Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 161-170
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155165

Hans汉斯

BBM方程在Besov空间$B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$中的全局适定性

陈佳龙

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北 武汉

收稿日期：2025年4月6日；录用日期：2025年5月10日；发布日期：2025年5月23日

摘 要

本文研究了Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程在非齐次Besov空间$B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$中的全局适定性。首先用了压缩映射原理证明了当$1\le p\le\infty, 1<r\le\infty$及$s>\frac{1}{p}$(或$1\le p\le\infty$，$r=1$及$s\ge\frac{1}{p}$)时，BBM方程在$B_{p,r}^{s}(\mathbb{R})$中局部适定的。接着，用高低频分解技巧及算子半群理论证明了当$1/2<s\le1$，$2\le r<\infty$时，BBM方程在$B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$中全局适定。

关键词

Benjamin-Bona-Mahony方程，Besov空间，全局适定性，高低频分解

Global Well-Posedness for the BBM Equation in Besov Spaces $B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$

Jialong Chen

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Apr. 6th, 2025; accepted: May 10th, 2025; published: May 23rd, 2025

Abstract

In this study, we devoted to the global well-posedness for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation in the Nonhomogeneous Besov spaces $B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$. First, using the contraction mapping principle, it is proved that when $1\le p\le\infty, 1<r\le\infty$ and $s>\frac{1}{p}$ (or $1\le p\le\infty$, $r=1$ and $s\ge\frac{1}{p}$), the BBM is locally well-posed in $B_{p,r}^{s}(\mathbb{R})$ (or in $B_{p,1}^{s}(\mathbb{R})$). Then using Bourgain's low-high frequency

文章引用: 陈佳龙. BBM 方程在 Besov 空间$B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$中的全局适定性[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 161-170.
DOI: 10.12677/pm.2025.155165

decomposition technique, it is proved that when $\frac{1}{2}<s\le 1$ and $2\le r<\infty$, BBM is globally well-posed in Besov spaces $B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$.

Keywords

Benjamin-Bona-Mahony Equation, Besov Spaces, Global Well-Posedness, Low-High Frequency Decomposition

1. 引言及符号说明

1.1. 引言

本文我们将研究 Benjamin-Bona-Mahony(BBM)方程[1]的初值问题(IVP)

$$u_t-u_{txx}+u_x+uu_x=0,\ u(0,x)=u_0(x), \tag{1}$$

在 Besov 空间 $B_{2,r}^{s}(\mathbb{R})$ 中的适定性。方程(1)用以描述浅水区单向，小振幅长波；其中 x 表示位置，t 表示时间，$u(t,x)$ 表示水面波的振幅。

实际上，单向、一维、小振幅长波在非线性色散媒介中的传播最初用 Korteweg-de Vries (KDV)方程[2]

$$u_t+u_{xxx}+u_x+uu_x=0,\ u(0,x)=u_0(x), \tag{2}$$

来描述。1972 年，Benjamin，Bona 及 Mahony 在对(2)的推导中发现 $u_x\sim -u_t$，进而 $u_{xxx}=-u_{txx}$，因此 BBM 方程也称正则化的长波方程(RLW)。自 1960 年中期到 1970 年开始，类似(1)~(2)这种非线性色散方程一直是非线性分析的主流。实际上由于色散项 $-u_{txx}$ 具有更强的光滑作用，BBM 方程(1)适定性的建立要比 KDV 方程(2)容易的多。在一般的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$ 中，当 $s\ge 1$ 且为整数时，BBM 方程的全局适定性在文献[1]中已被证明。之后 Avrin 在文献[3]中建立了高维 BBM 方程在 $W^{1,p}(\mathbb{R})$ 中的全局适定性。由于方程(1)有 H^1 能量等式

$$\int u_x^2(t)+u^2(t)\,\mathrm{d}x=\int u_x^2(0)+u^2(0)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

因此其在 H^1 中的全局适定性可由(3)得到。但对于一般的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$，$s<1$ 时，类似(3)的能量不等式是不存在的，这给 BBM 全局适定性的研究带来了本质困难。之后得益于 Bourgain 与 T. Tao 等在非线性薛定谔方程(NLS)、非线性波动方程(NLW)及 KDV 方程的适定性方面的突破；即分别建立了高低频分解技术[4] [5]和 I 方法[6]。Bona 和 Tzvetkov 在文献[7]中用高低频分解技术证明了在 $H^s(\mathbb{R})$ 中，对于 $s\in\mathbb{R}$，当 $s\ge 0$ 时，BBM 方程(1)是全局适定的；且当 $s<0$ 时，是不适定的。实际上固定任意小的 $t>0$，当 $s<0$ 时，流映射 $u_0\to u(t)$ 从 $H^s(\mathbb{R})$ 到分布 $\left(C_c^\infty(\mathbb{R})\right)'$ 是不连续的[8]，即解对初值 u_0 不具有连续依赖性。随后，$s\ge 0$ 时，IVP(1)被证明在 $H^s(\mathbb{T})$ 中亦是全局适定的[9]。之后在文献[10]中，作者用 I 方法证明了，当 $s\ge\max\{0,1/p-1/2\}$，$1\le p<\infty$ 时，IVP(1)在 $H^{s,p}(\mathbb{R})$ 中是全局适定的。更多关于 IVP(1)适定性的结论可以在文献[11] [12]及其中包含的参考文献中找到。

本文发展了文献[7]和[12]中的方法，并沿着之前的研究思路，将 BBM 方程适定性的结果推广到更大

的函数空间。我们知道，Besov 空间 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$ 包含 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$，即当积分指标 $p=2$ 且第三指标 $r=2$ 时，有 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})\sim H^s(\mathbb{R})$。那么一个自然的想法是，在低正则情形下，即 $s<1$ 时，固定 $p=2$，当 $1\le p\le\infty$ 时，IVP(1)在 $B^s_{2,r}(\mathbb{R})$ 中是否全局适定。我们将在本文给出部分肯定回答。

除了适定性外，有关 BBM 方程行波解的研究可以参看文献[13] [14]及其内的参考文献，守恒律及孤立波的研究见文献[15] [16]及其内的参考文献，唯一连续性的研究见[17]-[19]及其内的参考文献，带阻尼的 BBM 方程见[20]-[22]及其内的参考文献，带噪声的 BBM 方程的研究见[23]及其内的参考文献，带时滞的 BBM 方程见[24]及其内的参考文献。

1.2. 符号说明

Schwartz 函数 $f(x)\in S(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

傅里叶逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi)=f^{\vee}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{ix\xi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\xi).$$

傅里叶变换的最大定义域为缓增分布 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$(即 $S(\mathbb{R})$ 的对偶空间)。具体而言，对于任意的 $u\in\mathcal{S}'(R)$，其傅里叶变换定义为

$$\langle\hat{u},\phi\rangle=\langle u,\hat{\phi}\rangle,\ \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

$A\lesssim_{\alpha,\beta}B$ 表示 $A\le C(\alpha,\beta)B$，其中 $C(\alpha,\beta)$ 为依赖于 α,β 的常数。$A\approx B$ 表示存在一个常数 c 使得 $\frac{1}{c}|A|\le|B|\le c|A|$。若 X,Y 为 Banach 空间，$X\sim Y$ 表示 X 与 Y 一致，即元素相同，且 $\|\cdot\|_X\approx\|\cdot\|_Y$。$X\hookrightarrow Y$ 表示 X 连续嵌入到 Y 中。最后，在不发生歧义的情况下，我们将 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$，$H^s(\mathbb{R})$ 及 $L^p(\mathbb{R})$ 分别简记为 $B^s_{p,r}$，H^s 及 L^p。

2. 准备工作

本节开头，我们介绍 Besov 空间的定义，接着为了方便起，我们将回顾本文需要用到的与之相关的定义、定理及性质。我们所回顾的定义、定理及性质均可在[25]中找到陈述及证明，因此，我们将证明略去。Besov 空间的定义，基于下面的 Littlewood-Paley 分解。

命题 1. 令 $\mathcal{C}=\{\xi\in R,3/4\le|\xi|\le 8/3\}$，$\mathcal{B}=\{\xi\in\mathbb{R},|\xi|\le 4/3\}$。则存在值域在 $[0,1]$ 上的光滑径向函数 $\chi\in C^\infty_c(\mathcal{B})$ 和 $\varphi\in C^\infty_c(\mathcal{C})$，使得

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\chi(\xi)+\sum_{j\ge 0}\varphi(2^{-j}\xi)=1,\tag{4}$$

$$\forall\xi\in\mathbb{R}-\{0\},\sum_{j\in Z}\varphi(2^{-j}\xi)=1,\tag{5}$$

$$|j-j'|\ge 2\Rightarrow\mathrm{Supp}\varphi(2^{-j}\cdot)\cap\mathrm{Supp}\varphi(2^{-j'}\cdot)=\varnothing,\ j\ge 1\Rightarrow\mathrm{Supp}\chi\cap\mathrm{Supp}\varphi(2^{-j}\cdot)=\varnothing.$$

我们将 χ,φ 固定下来。对于缓增分布 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$，定义频率局部化算子

$$\Delta_j u=0(j\le 2),\Delta_{-1}u=\chi(D)u=(\chi(\xi)\hat{u}(\xi))^{\vee}\tag{6}$$

$$\Delta_j u=\varphi(2^{-j}D)u=(\varphi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi))^{\vee}(j\in\mathbb{N}).\tag{7}$$

简单来说，Δ_j 的作用就是将分布 u 在频率域 $|\xi| \approx 2^j$ 处光滑截断。接着定义低频截断算子

$$S_j u = \sum_{j' \le j-1} \Delta_{j'} u.$$

最后我们有 Littlewood-Paley 分解

$$\mathrm{Id} = \sum_j \Delta_j, u = \sum_{j \ge -1} \Delta_j u. \tag{8}$$

由定义可知，Littlewood-Paley 分解具有几乎正交性，即

$$\Delta_j \Delta_{j'} u \equiv 0, \text{if } |j - j'| \ge 2; \Delta_j (S_{k-1} u \Delta_k u) \equiv 0, \text{if } |j-k| \ge 5.$$

由傅里叶变换在 $S(\mathbb{R})$ 中同胚，得 $(\chi(\cdot))^{\vee}, (\varphi(2^{-j}\cdot))^{\vee}$ 在 $S(\mathbb{R})$ 中，再结合卷积不等式可知 Δ_j 及 S_j 是 L^p 到 L^p 的有界算，这里 $1 \le p \le \infty$.

现在可以给出非齐次 Besov 空间的定义了。

定义 1. 令 $s \in \mathbb{R}$，$1 \le p \le \infty$。非齐次 Besov 空间 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$ 定义为

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \|u\|_{B^s_{p,r}} = \left\| \left(2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p} \right)_{j \ge -1} \right\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty \right\}$$

在上面定义中，我们称 s 为微分指标，p 为积分指标，r 为第三指标。由 Plancherel 公式可以证明，Besov 空间 $B^s_{2,2}(\mathbb{R})$ 与 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$ 一致，即 $B^s_{2,2}(\mathbb{R}) \sim H^s(\mathbb{R})$。若积分指标 p 与第三指标 r 均为正无穷，且 $s \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$，则其与 Holder 空间一致，即 $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}) \sim C^{[s], s-[s]}(\mathbb{R})$；特别地，若 $s \in \mathbb{N}$ 时，有 $C^s(\mathbb{R}) \subseteq B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$。我们可以看出，Besov 空间包含 Sobolev 空间，关于更多细节可以参看[25] [26]之对应章节。

定义 2. 我们称光滑函数 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个 m 阶乘子，是指其满足：对所有的多重指标 α，均存在依赖于 α 的常数 C_α，使得

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \left| \partial^\alpha f(\xi) \right| \le C_\alpha (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

引理 1. 1) (完备性)：$s \in \mathbb{R}, 1 \le p, r \le \infty$，则赋范空间 $\left(B^s_{p,r}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{B^s_{p,r}} \right)$ 完备，即 $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$ 是 Banach 空间。

2) (Sobolev 嵌入)：若 $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$，$1 \le r_1 \le r_2 \le \infty, s \in \mathbb{R}$ 且 $s_1 \le s_2$，有 $B^s_{p_1,r_1} \hookrightarrow B^{s - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)}_{p_2,r_2}$ 及 $B^{s_2}_{p_1,r_1} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,r_1}$。

3) (乘子定理)：令 $m \in \mathbb{R}$，f 是一个 m 阶乘子，那么对所有 $s \in \mathbb{R}$，$1 \le p, r \le \infty$ 算子 $f(D)$ 从 $B^s_{p,r}$ 到 $B^{s-m}_{p,r}$ 有界。

4) (收敛性)：若 $1 \le r < \infty$，对于任意 $u \in B^s_{p,r}$，有 $\lim_{j \to \infty} \|S_j u - u\|_{B^s_{p,r}} = 0$。

5) (代数性质)：对任意正实数 $s \in \mathbb{R}^+$，任意 $1 \le p, r \le \infty$。空间 $L^\infty \cap B^s_{p,r}$ 是一个代数：也就是说对任意 $u, v \in L^\infty \cap B^s_{p,r}$，有 $uv \in L^\infty \cap B^s_{p,r}$。并且可以找到一个常数 C_s 使得

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \le C_s \left(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^s_{p,r}} + \|u\|_{B^s_{p,r}} \|v\|_{L^\infty} \right).$$

证明：(1)~(5)分别见[25]之定理 2.72，命题 2.72，命题 2.78，引理 2.73 及推论 2.86。

在本节的末尾，我们给出一个与算子 $P(D) = -\partial_x (1 - \partial_x^2)^{-1}$ 有关的双线性估计，其是我们上面所述引理的一个直接推论，在下面讨论局部及全局适定性时发挥着重要作用。

引理 2. 若 $1 \le p, r \le \infty$，且 $s > 1/p$ (或 $s \ge 1/p, r = 1$)，则对于任意的 $u, v \in B^s_{p,r}$，有

$$\left\|P(D)(fg)\right\|_{B_{p,r}^s} \lesssim_{s,p,r} \|f\|_{B_{p,r}^s}\|g\|_{B_{p,r}^s}. \tag{9}$$

证明：注意到 $p(\xi)=\dfrac{i\xi}{1+\xi^2}\in C^\infty(R)$。且对任意指标 $\alpha\in\mathbb{N}$，有 $\left|\dfrac{\mathrm{d}^\alpha p(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|\le|\xi|^{-1-\alpha}$ 对 $\forall\xi\in\mathbb{R}$ 成立，故 $p(\xi)$ 为-1 阶，进而由引理 1 之乘子定理可知，$P(D)$ 将 $B_{p,r}^{s-1}$ 映到 $B_{p,r}^s$。并且，当 $s>1/p$ (或 $s\ge 1/p, r=1$) 时，有嵌入关系 $B_{p,r}^s\hookrightarrow L^\infty$。再结合引理 1 之代数性质及嵌入关系 $B_{p,r}^s\hookrightarrow B_{p,r}^{s-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|P(D)(fg)\right\|_{B_{p,r}^s} &\lesssim \|fg\|_{B_{p,r}^{s-1}}\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{B_{p,r}^{s-1}}+\|f\|_{B_{p,r}^{s-1}}\|g\|_{L^\infty}\\ &\lesssim \|f\|_{B_{p,r}^s}\|g\|_{B_{p,r}^{s-1}}+\|f\|_{B_{p,r}^{s-1}}\|g\|_{B_{p,r}^s}\\ &\lesssim_{s,p,r} \|f\|_{B_{p,r}^s}\|g\|_{B_{p,r}^s}.\end{aligned}$$

3. 局部适定性

本节我们将给出 IVP(1)在 Besov 空间 $B_{p,r}^s$ 中的局部适定性。首先，将拟微分算子 $\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}$ 作用到方程(1)两边，从而将 BBM 方程写成如下形式：

$$\begin{cases}u_t=A\left(u+\dfrac{1}{2}u^2\right),\\ u(0,x)=u_0,\end{cases} \tag{10}$$

其中 $A=P(D)=-\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}$。显然，由于 A 是-1 阶乘子，且 $B_{p,r}^s\hookrightarrow B_{p,r}^{s-1}$ 可知，A 是 Banach 空间 $B_{p,r}^s$ 到自身的有界线性算子。因此，由[27]之定理 1.2 可知，有界线性算子 A 在 $B_{p,r}^s$ 上生成一致连续线性算子半群 $S(t)=\left\{\mathrm{e}^{tA}\right\}_{t\ge 0}$，即存在着一个非负常数 $\omega\ge 0$，使得

$$\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\|_{B_{p,r}^s\to B_{p,r}^s}\le \mathrm{e}^{\omega t},\forall t\ge 0. \tag{11}$$

借由算子半群 $S(t)$，我们可以将方程(10)进一步写成与之等价的积分方程

$$u(t,x)=S(t)u_0-\frac{1}{2}\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}u^2(\tau,x)\mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

其中 $S(t)u_0$ 是相对应的线性初值问题

$$\begin{cases}u_t=Au,\\ u(0,x)=u_0(x)\in B_{p,r}^s(\mathbb{R})\end{cases}$$

的解。接下来，我们将给出本文的主要结果之一，BBM 方程在 Besov 空间中的局部适定性定理。

定理 1 (局部适定性)。假设 $1\le p,r\le\infty, s>1/p$ (或 $s\ge 1/p, r=1$)。对于任意 $u_0(x)\in B_{p,r}^s$ (或 $B_{p,1}^s$)，如果

$$\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\|u_0\|_{B_{p,r}^s}\le\frac{1}{4},\left(\text{或}\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\|u_0\|_{B_{p,1}^s}\le\frac{1}{4}\right)$$

那么，BBM 方程(1)存在唯一解 $u(t,x)\in C\left([0,T];B_{p,r}^s\right)\left(\text{或 } C\left([0,T];B_{p,1}^s\right)\right)$。

证明：首先，我们用不动点定理证明解的存在唯一性。且在这里，我们只讨论 $B_{p,r}^s$ 当 $r>1$ 的情形；对于 $B_{p,1}^s$ 的讨论完全相同，故不在这里赘述。为此，我们定义球

$$\mathcal{B}=\left\{u(t,x):\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u(t,x)\|_{B_{p,r}^s}\le 2\|u_0(x)\|_{B_{p,r}^s}\right\}$$

及其上的映射

$$\Gamma u=S(t)u_0-\frac{1}{2}\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}u^2(\tau,x)\mathrm{d}\tau,$$

这里的ω与不等式(11)右边的一致。显然，$\mathcal{B}$为 Banach 空间。我们要证Γ在$\mathcal{B}$内有不动点。首先，任取$u\in\mathcal{B}$，由(11)及引理 2，可得

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\|\Gamma u\|_{B_{p,r}^s}&\le\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\int_0^t\left\|S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}u^2\right\|_{B_{p,r}^s}\mathrm{d}\tau\\&\le\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\frac{C}{2}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\mathrm{e}^{\omega\tau}\left(\mathrm{e}^{-\omega\tau}\|u\|_{B_{p,r}^s}\right)^2\mathrm{d}\tau\\&\le\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\frac{C}{2}\int_0^T\mathrm{e}^{\omega\tau}\mathrm{d}\tau\left(\sup_{\tau\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega\tau}\|u\|_{B_{p,r}^s}\right)^2\\&\le\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\frac{C}{\omega}2\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2.\end{aligned}\tag{13}$$

然后，对于$\forall u,v\in\mathcal{B}$有

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\|\Gamma u-\Gamma v\|_{B_{p,r}^s}&\le\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\int_0^t\left\|S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\left(u^2-v^2\right)\right\|_{B_{p,r}^s}\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{C}{2}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\mathrm{e}^{-\omega\tau}\|u-v\|_{B_{p,r}^s}\|u+v\|_{B_{p,r}^s}\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{C}{\omega}\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\|u_0\|_{B_{p,r}^s}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\omega t}\|u-v\|_{B_{p,r}^s}\end{aligned}\tag{14}$$

需要说明的是，上面出现的常数C是估计(9)中出现的常数，当然我们可以调整(11)中的常数ω，使得$\frac{C}{\omega}\le1$。

由(13)~(14)可知，若$\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\|u_0\|_{B_{p,r}^s}\le\frac{1}{4}$，则映射$\Gamma:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$是一个压缩映射。故 BBM 方程(1)存在唯一解$u(t,x)\in L^\infty\left([0,T];B_{p,r}^s\right)$。同时，由(10)及引理 2 可知$u_t(t,x)\in L^\infty\left([0,T];B_{p,r}^s\right)$。即$u(t,x)\in W^{1,\infty}\left([0,T],B_{p,r}^s\right)$。最后由 Sobolev 嵌入

$$W^{1,\infty}\left([0,T],B_{p,r}^s\right)\hookrightarrow C\left([0,T],B_{p,r}^s\right)$$

可知$u(t,x)\in C\left([0,T];B_{p,r}^s\right)$。证毕。

4. 全局适定性

接下来，我们讨论定理 1 中得到的局部解u的全局性。即其在任意给定的时间T内不发生爆破。我们采取的策略是将u分解为$u=v+w$，其中让v满足 BBM 方程，但初值$v(0,x)$可以控制到任意小，而w满足另一个方程，且初值足够光滑。为此，我们要将初值$u_0(x)=u(0,x)$进行频率分解。在此之前，我们需要下面的引理。

引理 3. 令$1\le p,r\le\infty,s\in\mathbb{R}$。热流$\left\{\mathrm{e}^{t\partial_x^2}\right\}_{t\ge0}$为$B_{p,r}^s(\mathbb{R})$中的$C_0$压缩算子半群；即

$$\left\|\mathrm{e}^{t\partial_x^2}\right\|_{B_{p,r}^s\to B_{p,r}^s}\le1,\forall t\ge0.$$

证明：由 Hille-Yosida 定理[27]，我们只需要证明

$$\left\|\left(\lambda-\partial_x^2\right)^{-1}\right\|_{B_{p,r}^s\to B_{p,r}^s}\le\frac{1}{\lambda},\forall\lambda>0.\tag{15}$$

为此，任意取定一个 $f\in B^s_{p,r}$，由 Besov 空间的定义及 Δ_j 与 $\left(\lambda-\partial_x^2\right)^{-1}$ 可交换，我们只需说明对任意 $j\geq -1$，有

$$\left\|\left(\lambda-\partial_x^2\right)^{-1}\Delta_j u\right\|_{L^p}\leq\frac{1}{\lambda}\left\|\Delta_j u\right\|_{L^p} \tag{16}$$

即可。由傅里叶变换的卷积性质，$\left(\lambda-\partial_x^2\right)^{-1}\Delta_j u=G_{2,\lambda}*\Delta_j u$，其中

$$\begin{aligned}G_{2,\lambda}(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\lambda+\xi^2\right)^{-1}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{ix\xi}\left(\lambda+\xi^2\right)^{-1}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{ix\xi}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t\left(\lambda+\xi^2\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{e}^{-t\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{17}$$

其中(17)中交换积分次序由富比尼定理[28]保证。注意到，由于

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{e}^{-t\xi^2}\mathrm{d}\xi=\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-t|\cdot|^2}\right](-x)=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},$$

故，最终得

$$G_{2,\lambda}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t\lambda-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{d}t. \tag{18}$$

由等式(18)显然可以得到 $G_{2,\lambda}(x)\in C^\infty\left(\mathbb{R}-\{0\}\right)$ 且对 $\forall\in\mathbb{R}$ 均有 $G_{2,\lambda}(x)>0$。因此我们可以得到

$$\left\|G_{2,\lambda}(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}=\widehat{G_{2,\lambda}}(0)=\frac{1}{\lambda}.$$

最后由 Young 不等式可得(16)成立，这样我们就证明了该引理。

注意到，由于 C_0 压缩算子半群一定是强连续算子半群，因此，由强连续性可知

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\mathrm{e}^{t\partial_x^2}f-f\right\|_{B^s_{p,r}}=0,\forall f\in B^s_{p,r}.$$

同时注意到，对于函数 $G_{2,\lambda}(x)$ 而言，当 $\lambda=1$ 时，$G_{2,1}(x)=G_2(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(1+\xi^2\right)^{-1}(x)$，其对应于贝塞尔势函数[26]，$G_z(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{z}{2}}(x)$ 当 $z=2$ 时的情形。并且经计算可知，

$$\left\|G_{z,\lambda}(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}=(\lambda)^{-\frac{z}{2}}\left\|G_z(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R})}=(\lambda)^{-\frac{z}{2}}.$$

对任意的实数 $z>0$ 均成立。最后注意到，实际上由文献[25]之引理 2.4 可知，对于每个频率截断 $\Delta_j u$ 而言，热流 $\mathrm{e}^{t\partial_x^2}$ 在 Besov 空间中具有更强的耗散作用，即

$$\left\|\mathrm{e}^{t\partial_x^2}\Delta_j u\right\|_{B^s_{p,r}}\leq C\mathrm{e}^{-ct4^j}\left\|\Delta_j u\right\|_{B^s_{p,r}},$$

这里的 C,c 均为不依赖于 j,s,p,r 的常数。

接下来，我们给出本文的主要定理，BBM 方程(1)在 Besov 空间 $B^s_{2,r}(\mathbb{R})$ 中的全局适定性。

定理 2. (全局适定性)。设 $1/2<s\leq 1$，$2\leq r<\infty$。则 BBM 方程(1)在 Besov 空间 $B^s_{2,r}(\mathbb{R})$ 中全局适定。

证明：由前面的分析可知，令 $u(t,x)$ 为 BBM 方程(1)的解，我们只需要证明，对于任意给定的 $T>0$，有

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|u(t,x)\right\|_{B^s_{2,r}}<\infty \tag{19}$$

即可。为此，我们做分解 $u=v+w$，其中 v 和 w 分别满足

$$\begin{cases} v_t+v_x-v_{txx}+vv_x=0,\\ v(0,x)=\left(Id-S_j\right)u_0+\left(1-\mathrm{e}^{\varepsilon\partial_x^2}\right)\left(S_ju_0\right), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} w_t+w_x-w_{txx}+ww_x+(wv)_x=0,\\ w(0,x)=\mathrm{e}^{\varepsilon\partial_x^2}\left(S_ju_0\right). \end{cases} \tag{21}$$

首先看问题(20)。由定理 1 可知，对于给定的 T，只要控制初值 $v(0,x)$，使其满足

$$\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\left\|v(0,x)\right\|_{B^s_{2,r}}\le\frac{1}{4}, \tag{22}$$

则有

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|v(t,x)\right\|_{B^s_{2,r}}<\infty$$

成立。显然，这是可以做到的。事实上，由引理 1 之(4)收敛性知，可以找到足够大的 j，使得

$$\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\left\|\left(\mathrm{Id}-S_j\right)u_0\right\|_{B^s_{2,r}}\le\frac{1}{8}.$$

再由引理 3 知，存在足够小的 $\epsilon>0$，使得

$$\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)\left\|\left(1-\mathrm{e}^{\epsilon\partial_x^2}\right)\left(S_ju_0\right)\right\|_{B^s_{2,r}}\le\frac{1}{8}.$$

因此，我们可以取定 (j,ϵ) 使得(22)式成立。

再来看问题(21)。其等价的积分方程为

$$w(t,x)=S(t)w(0,x)-\frac{1}{2}\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}w^2\mathrm{d}\tau-\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}(wv)\mathrm{d}\tau,$$

其中 v 是初值 s 问题(20)的解。由引理 2 及定理 1 可知，对于 $\forall t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}(wv)\right\|_{B^s_{2,r}}&\le C\left\|w(t,\cdot)\right\|_{B^s_{2,r}}\left\|v(t,\cdot)\right\|_{B^s_{2,r}}\\ &\le C2\mathrm{e}^{\omega T}\left\|v(0,\cdot)\right\|_{B^s_{2,r}}\left\|w(t,\cdot)\right\|_{B^s_{2,r}},\\ &\le\tilde{C}\left\|w(t,\cdot)\right\|_{B^s_{2,r}}\end{aligned}$$

其中 $\tilde{C}$ 是依赖于初值 u_0，时间 T 及参数 j,ε 的常数。因此，可以用与定理 1 完全类似的方法得到其局部适定性；即初值问题(21)存在唯一的解 $w\in L^\infty\left([0,\delta];B^s_{2,r}\right)$。这里的 δ 为一个异于 T 的正值，不妨令 $\delta<T$。现在我们来说明其在给定的时间段 0 到 T 内不发生爆破；即

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|w(t,x)\right\|_{B^s_{2,r}}<\infty. \tag{23}$$

注意到，$u_0(x)$ 的低频截断 $S_ju_0\in B^0_{2,2}$ (实际上 $S_ju_0\in B^\sigma_{2,l}$，其中 $\sigma\in\mathbb{R},1\le l\le\infty$)。由于空间 $B^0_{2,2}$ 与空间 L^2 一致，再利用热算子半群 $\mathrm{e}^{\epsilon\partial_x^2}$ 的光滑作用可知 $w(0,x)=\mathrm{e}^{\epsilon\partial_x^2}\left(S_ju_0\right)\in H^1(\mathbb{R})$。对方程(21)两边同乘 $2w$ 后再对空间变量 x 积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}w^2+w_x^2\mathrm{d}x-2\int_{\mathbb{R}}wvw_x\mathrm{d}x=0, \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}2\int_{\mathbb{R}} wvw_x \mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}} v^2w^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} w_x^2\mathrm{d}x \\ &\le \left\|v^2\right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} w^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} w_x^2\mathrm{d}x \\ &\le \max\left\{\|v\|_{L^\infty}^2, 1\right\}\|w\|_{H^1}^2.\end{aligned} \tag{25}$$

由定理的假设，有嵌入关系 $B_{2,r}^s \hookrightarrow L^\infty$，再结合(24)~(25)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{H^1}^2 \le CV(t)\|w\|_{H^1}^2, \tag{26}$$

其中 $V(t) = \max\left\{\|v\|_{B_{2,r}^s}^2, 1\right\}$。然后，由 Gronwall 引理，及 $\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{B_{2,r}^s} < \infty$ 得

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|w(t,x)\right\|_{H^1}^2 \le \exp\left\{C\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t V(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\left\|w(0,x)\right\|_{H^1}^2 \le W\left\|w(0,x)\right\|_{H^1}^2 < \infty,$$

其中 $W = \exp\left\{CT\left(\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{B_{2,r}^s}^2 + 1\right)\right\}$。最后，由嵌入关系 $B_{2,2}^1 \hookrightarrow B_{2,r}^s$，得(23)成立。这样我们就证明了该定理。

注意到，由于技术原因，当第三指标 $r=\infty$ 时，我们不能得到全局性。这是由于当 $r=\infty$ 时，无法保证引理 1 中(4)收敛性成立。同时注意到，在上述证明中，对于使得(22)成立的频率阈值 j 而言，我们只能得到其存在性，但是无法进一步给出其精确的估计；这与我们无法控制正项级数部分和数列收敛快慢类似。事实上，

$u_0 \in B_{2,r}^s \Leftrightarrow \sum_{j\ge -1} 2^{jsr}\left\|\Delta_j u_0\right\|_{L^2}^r < \infty \Rightarrow \sum_{k\ge j} 2^{ksr}\left\|\Delta_k u_0\right\|_{L^2}^r = \left\|\left(\mathrm{Id}-S_j\right)u_0\right\|_{B_{2,r}^s}^r \to 0$ 当 $j\to\infty$，因此，可以找到一个足够大的 j，使得

$$\left\|\left(\mathrm{Id}-S_j\right)u_0\right\|_{B_{2,r}^s} \le \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\omega T}-1\right)^{-1}$$

成立。

5. 总结

本文中，我们详细讨论了 BBM 方程在 Besov 空间中的适定性问题，特别的得到了其在 $B_{2,r}^s(\mathbb{R})$ 中的全局适定性，部分回答了我们在引言中提出的问题。同样地，对于 BBM 方程在齐次 Besov 空间 $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R})$ 中的适定性亦可进行讨论。

参考文献

[1] Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J. (1972) Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **272**, 47-78.

[2] Korteweg, D.J. and de Vries, G. (1895) XLI. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **39**, 422-443. https://doi.org/10.1080/14786449508620739

[3] Avrin, J. (1987) The Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation in N with Singular Initial Data. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **11**, 139-147. https://doi.org/10.1016/0362-546x(87)90032-0

[4] Bourgain, J. (1993) Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations. *Geometric and Functional Analysis*, **3**, 107-156. https://doi.org/10.1007/bf01896020

[5] Bourgain, J. (1998) Refinements of Strichartz' Inequality and Applications to 2D-NLS with Critical Nonlinearity. *International Mathematics Research Notices*, **1998**, 253-283. https://doi.org/10.1155/s1073792898000191

[6] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2003) Sharp Global Well-Posedness for KDV and

Modified KDV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. *Journal of the American Mathematical Society*, **16**, 705-749. https://doi.org/10.1090/s0894-0347-03-00421-1

[7] Bona, J. and Tzvetkov, N. (2009) Sharp Well-Posedness Results for the BBM Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **23**, 1241-1252. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.23.1241

[8] Panthee, M. (2011) On the Ill-Posedness Result for the BBM Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **30**, 253-259. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.30.253

[9] Roumégoux, D. (2010) A Symplectic Non-Squeezing Theorem for BBM Equation. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **7**, 289-305. https://doi.org/10.4310/dpde.2010.v7.n4.a1

[10] Wang, M. (2016) Sharp Global Well-Posedness of the BBM Equation in L^p Type Sobolev Spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**, 5763-5788. https://doi.org/10.3934/dcds.2016053

[11] Banquet, C. and Villamizar-Roa, É.J. (2021) Time-decay and Strichartz Estimates for the BBM Equation on Modulation Spaces: Existence of Local and Global Solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **498**, Article ID: 124934. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.124934

[12] Wang, M. (2022) Cauchy Problem for the BBM Equation in $L^q l^2$. *Applied Mathematics Letters*, **132**, Article ID: 108119. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108119

[13] Bona, J.L., Pritchard, W.G. and Scott, L.R. (1985) Numerical Schemes for a Model for Nonlinear Dispersive Waves. *Journal of Computational Physics*, **60**, 167-186. https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90001-4

[14] Angulo, J., Scialom, M. and Banquet, C. (2011) The Regularized Benjamin-Ono and BBM Equations: Well-Posedness and Nonlinear Stability. *Journal of Differential Equations*, **250**, 4011-4036. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.12.016

[15] Olver, P.J. (1979) Euler Operators and Conservation Laws of the BBM Equation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **85**, 143-160. https://doi.org/10.1017/s0305004100055572

[16] Hamdi, S., Enright, W.H., Schiesser, W.E. and Gottlieb, J.J. (2004) Exact Solutions and Invariants of Motion for General Types of Regularized Long Wave Equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, **65**, 535-545. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2004.01.015

[17] Rosier, L. and Zhang, B. (2013) Unique Continuation Property and Control for the Benjamin-Bona-Mahony Equation on a Periodic Domain. *Journal of Differential Equations*, **254**, 141-178. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.014

[18] Hong, C. and Ponce, G. (2024) On Special Properties of Solutions to the Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Journal of Differential Equations*, **393**, 321-342. https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.02.021

[19] Fonseca, G., Riaño, O. and Rodriguez-Blanco, G. (2025) On the Persistence Properties for the Fractionary BBM Equation with Low Dispersion in Weighted Sobolev Spaces. *Nonlinear Analysis*, **250**, Article ID: 113653. https://doi.org/10.1016/j.na.2024.113653

[20] Wang, M. (2014) Long Time Dynamics for a Damped Benjamin-Bona-Mahony Equation in Low Regularity Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **105**, 134-144. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.04.013

[21] Wang, M. (2024) Global Attractor for the Damped BBM Equation in the Sharp Low Regularity Space. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **75**, Article No. 142. https://doi.org/10.1007/s00033-024-02288-7

[22] Wang, M. (2023) Well Posedness and Global Attractors for the 3D Periodic BBM Equation Below the Energy Space. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **36**, 3599-3621. https://doi.org/10.1007/s10884-023-10253-7

[23] Chen, P., Wang, B., Wang, R. and Zhang, X. (2022) Multivalued Random Dynamics of Benjamin-Bona-Mahony Equations Driven by Nonlinear Colored Noise on Unbounded Domains. *Mathematische Annalen*, **386**, 343-373. https://doi.org/10.1007/s00208-022-02400-0

[24] Dell'Oro, F., Goubet, O., Mammeri, Y. and Pata, V. (2020) Global Attractors for the Benjamin-Bona-Mahony Equation with Memory. *Indiana University Mathematics Journal*, **69**, 749-783. https://doi.org/10.1512/iumj.2020.69.7906

[25] Bahouri, H., Chemin, J.Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Springer-Verlag.

[26] Grafakos, L. (2014) Modern Fourier Analysis. 3rd Edition, Springer-Verlag, 1-20.

[27] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, 1-10.

[28] Stein, E.M. and Shakarchi, R. (2005) Real Analysis, Measure theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press, 75-85. https://doi.org/10.1515/9781400835560