

函数极限求解之依型定法探究

杨 鹏

四川建筑职业技术学院基础教学部, 四川 德阳

收稿日期: 2025年4月3日; 录用日期: 2025年5月6日; 发布日期: 2025年5月23日

摘 要

函数极限是大学数学中的重要概念, 在函数的连续性、可导性和可积性等知识中都有重要应用。然而, 函数极限的题目类型多样, 求解方法繁多, 学习难度较大。将常见的函数极限求解题型归纳为七种类型, 即 C 型、 $\frac{C}{0}$ 型、 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型、 $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ 型、含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型及 1^∞ 型, 并提出了一种判断类型, 依型定法的函数极限求解策略可以根据函数类型, 快速匹配每一种函数极限类型最佳的求解方法, 从而实现函数极限的快速求解。

关键词

数学, 函数极限, 函数类型, 匹配

Research on the Method of Solving the Limit of Function Based on the Type

Peng Yang

Department of Basic Education, Sichuan College of Architectural Technology, Deyang Sichuan

Received: Apr. 3rd, 2025; accepted: May 6th, 2025; published: May 23rd, 2025

Abstract

The limit of function is an important concept in the university mathematics, which has important applications in the knowledge of continuity, derivability and integrability of functions. However, it is very difficult to grasp the limit of function, because there are so many different types of functional limit problems and so many methods to solve them. The common question types of the limit of function are summarized into seven types: C type, $\frac{C}{0}$ type, $\frac{0}{0}$ type, $\frac{\infty}{\infty}$ type, $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ type, $\frac{0}{0}$ type involving trigonometric functions, and 1^∞ type. A strategy that judges the type of function and

identifies the method based on the type is proposed to match the better method based on the type of function to realize the fast solution of the limit of function.

Keywords

Mathematics, The Limit of Function, The Type of Function, Match

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

函数是大学数学学习的基础, 极限作为研究函数的基本工具, 因其高度抽象性及多样性导致函数极限的理解与求解成为数学爱好者们研究的热点问题。文献[1]通过图像解析和论证分析相结合的教学方法, 重点研究了自变量趋向有限值时函数极限的问题; 文献[2]进一步推广了等价无穷小替换在特殊类型下的等价替换及极坐标变换的应用; 文献[3]通过总结归纳, 分别利用函数定义、函数极限的四则运算、迫敛性、两个重要极限、等价无穷小替换、洛必达法则等6种方法对函数极限进行求解; 文献[4]总结了5种求函数极限的方法, 即洛必达法则、等价无穷小替换、两类重要极限、倒数代换及Taylor公式, 并讨论了求函数极限过程中的常见错误。以上研究成果从各自的角度对函数极限的求解方法进行了总结与探究, 但多集中于方法方面的总结, 并未给出一种具体的求解逻辑思路, 即对于特定的函数极限题型, 如何以更直观且更容易记忆的方法指导其快速找到最佳的求解方法。本文旨在对函数极限常见题型进行探究, 将函数极限求解题型归纳为七种典型类型, 并对每一种类型通过“口诀式”的方式辅助记忆以助力快速求解函数极限, 即提出了一种判断类型, 依型定法的函数极限求解两步走策略以实现函数极限的快速求解, 从而突破函数极限求解的难关。

2. 函数极限基础知识概述

2.1. 邻域与去心邻域的概念

数轴上一点及其附近范围, 通常用邻域及其去心邻域表示。

定义1: 实数集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$ 。

定义2: 实数集合

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

称为以 x_0 为中心, δ 为半径的邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 。它是在 x_0 的 δ 邻域内去掉 x_0 以后, 其余的点组成的集合。

2.2. 函数极限的定义

定义1 ($x \rightarrow x_0$ 时函数的极限): 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

都成立, 那么就称常数 A 是函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } x \rightarrow x_0 \text{ 时 } f(x) \rightarrow A。$$

该定义可简记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon。$$

定义 2 ($x \rightarrow \infty$ 时函数的极限): 设函数 $y = f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时, 不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

都成立, 那么就称常数 A 是函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A。$$

该定义可简记为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon。$$

类似的, 可以对单侧极限作如下定义:

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < x - x_0 < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < x_0 - x < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$

$x \rightarrow +\infty$: 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon;$

$x \rightarrow -\infty$: 极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } x < -X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon。$

2.3. 极限的四则运算法则

在 x 的一个变化过程 $x \rightarrow c$ 中, $f(x), g(x)$ 的极限都存在, 记为 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$, 则有:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A \pm B;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)\lim_{x \rightarrow c} g(x) = AB;$$

$$\text{特别地, } \lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x) = kA;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)。$$

2.4. 无穷小量与无穷大量的定义及其关系

定义 1 (无穷小量): 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow c$ 时的无穷小量, 简称无穷小。

注:

1) 一个函数是无穷小, 必须指明自变量的变化趋势, 即此处 c 的可能情况为 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ 等;

2) 例举 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小的精确定义:

$f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x)| < \varepsilon;$

3) 常数中只有“0”是无穷小, 因为 $\lim_{x \rightarrow c} 0 = 0。$

定义 2(无穷大量): 如果当 $x \rightarrow c$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 那么函数 $y = f(x)$ 称为当 $x \rightarrow c$ 时的无穷大。

注:

1) 一个函数是无穷大, 必须指明自变量的变化趋势, 即此处 c 的可能情况为 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ 等;

2) 例举 $f(x)$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大的精确定义:

$f(x)$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| > M$;

3) 如果当 $x \rightarrow c$ 时, 函数 $y = f(x)$ 为无穷大, 那么它的极限是不存在的, 但为了便于描述函数的这一性态, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 记住 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$;

4) 无穷大不是具体的数, 不能把绝对值很大的常数说成无穷大。

定理 1(无穷小与无穷大的关系): 在自变量的同一变化条件下, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小;

反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小且不是常数 0, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大。

3. 函数极限的求解

为计算函数极限, 基于函数各个独立部分当 $x \rightarrow c$ 时的极限结果, 对常见的函数极限求解题型进行总结, 将函数极限类型归纳为七种典型类型, 并提出了一种判断类型, 依型定法的函数极限求解两步走策略。该策略具体内容为: 将函数极限求解分解为两步, 第一步判断类型, 第二步依型定法。简言之, 基于所定义的七种函数极限类型, 首先判断所求函数极限类型属于七种类型中的何种类型, 进而依据该种类型定位与之匹配的最佳求解方法, 从而可快速找到此种函数极限类型正确的求解方法, 进而实现该函数极限的快速求解。下边将结合例子具体给出函数极限的七种类型及其相应的求解方法。

3.1. 类型一: C 型

对于类型一所述的 C 型, 即函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处是连续的类型, 则此时函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限即为将 $x = x_0$ 代入函数 $y = f(x)$ 计算的结果, 其结果通常为一常数 C [5], 故记为 C 型。对于该种类型的函数极限求解可以直接将 x_0 代入函数 $f(x)$ 计算即可, 其对应的求解策略可记为口诀“代入法”。

例 1: 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型一所述的 C 型, 其方法口诀为代入法。因此, 直接将 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$ 即可, 其计算过程如下:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

3.2. 类型二: $\frac{C}{0}$ 型

对于类型二所述的 $\frac{C}{0}$ 型, 即函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的分母趋向于无穷小, 函数 $y = f(x)$ 的分子为常数 C, 故记为 $\frac{C}{0}$ 型。此种类型, 函数 $y = f(x)$ 无意义, 因此不能用代入法, 但可以利用无穷小与无穷大的关系进行求解, 即非零无穷小的倒数为无穷大[4]。因此, 对于 $\frac{C}{0}$ 型, 其对应的求

解策略可记为口诀“无穷小和无穷大的倒数关系”。

例 2: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型二所述的 $\frac{C}{0}$ 型, 其方法口诀为无穷小和无穷大的倒数关系, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty。$$

3.3. 类型三: $\frac{0}{0}$ 型

对于类型三所述的 $\frac{0}{0}$ 型, 即函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的分子和分母都趋向于无穷小, 故记为 $\frac{0}{0}$ 型。此种类型, 其对应的求解策略可记为口诀: 首先考虑等价无穷小替换, 若能替换优先替换; 其次, 考虑因式分解, 常见的因式分解策略仅考虑提取公因式, 平方差和完全平方公式即可; 最后考虑洛必达法则。

例 3: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型三所述的 $\frac{0}{0}$ 型, 其方法口诀为优先考虑等价无穷小替换, 若否, 再考虑因式分解及洛必达法则。由于本题中无熟悉的等价无穷小替换, 因此选用因式分解中的平方差公式及洛必达法则进行求解:

解法一: (因式分解)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1),$$

进一步判断, 其为 C 型, 代入法得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2。$$

解法二: (洛必达法则)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x),$$

进一步判断, 其为 C 型, 代入法得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) = 2 \times 1 = 2。$$

从此题可看出, 在函数极限求解的每一步中, 都可遵循判断类型, 依型定法的求解策略去实现函数极限的求解。换言之, 函数极限的求解, 即是在每一步中均去使用判断类型, 依型定法的求解策略直至求解出函数极限为止。

例 4: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 2x}$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型三所述的 $\frac{0}{0}$ 型, 其方法口诀为优先考虑等价无穷小替换, 若否, 再考虑因式分解及洛必达法则。本题中有熟悉的等价无穷小替换公式, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x \sim 3x$, $1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2$, 因此优先考虑等价无穷小替换:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}(2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}。$$

3.4. 类型四： $\frac{\infty}{\infty}$ 型

对于类型四所述的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，即函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $y = f(x)$ 的分子和分母都趋向于无穷大，故记为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。此种类型，其对应的求解策略可记为口诀：优先看变化率，即看分子和分母谁变化快，其结论为：若分子分母变化一样快，答案为系数之比；若分母变化快，则分式越来越小，小到无穷小；若分子变化快，则分式越来越大，大到无穷大[6]。若否，可进一步考虑洛必达法则。

注：对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的看变化率求解函数极限，除有理分式函数较为明显外，还有在 $x \rightarrow +\infty$ 时，指数函数的变化最快，幂函数变化次之，对数函数变化最慢，可直接记住此三类函数之间相对变化速率关系，若遇到可直接得出其函数极限比值结果(可借助洛必达法则或函数图像理解)。

例 5：求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 1}。$

解析：首先判断函数极限类型：该函数极限类型为类型四所述的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，其方法口诀为看变化率。由题可知，分子分母 x 的最高次幂相等，则根据口诀可知，分子分母变化一样快，答案为系数之比，因此可快速得到该函数极限的结果为 3，即：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 1} = 3。$$

例 6：求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - x^2 + x + 1}。$

解析：首先判断函数极限类型：该函数极限类型为类型四所述的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，其方法口诀为看变化率。由题可知，分母的最高次幂为 4 次幂，较分子的最高次幂 3 次幂变化更快，则根据口诀可知，分母变化快，则分式越来越小，小到无穷小，因此可快速得到该函数极限的结果为 0，即：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - x^2 + x + 1} = 0。$$

例 7：求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 1}。$

解析：首先判断函数极限类型：该函数极限类型为类型四所述的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，其方法口诀为看变化率。由题可知，分子的最高次幂为 4 次幂，较分母的最高次幂 3 次幂变化更快，则根据口诀可知，分子变化快，则分式越来越大，大到无穷大，因此可快速得到该函数极限的结果为 ∞ ，即：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 1} = \infty。$$

3.5. 类型五： $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ 型

对于类型五所述的 $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ 型，即该函数由两个 $\frac{C}{0}$ 型的和差构成，故记为 $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ 型。此种类型的函数极限求解，可通过通分将其转化为 $\frac{0}{0}$ 型，再进一步进行求解。因此，其对应的求解策略可记为口诀：通分转化。

例 8: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型五所述的 $\frac{C}{0} - \frac{C}{0}$ 型, 其方法口诀为通分转化, 求解过程如下:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2},$$

进一步判断, 其为 $x \rightarrow x_0$ 型, 应用因式分解法中的平方差公式得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x},$$

进一步判断, 其为 C 型, 应用代入法得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}。$$

例 9: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型五所述的 $\frac{C}{0} - \frac{C}{0}$ 型, 其方法口诀为通分转化, 求解过程如下:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

进一步判断, 其为 $\frac{0}{0}$ 型, 应用等价无穷小替换, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$ 得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

进一步判断, 其为 $\frac{0}{0}$ 型, 应用洛必达法则连续应用得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

进一步判断, 其为 $\frac{0}{0}$ 型, 再次应用等价无穷小替换, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$ 即可得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}。$$

3.6. 类型六: 含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型

对于类型六所述的含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型, 即该函数除本身是 $\frac{0}{0}$ 型外, 还含有三角函数, 故记为含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型。此种类型的函数极限求解, 其对应的求解策略可记为口诀: 凑第一重要极限 ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$)。在凑第一重要极限的过程中, 需要有整体的思想, 即第一重要极限中的 x 可以只是 x , 也可以是包含 x 的函数。因此, 在凑第一重要极限的过程中, 需要注意添补常数保证恒等变形。

例 10: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型六所述的含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型, 其方法口诀为凑第一重要极限, 求解过程如下(将 $2x$ 视为一个整体):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3}。$$

3.7. 类型七: 1^∞ 型

对于类型七所述的 1^∞ 型, 其为指数函数型, 即当 $x \rightarrow c$ 时, 其底数部分极限为 1, 指数部分极限为 ∞ , 故记为 1^∞ 型。对于该种函数极限类型, 其对应的求解策略可记为口诀: 凑第二重要极限 ($\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$), 而凑第二重要极限又包含两个凑, 一个是凑加号, 另一个是凑倒数。在凑第二重要极限的过程中仍需有整体的思想, 即 x 除可以是 x 外, 也可以是包含 x 的函数。因此, 在凑第二重要极限的过程中, 仍需注意添补常数保证恒等变形[3] [4]。

例 11: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解析: 首先判断函数极限类型: 该函数极限类型为类型七所述 1^∞ 型, 其方法口诀为凑第二重要极限, 求解过程如下(将 $-2x$ 视为一个整体):

首先, 凑加号, 即将 $1-2x$ 凑成 $1+(-2x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-2x)]^{\frac{1}{x}},$$

其次, 凑倒数, 即将 $\frac{1}{x}$ 凑成 $\frac{1}{-2x}$, 但为保证恒等变形, 还需整体添补 -2 次方:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1+(-2x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}} \right\}^{-2},$$

最后, 将 $-2x$ 视为一个整体, 其即为第二重要极限, 因此可得最后结果为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}} \right\}^{-2} = e^{-2}。$$

4. 结语

本文遵循认知规律, 按照由浅入深、循序渐进的顺序, 通过具有代表性的典型例题, 系统归纳出函数极限的七种类型: 即 C 型、 $\frac{C}{0}$ 型、 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型、 $\frac{C}{0} \pm \frac{C}{0}$ 型、含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型及 1^∞ 型。针对各种类型特征, 独创性地设计了韵律化的记忆口诀, 将抽象的解题策略转化为具象化的操作指南。在此基础上, 构建了“判断类型-依型定法”的求解策略, 形成了完整的方法论体系。通过该求解策略, 解决了类型判别模糊, 方法确定缓慢且不准的问题, 可以帮助学习者快速定位相应函数极限类型的最佳求解方法, 从而显著提升解题效率, 实现函数极限快速求解的目的, 为后续微分学、积分学的深入学习奠定了坚实的分析基础。

参考文献

- [1] 李玉. 关于高等数学中函数极限教学方法的研究[J]. 科技视界, 2022(27): 140-142.

- [2] 周燕, 林丽琼, 任立英. 关于求解极限的若干思考[J]. 大学数学, 2021, 37(2): 108-113.
- [3] 高桂凤, 王治盟. 求函数极限的方法与技巧[J]. 科技风, 2020(16): 24-25.
- [4] 韦慧, 倪晋波. 高等数学中函数极限计算的几种方法[J]. 安阳工学院学报, 2023, 22(2): 93-96.
- [5] 王巧云, 陈少云. 微积分[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [6] Su, X.Y. and Zhai, Y.H. (2020) The Method of Calculating the Limit. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, **66**, 64-78.