人[2]利用分析方法和曲率，得到了平面凸区域的反向不等式，如下所示：

定理 3. 若 γ 是一条长度为 L 的简单闭曲线，它所围成区域的面积为 A ，那么：

$$L^2 \leq 4\pi(A + |\tilde{A}|) \quad (4)$$

其中 $\tilde{A}$ 是曲率中心轨迹所围成区域的面积，当且仅当 γ 是一个圆时，等号成立。

高翔对该结果进行了如下改进[3]：

$$L^2 \leq 4\pi A + \pi |\tilde{A}| \quad (5)$$

当且仅当 γ 是一个圆时, 等号成立。

定理 4. [4] 设 γ 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中一条 ℓ^2 闭且严格凸的曲线, 长度为 L , 所围成面积为 A , 那么:

$$\int_{\gamma} \kappa^2 ds \geq \frac{4\pi L}{4|A| + |\tilde{A}|} \quad (6)$$

其中 κ 是 γ 的曲率, $\tilde{A}$ 是曲率中心轨迹所围成区域的面积, 当且仅当 γ 是一个圆时, (6) 式中等号成立。

注 1. 显然, 如果 γ 是一个圆, 那么它的曲率中心轨迹只是一个点, 因此其面积 $|\tilde{A}| = 0$ 。反之, 如果 $|\tilde{A}| = 0$, 那么 $L^2 = 4\pi A$, 所以 γ 是一个圆。

本文首先证明一个新的几何量如下:

若 γ 是平面中的一条简单闭曲线, $P(\theta)$ 是闵可夫斯基支撑函数, 那么 γ 可以用 $P(\theta)$ 参数化表示为:

$$\gamma(\theta) = (P(\theta)\cos\theta - P'(\theta)\sin\theta, P(\theta)\sin\theta + P'(\theta)\cos\theta)$$

我们考虑由下式参数化的轨迹:

$$\hat{\beta}(\theta) = \gamma(\theta) + \frac{ds}{d\theta} \hat{N}(\theta) = (P(\theta)\cos\theta - P'(\theta)\sin\theta, P(\theta)\sin\theta + P'(\theta)\cos\theta)$$

其中 $\hat{N}(\theta) = \frac{1}{P(\theta) + P''(\theta)}$ 是沿 γ 的外法向量场。

曲率轨迹是曲率中心轨迹的加权形式, 权重为法向量方向。曲率轨迹的分布反映了曲线的凸性和对称性: 若 γ 为圆, 曲率轨迹退化为圆心; 若 γ 为一般凸曲线, 曲率轨迹反映了曲线的局部弯曲程度如何随法向变化; 若 γ 对称, 曲率轨迹会呈现对称分布; 若 γ 不对称, 曲率轨迹会表现出非均匀性。

然后, 我们可以计算出长度 $\hat{L}$ 、封闭面积 $\hat{A}$ 、曲率 $k_{\hat{\beta}}(\theta)$ 和曲率半径 $\rho_{\hat{\beta}}(\theta)$ 如下:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} (1 + P + P'') d\theta \\ \hat{A} &= \frac{1}{2} \int_{\hat{\beta}} \hat{\beta}_1 d\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2 d\hat{\beta}_1 = \int_0^{2\pi} (1 + P + P'') d\theta \\ \kappa(\hat{\beta}) &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{1 + P + P''} \\ \rho_{\hat{\beta}}(\theta) &= 1 + P + P'' \end{aligned}$$

之后, 我们利用这个新几何量以及以下量: 曲线的长度、曲线和曲率中心轨迹所围成的封闭面积、曲线和曲率中心轨迹的曲率半径积分, 以及连续曲率半径的最大值与最小值之差的积分, 得到了一族等周不等式:

定理 5. (主要定理) 设 γ 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中一条闭且严格凸的曲线, 长度为 L , 所围成面积为 A 。设 $\hat{A}$ 表示由轨迹 $\hat{\beta}$ 所围成区域的面积, $\rho_{\hat{\beta}}$ 是轨迹 $\hat{\beta}$ 的曲率半径。那么对于任意满足

$$\begin{cases} \alpha, \lambda \geq 0 \\ \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0 \\ 2\beta + 4\delta + \sigma - \alpha + \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0 \\ 8\beta + 4\omega + 8\nu - 8\lambda - \alpha \geq 0 \\ 6\beta + 4\omega + 6\nu + 24\lambda + \frac{4\xi}{4-\pi} - \sigma - \mu \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

的常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 有:

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ &+ \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中 κ 是曲线 γ 的曲率, ρ 和 ρ_β 分别是曲线 γ 和曲率中心轨迹的曲率半径, ρ_M 和 ρ_m 分别是 ∂D 的连续曲率半径 ρ 的最大值和最小值, $\tilde{A}$ 是曲率中心轨迹所围成区域的面积。当且仅当 γ 是一个圆, 且任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 满足

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases} \quad (9)$$

时, (8)式中等号成立。

注 2.

1) 当 $\alpha = \beta = \lambda = \omega = \mu = \nu = \zeta = \xi = 0$, $\delta = -1$, $\sigma = 4\pi$ 以及 $\delta = -1$, $\sigma = 4\pi$, $\omega = \pi$, $\alpha = \beta = \lambda = \omega = \mu = \nu = \zeta = \xi = 0$ 时, (7)式显然满足, 并且等周不等式(8)分别变为(4)式和(5)式。

2) 如果我们令 $\alpha = \beta = \lambda = \omega = \mu = \nu = \xi = 0$, $\delta = -1$, $\sigma = \zeta = 4\pi$ 以及 $\delta = -1$, $\sigma = 4\pi$, $\zeta = \pi(4 - \pi)$, $\alpha = \beta = \lambda = \omega = \mu = \nu = \xi = 0$, 那么(7)式显然满足, 并且等周不等式(8)分别变为(2)式和(3)式。

3) 如果我们选取满足(7)式的参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 的其他值, 那么我们可以得到一些新的几何等周不等式。

定理 6. 若 γ 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中一条闭且严格凸的曲线, 长度为 L , 所围成面积为 A 。设 $|\hat{A}|$ 表示由轨迹 $\hat{\beta}$ 所围成区域的面积, 那么我们有:

$$\hat{L}^2 \leq 3\pi|\hat{A}| + \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta \quad (10)$$

$$L^2 \leq 4\pi A + \pi|\hat{A}| + \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta \quad (11)$$

$$L^2 \leq 4\pi A + \pi|\hat{A}| + \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta - \frac{(4-\pi)^2}{4} (\rho_M - \rho_m)^2 \quad (12)$$

$$L^2 \leq \int_\gamma \kappa^2 ds + 2 \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta \quad (13)$$

其中 ρ 和 ρ_β 分别是曲线 γ 和曲率中心轨迹的曲率半径, ρ_β 是轨迹 $\hat{\beta}$ 的曲率半径, ρ_M 和 ρ_m 分别是 ∂D 的连续曲率半径 ρ 的最大值和最小值。当且仅当 γ 是一个圆时, (10)~(13)式中等号成立。

与等周不等式相关的稳定性问题也很有趣且具有重要意义。一个著名且最常用的例子是施泰纳圆盘 $S(K)$ (关于 $S(K)$ 的定义见第 4 节)。

潘世龙和许海平[5]通过比较凸体 K 与其施泰纳圆盘 $S(K)$, 得到了反向等周不等式(4)的如下稳定性估计:

$$\begin{aligned} h_1(K, S(K))^2 &= \left(\max_u |P_K(u) - P_M(u)| \right)^2 \\ &\leq \frac{4\pi^2 - 33}{96\pi^2} \left(4\pi(A(K) + \tilde{A}(K)) - L^2(K) \right) \\ h_2(K, S(K))^2 &= \left(\int_0^{2\pi} |P_K(\theta) - P_{S(K)}(\theta)|^2 d\theta \right) \\ &\leq \frac{1}{18\pi} \left(4\pi(A(K) + \tilde{A}(K)) - L^2(K) \right) \end{aligned}$$

其中 $P_K(\theta)$ 表示给定区域 K 的闵可夫斯基支撑函数, $S(K)$ 表示与 K 相关的施泰纳圆盘, 满足

$$4\pi(A(S(K)) + |\tilde{A}(S(K))|) - L^2(S(K)) = 0$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\varphi(K) = 4\pi(A(K) + |\tilde{A}(K)|) - L^2(K) < \varepsilon$$

由上述不等式的稳定性估计可得

$$\max\{h_1(K, S(K)), h_2(K, S(K))\}^2 \leq C|\varphi(K) - \varphi(S(K))| \leq C\varepsilon$$

这意味着反向等周不等式(4)在豪斯多夫距离和 L^2 度量下都具有良好的稳定性。

在本文中, 我们还将研究等周不等式(8)在豪斯多夫距离和 L^2 度量下的稳定性。本文结构如下。在第 2 节中, 我们回顾一些关于平面凸几何的基本事实。在第 3 节中, 我们利用傅里叶级数给出定理 5 的一个更简单的证明, 这与[2] [6]中的方法不同。在第 4 节中, 我们研究不等式(8)的稳定性(接近等式意味着曲线接近圆形)。我们相信我们的方法可用于推导更多有趣的等周不等式。

2. 几何量及其傅里叶级数

在本节中, 我们回顾一些关于凸平面曲线的基本事实, 这些事实将在后面用到。本文假设 γ 是一条封闭且凸的平面曲线, 它具有足够的正则性, 实际上它应该是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一条 ℓ_+^2 封闭且严格凸的曲线, 因此这些几何量可以用傅里叶级数展开, 如下[7]:

设 $P(\theta)$ 是曲线 $\gamma(\theta)$ 的闵可夫斯基支撑函数, 其中 θ 是 x 轴与对应点 P 处的外法向量之间的夹角。它给出了 $\gamma(\theta)$ 关于 θ 的参数化表示:

$$\gamma(\theta) = (\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta)) = (P(\theta)\cos\theta - P'(\theta)\sin\theta, P(\theta)\sin\theta + P'(\theta)\cos\theta)$$

因此, $\gamma(\theta)$ 的长度 L 、围成的面积 A 、曲率 $k(\theta)$ 和曲率半径 $\rho(\theta)$ 可以通过以下公式计算:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} P(\theta) ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (P(\theta)^2 - P'(\theta)^2) d\theta \\ k(\theta) &= \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{P(\theta) + P''(\theta)} \\ \rho(\theta) &= \frac{ds}{d\theta} = P(\theta) + P''(\theta) \end{aligned}$$

同时, 我们可以得到 $\gamma(\theta)$ 的曲率中心轨迹如下:

$$\beta(\theta) = \gamma(\theta) + \rho(\theta)N(\theta) = (-P'(\theta)\sin\theta - P''(\theta)\cos\theta, P'(\theta)\cos\theta - P''(\theta)\sin\theta)$$

因此, 曲率中心轨迹 $\beta(\theta)$ 的曲率 $k_{\beta}(\theta)$ 和曲率半径 $\rho_{\beta}(\theta)$ 可以通过以下公式计算:

$$\begin{aligned} k_{\beta}(\theta) &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{P'(\theta) + P'''(\theta)} \\ \rho_{\beta}(\theta) &= \frac{ds}{d\theta} = P'(\theta) + P'''(\theta) \end{aligned}$$

此外, 由 $\beta(\theta)$ 围成的有向区域面积为:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (P'(\theta)^2 - P''(\theta)^2) d\theta$$

由于给定区域 K 的闵可夫斯基支撑函数总是连续、有界且 2π 周期的, 它具有如下形式的傅里叶级数:

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (14)$$

对(2.1)关于 θ 求导, 可以得到:

$$P'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) \quad (15)$$

$$P''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (16)$$

$$P'''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^3(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) \quad (17)$$

因此, 通过(14)、(15)、(16)、(17)以及帕塞瓦尔等式, 我们可以用 $P(\theta)$ 的傅里叶系数来表示这些几何量, 如下:

$$L = 2\pi a_0$$

$$A = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (P(\theta) + P''(\theta))^2 d\theta = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

$$|\tilde{A}| = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \rho_{\beta}(\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (P'(\theta) + P'''(\theta))^2 d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\hat{L} = 2\pi a_0 + 2\pi$$

$$|\hat{A}| = \pi \left(a_0^2 + 2a_0 + 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}(\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (P'(\theta) + P''(\theta) + 1)^2 d\theta = 2\pi \left(1 + a_0^2 + 2a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

3. 证明与主要定理

在本节中, 由(6)式与(3)式可以推出:

$$\left(A + \frac{1}{4} |\tilde{A}| \right) + \int_{\gamma} \kappa^2 ds \geq \sqrt{\left(A + \frac{1}{4} |\tilde{A}| \right) \int_{\gamma} \kappa^2 ds} \geq 2\sqrt{\pi L}$$

$$(\rho_M - \rho_m)^2 \leq \frac{L^2 - 4\pi A}{\pi(4 - \pi)}$$

现在我们开始证明主要结果定理 5, 而要证明定理 6, 我们只需证明在条件(5)下以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\int_{\gamma} \kappa^2 ds + A + \frac{1}{4} |\tilde{A}| \right) + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ & + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \\ & \geq \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4 - \pi)} \right) L^2 \\ & + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4 - \pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4} \alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

然后, 利用第 2 节中用 $P(\theta)$ 的傅里叶系数表示的几何量表达式, 我们有:

$$\begin{aligned}
& 2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\
& + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \\
& = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + \beta \left(2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2) \right) + \lambda \left(\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2) \right) \\
& + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) (4\pi^2 a_0^2) + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) \left(\pi a_0^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \right) \\
& + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \right) + \mu \pi \left(a_0^2 + 1 + 2a_0 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \right) \\
& + \nu 2\pi \left(a_0^2 + 1 + 2a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2) \right) + \xi (4\pi^2 (a_0 + 1)^2) \\
& = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)\pi + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)2\pi a_0 \\
& + \left(2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \frac{4\zeta}{4-\pi} + \sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} + \mu + 4\xi\pi \right) \pi a_0^2 \\
& + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left((n^2 - 1) \left((2n^2 - 1)\beta + 2\lambda n^2 (n^2 - 1) - \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) n^2 - \mu + 2\nu (n^2 - 1) \right) (a_n^2 + b_n^2) \right) \\
& = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) + (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \\
& + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left((n^2 - 1) \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (a_n^2 + b_n^2) \right)
\end{aligned}$$

其中我们利用了 $a_0 = \frac{L}{2\pi} \geq 0$ 这一事实。因此，由(7)式可得：

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} \geq 0 \\ (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) \geq 0 \\ (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \geq 0 \end{cases}$$

并且：

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \\
& \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(6\beta + 4\omega + 6\nu + 24\lambda + \frac{4\zeta}{4-\pi} - \sigma - \mu \right) 3(a_n^2 + b_n^2) \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

这意味着：

$$\begin{aligned}
& 2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\
& + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

然后我们完成了不等式(8)的证明。

此外, 如果 $\gamma(\theta)$ 是一个圆, 那么轨迹 $\beta(\theta)$ 和 $\hat{\beta}(\theta)$ 都只是一个点, 因此它们的面积 $\tilde{A} = \hat{A} = \hat{L} = 0$, 曲率中心轨迹的曲率半径 $\rho_{\hat{\beta}}(\theta) = \rho_{\beta}(\theta) = 0$, 并且我们有 $\rho_M = \rho_m = 0$, 结合(4)中的等式条件, 我们有:

$$L^2 = 4\pi(A + |\tilde{A}|) = 4\pi A$$

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta = 2A$$

因此

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ & + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \\ & = \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + 2\beta A + 4\pi\delta A + \sigma A \end{aligned}$$

那么对于满足

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases}$$

的参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 有:

$$\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 = 0$$

另一方面, 如果(8)中的等式成立, 那么在

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\int_{\gamma} \kappa^2 ds + A + \frac{1}{4} |\tilde{A}| \right) + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ & + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \\ & \geq 2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\ & + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \end{aligned}$$

中的这些不等式都取等号, 特别地, 有:

$$\int_{\gamma} \kappa^2 ds = \frac{4\pi L}{4|A| + |\tilde{A}|}$$

根据定理 1.4 的条件, 我们可知 γ 是一个圆。然后我们完成了定理 1.6 的证明。

证明. 一方面, 如果我们令参数 $\alpha = \beta = \lambda = \delta = \sigma = \omega = \zeta = 0, \nu = \frac{2}{\pi}, \mu = 3\pi, \xi = -1$, 我们有:

$$\begin{aligned} & 3|\hat{A}| + \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \rho_{\hat{\beta}}^2(\theta) d\theta - \hat{L}^2 \\ & = 3\pi^2 \left(a_0^2 + 2a_0 + 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \right) \\ & + \frac{\pi}{2} \left(2\pi \left(1 + a_0^2 + 2a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2) \right) - (2\pi a_0 + 2\pi)^2 \right) \\ & \geq \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 4)(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

因此, 我们证明了不等式(10)。同样地, 我们也可以用相同的方法证明不等式(11)~(13)。

另一方面, 我们可以证明, 如果(10)~(13)中的等式成立, 那么利用(8)中的等式条件, 可知 γ 是一个圆。

4. 等周不等式的稳定性性质

设 K 和 M 为两个凸区域, 它们各自的闵可夫斯基支撑函数分别为 P_K 和 P_M 。衡量 K 和 M 之间差异最常用的函数是豪斯多夫距离:

$$h_1(K, M) = \max_u |P_K(u) - P_M(u)|$$

另一种在稳定性问题中具有特殊价值的度量是与函数空间中的 L^2 度量相对应的度量, 其定义为:

$$h_2(K, M) = \left(\int_0^{2\pi} |P_K(\theta) - P_M(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

其中, θ 是 x 轴与对应点 P 处的外法向量之间的夹角。显然, 当且仅当 $K=M$ 时, $h_1(K, M)=0$ 或 $h_2(K, M)=0$ 。著名且最常用的斯坦纳圆盘 $S(K)$ 的定义如下:

定理 7. [4]区域 K 的斯坦纳圆盘, 记为 $S(K)$, 是半径为 $\frac{L(K)}{2\pi}$, 圆心位于斯坦纳点 $s(K)$ 的圆盘。斯坦纳点 $s(K)$ 可以通过闵可夫斯基支撑函数 $P_K(\theta)$ 定义为:

$$s(K) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) P_K(\theta) d\theta \quad (19)$$

其中, $u(\theta)$ 是对应点 P 处的单位切向量, $L(K)$ 表示区域 K 的周长。

我们现在考虑不等式(7)关于豪斯多夫距离 h_1 和 h_2 度量的稳定性性质。

定理 8. 设 K 是由 ℓ_+^2 闭且严格凸的平面曲线 γ 所围成的区域, 其面积为 $A(K)$, 周长为 $L(K)$ 。设 $\tilde{A}(K)$ 表示由 γ 的曲率中心轨迹所围成区域的有向面积, $\hat{A}$ 表示由轨迹 $\hat{\beta}$ 所围成区域的面积, $S(K)$ 表示与 K 相关的斯坦纳圆盘。那么, 对于满足

$$\begin{cases} \alpha, \lambda \geq 0 \\ \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0 \\ 2\beta + 4\delta + \sigma - \alpha + \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0 \\ 8\beta + 4\omega + 8\nu - 8\lambda - \alpha \geq 0 \\ 6\beta + 4\omega + 6\nu + 24\lambda + \frac{4\zeta}{4-\pi} - \sigma - \mu \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

的参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 有:

$$\begin{aligned} h_1(K, S(K))^2 \leq & C(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi) \left(\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta \right. \\ & \left. + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

其中, κ 是 γ 的曲率, ρ 和 ρ_{β} 分别表示曲线 γ 和曲率中心轨迹的曲率半径, $\rho_{\hat{\beta}}$ 表示曲线 $\hat{\beta}$ 的曲率半径,

$$\begin{aligned} & C(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi) \\ &= \left\{ 1, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1)} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

并且(21)式中的等号成立当且仅当 γ 是一个圆, 且任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 满足:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases} \quad (23)$$

证明. 可以假设 $\mathbf{s}(K) = 0$ 。由(2.1)式可知, 支撑函数 P_K 和 $P_{S(K)}$ 具有以下傅里叶级数:

$$P_K(\theta) = \frac{L(K)}{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (24)$$

$$P_{S(K)}(\theta) = \frac{L(K)}{2\pi} \quad (25)$$

可以观察到, (24)式和(25)式给出了关于下列量(用傅里叶系数表示)的显式表达式:

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ & + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \\ & \geq 2\alpha \sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\ & + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \\ & = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) + (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (26)$$

因为很容易看出:

$$|a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

所以有:

$$\begin{aligned} |P_K(\theta) - P_{S(K)}(\theta)| &= \left| \frac{L(K)}{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) - \frac{L(K)}{2\pi} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned}$$

利用赫尔德不等式, 结合(26)式, 我们有:

$$\begin{aligned} h_1(K, S(K))^2 &\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right)^2 \\ &\leq 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) + (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1)} \\ &\times \left(\frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1) (a_n^2 + b_n^2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max \left\{ 1, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1)} \right\} \\
&\quad \times \left(2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\zeta}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\zeta}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \right) \\
&\leq C(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi) \left(\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta \right. \\
&\quad \left. + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \right)
\end{aligned}$$

对于满足(20)的任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 都成立。

此外, 如果 γ 是一个圆, 如定理 5 的证明中所示, 我们有:

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| \\
&\quad + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \\
&= \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + 2\beta A + 4\pi \delta A + \sigma A
\end{aligned}$$

那么, 对于满足

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases}$$

的参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 有:

$$\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 = 0$$

显然, $h_1(K, S(K)) = 0$, 因此(19)式中的等式成立。

定理 9. 在与定理 8 相同的假设下, 对于满足:

$$\begin{cases} \alpha, \lambda \geq 0, \\ \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0, \\ 2\beta + 4\delta + \sigma - \alpha + \mu + 2\nu + 4\xi\pi \geq 0, \\ 8\beta + 4\omega + 8\nu - 8\lambda - \alpha \geq 0, \\ 18\beta + 12\omega + 18\nu + 72\lambda + \frac{12\xi}{4-\pi} - 3\sigma - 3\mu - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

的任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 有:

$$\begin{aligned}
h_2(K, S(K))^2 &\leq \alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\
&\quad + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2
\end{aligned} \quad (28)$$

并且(28)式中的等号成立当且仅当 γ 是一个圆, 且任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 满足:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases} \quad (29)$$

此外, 如果(28)式中的等式成立, 且参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta$ 满足(27), 那么 γ 是一个圆.
证明. 与定理 8 的证明类似, 我们利用帕塞瓦尔等式、(24)式和(25)式推导出:

$$h_2(K, S(K))^2 = \left(\int_0^{2\pi} |P_K(\theta) - P_M(\theta)|^2 d\theta \right) = \pi \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

结合(26)式可得:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\xi}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\ & + \left(\sigma - \alpha - \frac{\xi}{\pi(4-\pi)} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 - h_2(K, M)^2 \\ & = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) + (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{\delta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) - \pi \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ & = 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} + (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) + (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{\delta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1) - 1 \right) (a_n^2 + b_n^2) \\ & - \pi \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

因此, 对于满足(27)的任意常数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$, 以及满足(27)的 γ , 有:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{a_0} \geq 0 \\ (\mu + 2\nu + 4\xi\pi)(\pi + 2\pi a_0) \geq 0 \\ (2\pi\beta + 4\pi^2\delta + \sigma - \alpha + \mu + 4\xi\pi)\pi a_0^2 \geq 0 \end{cases}$$

并且

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{\delta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) \right. \\ & \times (n^2 - 1) - 1 \Big) (a_n^2 + b_n^2) - \pi \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ & \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(18\beta + 12\omega + 18\nu + 72\lambda + \frac{12\zeta}{4-\pi} - 3\sigma - 3\mu - 1 \right) (a_n^2 + b_n^2) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

意味着:

$$\begin{aligned} h_2(K, S(K))^2 & \leq 2\alpha\sqrt{\pi L} + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \left(\delta + \frac{\xi}{\pi(4-\pi)} \right) L^2 \\ & + \left(\sigma - \alpha - \frac{4\xi}{4-\pi} \right) A + \left(\omega - \frac{1}{4}\alpha \right) |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \xi \hat{L}^2 \\ & \leq \alpha \int_\gamma \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \delta L^2 + \sigma A \\ & + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_\beta^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \end{aligned}$$

而且, 如果 γ 是一个圆, 并且参数 $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi$ 满足

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + 4\pi\delta + \sigma = 0 \end{cases} \quad (30)$$

正如在定理 8 的证明中那样, (28) 式中的等式成立。反之, 如果 (28) 式中的等式成立且参数满足 (27), 那么正如在定理 5 的证明中那样, γ 是一个圆。这样就完成了定理 19 的证明。

注 3. 定理 8 和定理 9 的结合可以推出:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ h_1(K, S(K))^2, h_2(K, S(K))^2 \right\} \\ & \leq C(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi) \times \left(\alpha \int_{\gamma} \kappa^2 ds + \beta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta \right. \\ & \quad \left. + \delta L^2 + \sigma A + \omega |\tilde{A}| + \mu |\hat{A}| + \nu \int_0^{2\pi} \rho_{\beta}^2(\theta) d\theta + \zeta (\rho_M - \rho_m)^2 + \xi \hat{L}^2 \right) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} & C(\alpha, \beta, \lambda, \sigma, \omega, \mu, \nu, \zeta, \xi) \\ & = \left\{ 1, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(n^2 \left(2\beta + \omega + 2\nu - 2\lambda - \frac{1}{4}\alpha \right) + 2\lambda n^4 + \alpha + \frac{4\zeta}{4-\pi} - 2\beta - \sigma - \mu - 2\nu \right) (n^2 - 1)} \right\} \end{aligned}$$

说明等周不等式(8)在豪斯多夫距离和 L^2 度量下都具有良好的稳定性。

参考文献

- [1] Pleijel, A. (1995) On konvexa kurvor. *Nordisk Matematisk Tidskrift*, **3**, 57-64.
- [2] Pan, S.L. and Zhang, H. (2007) A Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, **3**, 303-308.
- [3] Gao, X. (2010) A Note on the Reverse Isoperimetric Inequality. *Results in Mathematics*, **59**, 83-90. <https://doi.org/10.1007/s00025-010-0056-y>
- [4] Li, C.J. and Gao, X. (2015) The Isoperimetric Inequality and Its Stability. *Journal of Mathematical Inequalities*, **3**, 897-912
- [5] Pan, S. and Xu, H. (2009) Stability of a Reverse Isoperimetric Inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **350**, 348-353. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.09.047>
- [6] Pan, S. and Yang, J. (2008) On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves. *Manuscripta Mathematica*, **127**, 469-484. <https://doi.org/10.1007/s00229-008-0211-x>
- [7] Groemer, H. (1996) Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511530005>