

调和Bergman空间上斜Toeplitz算子的 衍生算子

查力华, 宋玉靖

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年4月1日; 录用日期: 2025年4月30日; 发布日期: 2025年5月19日

摘 要

本文给出调和Bergman空间上的斜Toeplitz算子及其衍生算子的概念, 并介绍了衍生算子的积分表示、有界性和紧性。此有界性和紧性为后续研究斜Toeplitz算子的有界性和紧性提供了研究方法。

关键词

调和Bergman空间, 斜Toeplitz算子, 有界性, 紧性

Derivative Operators of Slant Toeplitz Operators on Harmonic Bergman Spaces

Lihua Zha, Yujing Song

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 1st, 2025; accepted: Apr. 30th, 2025; published: May 19th, 2025

Abstract

In this paper, the concepts of slant Toeplitz operators and its derivative operators on harmonic Bergman Spaces are given, and the integral representation, boundness and compactness of the derivative operators are introduced. The boundedness and compactness provide a method for the subsequent studies of boundedness and compactness of slant Toeplitz operators.

Keywords

Harmonic Bergman Space, Slant Toeplitz Operators, Boundedness, Compactness



1. 引言

1911 年, Toeplitz [1] 引入了以有界可测函数 ϕ 为符号的 Toeplitz 算子 T_ϕ 的概念, 并应用于小波分析和微分方程等邻域。后来对 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子进行了广泛的研究, 特别是像 Brown, Halmos [2] 和 Douglas [3] 这样的作者, 他们对这些算子做了深入的研究。1966 年, Mark [4] 引进了 Hardy 空间 H^2 上以 ϕ 为符号的斜 Toeplitz 算子的概念, 介绍了该类算子的背景, 讨论了该类算子的谱, C^* 代数等若干基本性质。在文 [5] 中, 对斜 Toeplitz 算子进行了更深入的研究。2004 年, 安恒斌和塞人宜 [6] 将斜 Toeplitz 算子推广到了 Bergman 空间并给出了有限个斜 Toeplitz 算子的乘积 S 是紧算子的充要条件是其 Berezin 变换 $\tilde{S}(z)$ 趋向于 0 ($|z| \rightarrow 1$)。2017 年, Singh 和 Gupta [7] 将斜 Toeplitz 算子推广到了 k 阶斜 Toeplitz 算子并给出以余解析函数和调和函数为符号的 k 阶斜 Toeplitz 算子在 Fock 空间上的交换性。此外人们还尝试着将斜 Toeplitz 算子的概念推广到高维空间上, 甚至一些模空间上, 并得到了一些结论 ([8] [9])。在引入斜 Toeplitz 算子后, 由于这类算子在小波分析等中发挥了重要作用, 该研究变得非常重要 ([10] [11])。2002 年, Stroethoff 和 Zheng [12] 证明了 Bergman 空间的正交补空间上的对偶 Toeplitz 算子是紧的当且仅当其符号函数在圆盘上几乎处处为零。2021 年, Yang 和 Xian [13] 证明了调和 Bergman 空间的正交补空间上的对偶 Toeplitz 算子是有界算子当且仅当其符号函数是几乎处处有界的, 以及有界函数为符号的对偶 Toeplitz 算子是紧的当且仅当其符号函数在圆盘上几乎处处为 0。

本文引入调和 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子及其衍生算子的概念, 并给出斜 H 算子的积分表示。此外, 还得到了斜 L 算子是有界线性算子当且仅当其符号函数是开单位圆盘上的本质有界可测函数, 以及斜 L 算子是紧算子的充分必要条件是符号函数在开单位圆盘上几乎处处为零。

2. 预备知识

$\mathbb{D}$ 表示复平面上的开单位圆盘, dA 表示复平面上的标准化面积测度。 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 是 $\mathbb{D}$ 上关于测度 dA 平方可积的 Lebesgue 空间。Bergman 空间 L_a^2 是 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 中所有复值解析函数构成的闭子空间。调和 Bergman 空间 b^2 是 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 中所有复值调和函数构成的 Hilbert 空间。调和 Bergman 空间 b^2 可表示成

$$b^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \bar{z}^m : \|f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 dA(w) < \infty \right\},$$

$L^2(\mathbb{D}, dA)$ 上内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{g(w)} dA(w), \quad f, g \in L^2(\mathbb{D}, dA).$$

L_a^2 上的再生核为

$$K_z(w) = \frac{1}{(1 - w\bar{z})^2} \quad (z, w \in \mathbb{D}).$$

从而得 b^2 上的再生核为

$$R_z(w) = K_z(w) + \overline{K_z(w)} - 1 \quad (z, w \in \mathbb{D}).$$

Q 是 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 到 b^2 的正交投影。积分表示为

$$Qf(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{(1-\bar{w}z)^2} + \frac{1}{(1-w\bar{z})^2} - 1 \right) f(w) dA(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。 T_φ 为在 b^2 上以 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 为符号的 Toeplitz 算子

$$T_\varphi f = Q(\varphi f), \quad f \in b^2.$$

本文要借助 W 算子的概念, 从而引出斜 Toeplitz 算子及其衍生算子的定义。

定义 2.1 定义调和 Bergman 空间 b^2 上的 W 算子为

$$Wz^{2n} = z^n, \quad W\bar{z}^{2n} = \bar{z}^n, \quad Wz^{2n+1} = 0, \quad W\bar{z}^{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

其中 $z \in \mathbb{D}$ 。

定义 2.2 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, $B_\varphi = WT_\varphi$ 称作符号为 φ 的斜 Toeplitz 算子, 其中 T_φ 是符号为 φ 的 Toeplitz 算子。

类比于斜 Toeplitz 算子的定义, 我们给出斜 L 算子, 斜 H 算子的概念。

定义 2.3 对 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 斜 L 算子 $L_\varphi: (b^2)^\perp \rightarrow L^2(\mathbb{D}, dA)$ 定义为:

$$L_\varphi(f) = (I - WQ)(\varphi f), \quad f \in (b^2)^\perp.$$

定义 2.4 对 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 斜 H 算子 $N_\varphi: (b^2)^\perp \rightarrow b^2$ 定义为:

$$N_\varphi(f) = WQ(\varphi f), \quad f \in (b^2)^\perp.$$

定义 2.5 对 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 乘法算子 $M_\varphi: L^2(\mathbb{D}, dA) \rightarrow L^2(\mathbb{D}, dA)$ 定义为:

$$M_\varphi(f) = \varphi f, \quad f \in L^2(\mathbb{D}, dA).$$

注意当 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 对任意 $f \in (b^2)^\perp \cap L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 有 $L_\varphi(f) = (I - WQ)(\varphi f) \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。

当 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 对任意 $f \in L^2(\mathbb{D}, dA) \cap L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 有 $M_\varphi(f) = \varphi f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。

易见当 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 对任意 $f \in (b^2)^\perp \cap L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 有

$$M_\varphi(f) = N_\varphi(f) + L_\varphi(f). \quad (2.1)$$

3. 斜 L 算子的有界性和紧性

为了研究斜 L 算子的有界性和紧性, 下面先给出斜 H 算子 N_φ 的积分表示。

定理 3.1 如果 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, $f \in (b^2)^\perp$, 则

$$(N_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) f(w) \overline{(J_z(w) + J_{\bar{z}}(\bar{w}) - 1)} dA(w).$$

证明: 计算可得

$$\begin{aligned} (N_\varphi f)(z) &= WP(\varphi f)(z) = \langle P(\varphi f)(w), J_z(w) + J_{\bar{z}}(\bar{w}) - 1 \rangle \\ &= \langle \varphi(w) f(w), J_z(w) + J_{\bar{z}}(\bar{w}) - 1 \rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) f(w) \overline{(J_z(w) + J_{\bar{z}}(\bar{w}) - 1)} dA(w). \end{aligned}$$

设 $w \in \mathbb{D}$, $0 < s < 1 - |w|$ 且 $D(w, s) = \{z \in \mathbb{D} : |z - w| < s\}$ 。定义函数

$$g_{w,s}(z) := \left[(z - w)^2 \overline{(z - w)} - \frac{2}{3} s^2 (z - w) \right] \chi_{D(w,s)}(z).$$

进一步, 表示

$$u_{w,s}(z) = \frac{g_{w,s}(z)}{\|g_{w,s}(z)\|}.$$

引理 3.1 通过上述记号, 对每个 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 有 $u_{w,s}(z) \in (b^2)^\perp \cap L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 且

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|M_\varphi u_{w,s}\| = |\varphi(w)| \quad a.e. \ w \in \mathbb{D}.$$

证明: 先来证 $g_{w,s}(z) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。对任意 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$\begin{aligned} |g_{w,s}(z)| &= \left| \left[(z-w)^2 \overline{(z-w)} - \frac{2}{3}s^2(z-w) \right] \chi_{D(w,s)}(z) \right| \\ &= \left| (z-w)^2 \overline{(z-w)} - \frac{2}{3}s^2(z-w) \right| \chi_{D(w,s)}(z) \\ &\leq \left(|z-w|^3 + \frac{2}{3}s^2|z-w| \right) \chi_{D(w,s)}(z) \\ &\leq \left(|z-w|^3 + \frac{2}{3}s^2|z-w| \right) \chi_{D(w,s)}(z) \\ &\leq 2s^3 < \infty, \end{aligned}$$

从而 $\|g_{w,s}(z)\|_\infty < \infty$ 。

由[13]的引理 2.1 可得 $g_{w,s}(z) \in (b^2)^\perp$ 以及 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|M_\varphi u_{w,s}\| = |\varphi(w)| \quad a.e. \ w \in \mathbb{D}$ 。

引理 3.2 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。对每个 $w \in \mathbb{D}$, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|N_\varphi u_{w,s}\| = 0.$$

证明: 对每个 $z \in \mathbb{D}$, 由定理 3.1 可得

$$\begin{aligned} N_\varphi u_{w,s}(z) &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(\lambda) u_{w,s}(\lambda) \overline{(J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)} dA(\lambda) \\ &= \int_{D(w,s)} \varphi(\lambda) u_{w,s}(\lambda) \overline{(J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)} dA(\lambda). \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} |N_\varphi u_{w,s}(z)| &\leq \left[\int_{D(w,s)} |u_{w,s}(\lambda)|^2 dA(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda) (J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)|^2 dA(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u_{w,s}\| \left[\int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda) (J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)|^2 dA(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda) (J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)|^2 dA(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

故

$$|N_\varphi u_{w,s}(z)|^2 \leq \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda) (J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)|^2 dA(\lambda).$$

从而

$$\begin{aligned} \|N_\varphi u_{w,s}\|^2 &\leq \int_{\mathbb{D}} \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda) (J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1)|^2 dA(\lambda) dA(z) \\ &= \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda)|^2 \int_{\mathbb{D}} |J_z(\lambda) + J_{\bar{z}}(\bar{\lambda}) - 1|^2 dA(z) dA(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda)|^2 \int_{\mathbb{D}} \left(|J_z(\lambda)| + |J_{\bar{z}}(\bar{\lambda})| + 1 \right)^2 dA(z) dA(\lambda) \\
&\leq \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda)|^2 \int_{\mathbb{D}} \left(2 \frac{1+|\lambda|}{(1-|\lambda|)^2} + 1 \right)^2 dA(z) dA(\lambda) \\
&\leq \left(2 \frac{1+|w|+s}{(1-|w|-s)^2} + 1 \right)^2 \int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda)|^2 dA(\lambda).
\end{aligned}$$

由 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 和积分的绝对连续性, 让 $s \rightarrow 0^+$, 则有

$$\int_{D(w,s)} |\varphi(\lambda)|^2 dA(\lambda) \rightarrow 0,$$

从而 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|N_\varphi u_{w,s}\| = 0$ 。

引理 3.3 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。对每个 $w \in \mathbb{D}$, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle N_\varphi u_{w,s}, M_\varphi u_{w,s} \rangle = 0。$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式及引理 3.1 可得

$$|\langle N_\varphi u_{w,s}, M_\varphi u_{w,s} \rangle| \leq \|N_\varphi u_{w,s}\| \cdot \|M_\varphi u_{w,s}\| \leq \|N_\varphi u_{w,s}\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|u_{w,s}\|_{\infty}。$$

由 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 及引理 3.2, 让 $s \rightarrow 0^+$, 得

$$|\langle N_\varphi u_{w,s}, M_\varphi u_{w,s} \rangle| \rightarrow 0,$$

从而 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle N_\varphi u_{w,s}, M_\varphi u_{w,s} \rangle = 0$ 。

通过 L_φ 和 M_φ, N_φ 的关系, 以及由斜 H 算子 N_φ 的积分表示所得出的引理 3.2, 3.3 可得以下结论。

引理 3.4 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 则有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|L_\varphi u_{w,s}\| = |\varphi(w)| \quad a.e. \ w \in \mathbb{D}。$$

证明: 对任意 $f \in (b^2)^\perp \cap L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, 由(2.1)可得

$$M_\varphi(f) = N_\varphi(f) + L_\varphi(f)。$$

从而

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi u_{w,s}\|^2 &= \|N_\varphi u_{w,s}\|^2 + \|L_\varphi u_{w,s}\|^2 + \langle N_\varphi u_{w,s}, L_\varphi u_{w,s} \rangle + \langle L_\varphi u_{w,s}, N_\varphi u_{w,s} \rangle \\
&= \|N_\varphi u_{w,s}\|^2 + \|L_\varphi u_{w,s}\|^2 + \langle N_\varphi u_{w,s}, (M_\varphi - N_\varphi) u_{w,s} \rangle + \langle (M_\varphi - N_\varphi) u_{w,s}, N_\varphi u_{w,s} \rangle \\
&= -\|N_\varphi u_{w,s}\|^2 + \|L_\varphi u_{w,s}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle N_\varphi u_{w,s}, M_\varphi u_{w,s} \rangle.
\end{aligned}$$

由引理 3.2 及 3.3, 让 $s \rightarrow 0^+$, 可得

$$|\varphi(w)| = \lim_{s \rightarrow 0^+} \|L_\varphi u_{w,s}\| \quad a.e. \ w \in \mathbb{D}。$$

定理 3.2 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, 则 L_φ 是 $(b^2)^\perp$ 上的有界线性算子当且仅当 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。

证明: 先证充分性, 当 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。对任意 $f \in (b^2)^\perp$, 有

$$\begin{aligned}
\|L_\varphi\| &= \|(I - WQ)(\varphi f)\| \\
&\leq \|I - WQ\| \|\varphi f\| \\
&\leq (\|I\| + \|W\| \|Q\|) \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\| \\
&= (1 + \sqrt{2}) \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|.
\end{aligned}$$

由 f 的任意性可得, L_φ 是有界的。

再证必要性, 当 L_φ 是 $(b^2)^\perp$ 上的有界线性算子。注意到对所有 $w \in \mathbb{D}$ 及 $0 < s < 1 - |w|$ 都有

$$\|L_\varphi u_{w,s}\| \leq \|L_\varphi\|$$

成立。让 $s \rightarrow 0^+$ 及使用引理 3.4, 有

$$|\varphi(w)| \leq \|L_\varphi\| \quad a.e. \ w \in \mathbb{D},$$

从而 $\|\varphi\|_\infty \leq \|L_\varphi\|$ 。

定理 3.3 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。算子 L_φ 是 $(b^2)^\perp$ 上的紧算子当且仅当 $\varphi(w) = 0$ a.e. $w \in \mathbb{D}$ 。

证明: 充分性显然成立, 下面证明必要性。由[13]的定理 2.5 可知, 对于每个 $w \in \mathbb{D}$, 当 $s \rightarrow 0^+$, $u_{w,s}$ 在 $(b^2)^\perp$ 上弱收敛于 0。由 L_φ 是 $(b^2)^\perp$ 上的紧算子可得

$$\|L_\varphi u_{w,s}\| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0^+).$$

由引理 3.4 可得 $\varphi(w) = 0$ a.e. $w \in \mathbb{D}$ 。

定理 3.4 设 $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, $h \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ 。如果算子 L_h 是算子 $L_\varphi L_\psi$ 的紧扰动当且仅当 $\varphi\psi = h$ a.e. $\mathbb{D}$ 。在这种情况下, $(B_\varphi - M_\varphi) \cdot N_\psi$ 是紧算子。

证明: 先证明充分性。假设 $\varphi\psi = h$ a.e. $\mathbb{D}$, 则 $h \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。由条件和定理 3.3 可得 L_φ, L_ψ 和 L_h 均为紧算子, 从而 $L_\varphi L_\psi - L_h$ 是紧算子, 即算子 L_h 是算子 $L_\varphi L_\psi$ 的紧扰动。

下证必要性。假设 $L_\varphi L_\psi - L_h$ 是紧算子。由定理 3.2 可得, $h \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 。由 M_φ 及 B_φ 的定义可得, 对任意 $f \in (b^2)^\perp$, 有

$$\begin{aligned}
L_\varphi L_\psi(f) &= L_\varphi(I - WQ)(\varphi f) \\
&= L_\varphi(\varphi f - WQ(\varphi f)) \\
&= (I - WQ)(\psi\varphi f - \psi WQ(\varphi f)) \\
&= (I - WQ)(\psi\varphi f) + WQ(\psi WQ(\varphi f)) - \psi WQ(\varphi f) \\
&= L_{\varphi\psi}(f) + B_\varphi N_\psi(f) - M_\varphi N_\psi(f),
\end{aligned}$$

即 $L_\varphi L_\psi = L_{\varphi\psi} + B_\varphi N_\psi - M_\varphi N_\psi$ 。由假设可知

$$L_{\varphi\psi-h} + B_\varphi N_\psi - M_\varphi N_\psi = L_\varphi L_\psi - L_h. \quad (3.1)$$

是紧算子。由定理 3.3 的证明, 对于每个 $w \in \mathbb{D}$, 当 $s \rightarrow 0^+$, $u_{w,s}$ 在 $(b^2)^\perp$ 上弱收敛于 0。因此可得

$$\|(L_{(\varphi\psi-h)} + B_\varphi N_\psi - M_\varphi N_\psi)u_{w,s}\| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0^+).$$

由引理 3.2, 有 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|N_\varphi u_{w,s}\|_2 = 0$ 。由于 B_φ 和 M_φ 是有界的, 从而有

$$\|L_{(\varphi\psi-h)}u_{w,s}\| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0^+).$$

另一方面, 由引理 3.4 及 $\varphi\psi - h \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ 有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|L_{\varphi\psi-h} u_{w,s}\| = |\varphi(w)\psi(w) - h(w)| \quad a.e. w \in \mathbb{D}.$$

因此 $\varphi(w)\psi(w) = h(w) \quad a.e. w \in \mathbb{D}$ 。在这种情况下, 由(3.1)可知

$$(B_\varphi - M_\varphi) \cdot N_\psi = L_\varphi L_\psi - L_h$$

是紧算子。

推论 3.1 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, L_φ 是 $(b^2)^\perp$ 上的线性算子。则有:

若 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 则 L_φ 是幂等的当且仅当 $\varphi(z) \equiv 0$ 或 $\varphi(z) \equiv 1$, 对于 $z \in \mathbb{D}$ 。

证明: 充分性显然成立, 下证必要性。由于 L_φ 是幂等的当且仅当 $L_\varphi L_{1-\varphi} = \theta_T$ 。由于 θ_T 是紧算子及定理 3.4, 有 $\varphi(z)(1-\varphi(z)) = 0 \quad a.e. z \in \mathbb{D}$ 。又 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 则 $\varphi(z)(1-\varphi(z)) \equiv 0$, $z \in \mathbb{D}$ 。故 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的特征函数。再由 φ 在 $\mathbb{D}$ 上的连续性, 得 $\varphi(z) \equiv 0$ 或 $\varphi(z) \equiv 1$, 对于 $z \in \mathbb{D}$ 。

参考文献

- [1] Toeplitz, O. (1911) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Mathematische Annalen*, **70**, 351-376. <https://doi.org/10.1007/bf01564502>
- [2] Halmos, P.R. and Brown, A. (1964) Algebraic Properties of Toeplitz Operators. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik*, **213**, 89-102. <https://doi.org/10.1515/crll.1964.213.89>
- [3] Douglas, R.G. (1972) Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Springer, 158-178.
- [4] Mark, C.H. (1996) Properties of Slant Toeplitz Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, **45**, 843-862.
- [5] Mark, C.H. (1997) Spectrum of Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbols. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 157-166.
- [6] 安恒斌, 蹇人宜. Bergman 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 103-110.
- [7] Singh, S.K. and Gupta, A. (2017) Kth-Order Slant Toeplitz Operators on the Fock Space. *Advances in Operator Theory*, **2**, 318-333
- [8] Hazarika, M. and Marik, S. (2020) Toeplitz and Slant Toeplitz Operators on the Polydisk. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **27**, 73-93. <https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.02.003>
- [9] Łanucha, B. and Michalska, M. (2022) Compressions of Kth-Order Slant Toeplitz Operators to Model Spaces. *Lithuanian Mathematical Journal*, **62**, 69-87. <https://doi.org/10.1007/s10986-021-09548-3>
- [10] Heil, C., Strang, G. and Strela, V. (1996) Approximation by Translates of Refinable Functions. *Numerische Mathematik*, **73**, 75-94. <https://doi.org/10.1007/s002110050185>
- [11] Strang, G. and Strela, V. (1995) Short Wavelets and Matrix Dilation Equations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**, 108-115. <https://doi.org/10.1109/78.365291>
- [12] Stroethoff, K. and Zheng, D. (2002) Algebraic and Spectral Properties of Dual Toeplitz Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **354**, 2495-2520. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-02-02954-9>
- [13] Peng, Y. and Zhao, X.F. (2021) Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Harmonic Bergman Space. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **37**, 1143-1155. <https://doi.org/10.1007/s10114-021-0315-8>