Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 287-297
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155178

Hans汉斯

含分布时滞和Allee效应的单物种模型的动力学分析

龙驰宇

西北民族大学数学与计算机科学学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年4月13日；录用日期：2025年5月15日；发布日期：2025年5月31日

摘 要

生物数学作为生物学与数学的交叉学科，旨在挖掘数学工具在生命科学中的应用潜力，并通过构建数学模型解决生物学问题。基于微分方程的单种群动态模型研究是该领域的重要方向之一。在此基础上，我们结合常微分方程理论、定性分析和非线性系统技术，设计了一种包含分布时滞和Allee效应的Logistic型种群模型。通过对系统结构与动力学行为的深入分析，我们阐明了模型在边界稳定状态下的规律，并给出了平衡状态及其维持条件。

关键词

分布时滞，Allee效应，极限环，食饵－捕食系统

Dynamical Analysis of a Single Species Model with Distributed Delay and Allee Effect

Chiyu Long

College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 13th, 2025; accepted: May 15th, 2025; published: May 31st, 2025

Abstract

Biomathematics, as an interdisciplinary field combining biology and mathematics, aims to explore the potential of mathematical tools in the life sciences and solve biological problems by constructing mathematical models. The study of single-population dynamic models based on differential equations is one of the key directions in this field. Building on this foundation, we have developed a

文章引用: 龙驰宇. 含分布时滞和 Allee 效应的单物种模型的动力学分析[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 287-297.
DOI: 10.12677/pm.2025.155178

Logistic-type population model incorporating distributed delays and the Allee effect by integrating the theory of ordinary differential equations, qualitative analysis, and nonlinear system techniques. Through an in-depth analysis of the system's structure and dynamic behavior, we elucidate the patterns of the model under boundary stability and provide the equilibrium states along with their maintenance conditions.

Keywords

Distribution Time Delay, Allee Effect, Limit Cycle, Predator-Prey Model

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

众所周知，对于自然种群来说，时间延迟现象是很常见的。为了反映依赖于系统过去历史的模型的动力学行为，在形成具有生物学意义的数学模型时，通常需要考虑时滞的影响。时滞微分方程由于其广泛的应用，近年来引起了人们的极大兴趣。它们是用作描述物理学、生物学、生理学和工程学中各种现象的数学模型。近年来，建立一个带有时滞的生物模型系统越来越常见。种群数量和种群发展是一个很复杂的课题，他可能受到过去一段时间的影响，也可能会受到未来一段时间状态的影响，这就是“时滞”的概念。在日常生活中，包含人类在内的所有物种都会受到时滞的影响，所以，研究含有时滞的生物模型就很有必要，更加具备生物意义。生态系统中的时滞一般分为两类，即“离散时滞”和“分布时滞”，和传统的离散时滞相比，连续的分布时滞更能合理地反映出时滞现象在动力系统中的连续变化过程。

单种群模型作为生物数学研究的重要领域，其发展经历了多个阶段。最初由 Verhulst 提出 Logistic 增长模型，后经 Volterra [1]扩展为时滞 Logistic 模型，即著名的单种群 Logistic 模型：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=rN(t)\left[1-\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t}G(t-s)N(s)\mathrm{d}s\right]$$

随后，学者们引入了捕食者–猎物动态模型，其中关键工作来自 Kang 和 Udiani [2]，他们引入了具有 Allee 效应的单种群演化模型。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)-\dfrac{ax}{hax+1}=x\left[r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)-\dfrac{a}{hax+1}\right]=xH(x)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

并在考虑 Allee 效应的背景下提出了演化模型，并通过稳定性分析探讨了边界平衡点的行为。与此同时，付胜男[3]深入研究了分布时滞和非线性收获对种群增长的影响，为单种群模型提供了重要理论框架。在引入反馈控制后，方侃等[4]研究表明 Allee 效应会导致系统不稳定，种群密度呈现负相关性。为进一步探索复杂环境下种群行为，陈贤礼[5]在随机单种群模型中加入非线性扰动，并构造了适当的刘维尔函数以确保唯一平稳分布。此外，在最优收获策略研究方面，王静等[6]等人展示了基于最大收获原则的稳定策略，其结果表明种群在特定时间间隔内能够实现最高产量。

这些研究为理解单种群发展规律提供了多维度视角，不仅涵盖了传统 Logistic 模型和其扩展，还涉及捕食者–猎物动态、Allee 效应、反馈控制以及环境扰动等关键因素。

在构建含有分布时滞和 Allee 效应的单种群模型时，选择合适的分布时滞核函数对于准确捕捉种群动态至关重要。这种核函数 $\omega(\cdot)$，体现在公式 $\omega\int_{-\infty}^{t}\alpha e^{-\alpha(t-s)}x(s)ds$ 中，不仅增加了模型的生物学现实性，还反映了过去时间点对当前种群密度的累积效应。具体而言，不同的生物系统可能因繁殖率、死亡率或迁徙活动等受过去一段时间内的资源可用性和环境条件影响而表现出不同的滞后特性，通过选择适当的核函数(如指数核或弱核)，可以模拟这些特性并适应不同情景下的种群动态分析。此外，结合 Allee 效应，该模型能够更全面地描绘出小规模种群面临的挑战，包括由于低种群密度导致的繁殖困难及其它生存障碍如何随着时间推移和环境变化而演变。因此，合理选择分布时滞核函数不仅增强了我们对特定生物过程的理解，也为生态管理和保护策略提供了科学依据。

基于上述介绍，我们考虑含有分布时滞和 Allee 效应的单种群模型，如下：

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)\left(r-\omega\int_{-\infty}^{t}\alpha e^{-\alpha(t-s)}x(s)ds\right)-\frac{m}{x+n}$$

其中 $x(t)$ 表示单种群在 t 时刻的种群密度，r 表示种群的内禀增长率，$\frac{m}{x+n}$ 表示加法 Allee 效应，m 和 n 表示 Allee 效应常量，反映 Allee 效应的强弱，$\int_{-\infty}^{t}\alpha e^{-\alpha(t-s)}x(s)ds$ 是分布时滞项，ω，α 都是正常数。研究模型在正平衡点处的相关性质及 Hopf 分支。

以下是我们需要用到的引理：

引理 1 [7] 考虑下面的分数阶系统：

$$\frac{d^{\theta}x}{dt^{\theta}}=f(x)$$

其中 $0<\theta\le 1$，且 $x\in R^{n}$。系统的平衡点通过求解 $f(x)=0$ 计算，如果在平衡点处的雅可比矩阵 $J=\frac{\partial f}{\partial x}$ 的所有特征值 λ_i 满足 $\left|\arg(\lambda_i)\right|=\frac{\theta\pi}{2}$，则这些点是局部渐近稳定的。

引理 2 [7]设

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2\\ \frac{dy}{dt}=-x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2\end{cases}$$

令

$$W_1=A\alpha-B\beta,\quad W_2=\left[\beta(5A-\beta)+\alpha(5B-\alpha)\right]\gamma,\quad W_3=(A\beta+B\alpha)\gamma\delta.$$

其中

$A=a_{20}+a_{02}$，$B=b_{20}+b_{02}$，$\alpha=a_{11}+2b_{02}$，$\beta=b_{11}+2a_{02}$，$\gamma=b_{20}A^3-(a_{20}-b_{11})A^2B+(b_{02}-a_{11})A^2B-a_{02}B^3$，$\delta=a_{02}^2+b_{20}^2+a_{02}A+b_{20}B$。

则系统以原点为

1) 一阶细焦点，当且仅当 $W_1\neq 0$；2) 二阶细焦点，当且仅当 $W_1=0$，$W_2\neq 0$；3) 三阶细焦点，当且仅当 $W_1=0$，$W_2=0$，$W_3\neq 0$；4) 中心点，当且仅当 $k=w_1=w_2=w_3$。

此外，W_k 的符号决定了 $k=1,2,3$ 阶细焦点的稳定性，当 $W_k<0$ 时，系统的原点稳定，$W_k>0$，系统的原点不稳定，其中，$k=1,2,3$。

引理 3 [8]假设平面系统已化为如下形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y+Q(x,y)\end{cases}$$

设$O(0,0)$是其孤立奇点，且$P(x,y),Q(x,y)$是$O(0,0)$的充分小邻域$S_\sigma(O)$内次数不低于 2 的解析函数，于是存在函数$\Phi(x)$，满足$\Phi(x)+Q(x,\Phi(x))\equiv 0$，$|x|<\sigma$，令$Y(x)=P(x,F(x))=a_mX^m+[x]_{m+1}$，其中$a_m\neq 0$，$m\geq 2$于是有：

1) 当$m=2n+1$且$a_m>0$时，$O(0,0)$是不稳定结点；

2) 当$m=2n+1$且$a_m<0$时，$O(0,0)$是鞍点；

3) 当$m=2n$时，$O(0,0)$是鞍结点。另外，当$a_m>0(<0)$时，抛物扇形落在右(左)半平面。

引理 4 [7]若在单连通区域G内$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0,\forall(x,y)\in G$，则系统不存在全部位于$G$内的极限环。

2. 单种群模型

基于对文献的研究，在单种群模型中考虑 Allee 效应和分布时滞的情况，建立如下模型：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(r-\omega\int_{-\infty}^{t}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}x(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{m}{x+n}\tag{1}$$

其中$x(t)$表示单种群在t时刻的种群密度，r表示种群的内禀增长率，$\dfrac{m}{x+n}$表示加法 Allee 效应，m和n表示 Allee 效应常量，反映 Allee 效应的强弱，$\int_{-\infty}^{t}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}x(s)\mathrm{d}s$是分布时滞项，$\omega$，$\alpha$都是正常数。

接下来，利用文献[9]中的方法，作如下变换：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}x(s)\mathrm{d}s$$

则系统(1)等价于系统(2)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(r-\omega y)-\dfrac{m}{x+n}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y\end{cases}\tag{2}$$

讨论系统(2)平衡点的存在性，令

$$\begin{cases}P(x,y)=x(r-\omega y)-\dfrac{m}{x+n}=0\\ Q(x,y)=\alpha x-\alpha y=0\end{cases}$$

解此方程，容易得到

$$\begin{cases}x=y=0\\ x(r-\omega y)-\dfrac{m}{x+n}=0\end{cases}$$

显然$A(0,0)$，是系统(2)的一个平衡点，下面证明$A(0,0)$是一个鞍点。

系统(2)的雅克比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x}&\dfrac{\partial P}{\partial y}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}&\dfrac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(r-\omega y)+\dfrac{m}{(x+n)^2}&-\omega x\\ \alpha&-\alpha\end{pmatrix}\quad J|_0=\begin{pmatrix}\dfrac{m}{n^2}&0\\ \alpha&-\alpha\end{pmatrix}$$

可以得到

$$\det\left(J\big|_0\right)=-\alpha\frac{m}{n^2}<0,\quad \mathrm{tr}\left(J\big|_0\right)=\frac{m}{n^2}-\alpha$$

显而易见平衡点 $A(0,0)$ 是一个鞍点，且不稳定。

3. 系统的存在性及稳定性

3.1. 系统(2)正平衡点处的存在性

考虑系统(2)的正平衡点，

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(r-\omega y\right)-\dfrac{m}{x+n}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y\end{cases}\tag{2}$$

令其为 0，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(r-\omega y\right)-\dfrac{m}{x+n}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y=0\end{cases}\tag{3}$$

得到

$$\omega x^3+\left(\omega n-r\right)x^2-mx+m=0\tag{4}$$

若 $E\left(\dot{x},\dot{y}\right)$ 是系统(2)的一个正平衡点，则 $\dot{x}$ 是方程(4)的一个根，可以清楚知道方程(4)有两个根，方程的根可以用求根的公式求出。接下来，我们考虑系统(4)在 $E\left(\dot{x},\dot{y}\right)$ 的雅克比矩阵，则可以得到，

$$J\left(E\right)=\begin{pmatrix}x\left(r-\omega y\right)+\dfrac{m}{\left(x+n\right)^2} & -\omega x\\ \alpha & -\alpha\end{pmatrix}$$

且

$$\det\left(J\left(E\right)\right)=-\alpha\left(x\left(r-\omega y\right)+\frac{m}{\left(x+n\right)^2}\right)+\alpha\omega x$$

$$\mathrm{tr}\left(J\left(E\right)\right)=x\left(r-\omega y\right)+\frac{m}{\left(x+n\right)^2}-\alpha$$

易知

当 $\det\left(J\left(E\right)\right)\neq 0$ 时，$E\left(\dot{x},\dot{y}\right)$ 是一个初等平衡点，当 $\det\left(J\left(E\right)\right)<0$ 时，$E\left(\dot{x},\dot{y}\right)$ 是一个双曲鞍点，当 $\det\left(J\left(E\right)\right)=0$ 时，$E\left(\dot{x},\dot{y}\right)$ 是一个退化平衡点。

3.2. 系统(2)正平衡点处的稳定性

定理 1：$A=\left(\omega n-r\right)^2-3\omega m,\Delta=\dfrac{10A^3}{729\omega^6}$

1) 若 $\Delta>0$，系统(2)有唯一正平衡点 $\left(x^*,y^*\right)$，他是一个初等平衡点，不是鞍点。

2) 若 $\Delta=0$，

① $A>0$，系统(2)有一个初等平衡点，有一个退化平衡点。分别为

$$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)=\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)\text{和}\ E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

② $A=0$，系统(2)有一个退化平衡点：$E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$，且唯一。

3) 若$\Delta<0$，系统(2)有三个不同的正平衡点$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right),E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right),E_3^*\left(x_3^*,y_3^*\right)$，这三个点都是初等平衡点。

证明：对于一元三次方程

$$\omega x^3+\left(\omega n-r\right)x^2-mx+m=0$$

重根判别式为：

$$B=\left(r-\omega n\right)m-9\omega m$$

令$x=x_1+\frac{r-\omega n}{3\omega}$，带入式(4)中，并用$x$代替$x_1$，即$x^3+px+q$，其中$p=\frac{\left(\omega n-r\right)^2}{3\omega^2}$，$q=\frac{2\left(\omega n-r\right)^3}{27\omega^3}$。

总判别式为

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{10\left(\omega n-r\right)^6}{729\omega^6}$$

首先讨论定理 1 下$\Delta=0$时，$A>0$的情况，寻找适当的参数值使得系统(2)在$\det\left(J\left(E_2\right)\right)>0$，$\mathrm{tr}\left(J\left(E_2\right)\right)=0$的条件下有一个初等平衡点$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)$，在$\det\left(J\left(E_2\right)\right)=0$，$\mathrm{tr}\left(J\left(E_2\right)\right)=0$的条件下有一个退化平衡点$E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)$，若$\det\left(J\left(E_2\right)\right)=0$且$\mathrm{tr}\left(J\left(E_2\right)\right)=0$。通过计算，我们得到

$$x_2^*=\frac{\alpha}{\omega},y_2^*=\frac{\alpha}{\omega},\quad m=\frac{b^2}{\alpha-b},n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$$

其中$b=\frac{\alpha\left(r-\alpha\right)}{\omega}$，即系统(2)的退化平衡点$E_2^*$为$E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$。

在$\Delta=0$时，$A>0$的情况下，利用盛金公式，有

$$\begin{cases}X_1=\frac{r-\omega n}{\omega}+K\\ X_2=X_3=\frac{-K}{2}=\frac{\alpha}{\omega}\end{cases}$$

即$K=\frac{-2\alpha}{\omega}$，$X_1=\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}$。

即系统(2)在$\det\left(J\left(E_2\right)\right)>0$，$\mathrm{tr}\left(J\left(E_2\right)\right)=0$的条件下的平衡点

$$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)=\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right).$$

综上，在$\Delta=0$时，$A>0$时，系统(2)有两个正平衡点

$$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)=\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right),\quad E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$$

接下来，我们讨论 $\Delta=0$， $A=0$ 的情况。运用盛金公式，我们得到

$$X_1=X_2=X_3=\frac{r-\omega n}{3\omega}=\frac{m}{r-\omega n}=\sqrt{3}a$$

即 $m=27\omega, r=\omega(n+9)$ 。此时系统(2)有唯一正平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$，它是一个退化平衡点。首先讨论平衡点：

$$E_1^*\left(x_1^*,y_1^*\right)=\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$$

定理 2：当 $m=\frac{b^2}{\alpha-b}, n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$，其中 $t=\frac{\alpha(r-\alpha)}{\omega}$，且 $r>2\alpha$，系统(2)有正平衡点 $E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$，且 $E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$ 是一个不稳定的一阶细焦点。

证明：若定理 2 成立，那么系统(2)变为系统(5)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(r-\omega y)-b\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y\end{cases}\tag{5}$$

令 $u=x-\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}, v=y-\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}$，将点 $E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$ 移到原点，并将 u,v 记为 x,y，则系统(5)在原点的泰勒级数展开式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\alpha-\dfrac{\omega b}{\alpha-b}\right)x+\left(\alpha-r-\dfrac{\omega b}{\alpha-b}\right)y-\omega xy+O\left(|x,y|^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y\end{cases}$$

其中 $O\left(|x,y|^2\right)$ 是关于 x,y 的至少为二阶的函数。

下面，作非线性变换 $x=-\frac{\sigma}{\alpha}-\frac{\eta}{c}, y=-\frac{\eta}{c}, t=\frac{\tau}{c}$，仍用 x,y,t 表示 σ,η,τ。

则系统(5)变为系统(6)。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+\dfrac{\frac{\alpha\omega b}{\alpha-b}-\alpha^2}{\left(\frac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\frac{r-2\alpha}{c}\right)}x+\dfrac{\frac{\omega(\alpha+c)}{\alpha c}}{\left(\frac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\frac{r-2\alpha}{c}\right)}xy-\dfrac{\frac{\alpha+c}{\alpha c^2}}{\left(\frac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\frac{r-2\alpha}{c}\right)}y^2+O\left(|x,y|^3\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases}\tag{6}$$

利用引理 3，得

$a_{20}=0$，$a_{02}=-\dfrac{\dfrac{\alpha+c}{\alpha c^2}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)}$，$a_{11}=\dfrac{\dfrac{\omega(\alpha+c)}{\alpha c}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)}$，$b_{20}=b_{02}=b_{11}=0$，$A=a_{20}+a_{02}=-\dfrac{\dfrac{\alpha+c}{\alpha c^2}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)}$，$B=b_{20}+b_{02}=0$，

$$\alpha=a_{11}+2b_{02}=a_{11}，\ \beta=b_{11}+2a_{02}=2a_{02}.$$

所以

$$W_1=A\alpha-B\beta=-\frac{\dfrac{\alpha+c}{\alpha c^2}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)}\cdot\frac{\dfrac{\omega(\alpha+c)}{\alpha c}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)}=\frac{\dfrac{-\omega(\alpha+c)^2}{\alpha^2c^3}}{\left(\dfrac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\dfrac{r-2\alpha}{c}\right)^2}$$

当 $r>2\alpha$ 时，

$$\left(\frac{2\omega b}{(\alpha-b)c}+\frac{r-2\alpha}{c}\right)^2\neq 0,\ \frac{-\omega(\alpha+c)^2}{\alpha^2c^3}<0$$

所以得到点

$$E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\dfrac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\dfrac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$$

是不稳定的一阶细焦点。

定理 3：当 $m=\dfrac{b^2}{\alpha-b},n=\dfrac{b}{\alpha-b}-\dfrac{\alpha}{\omega}$，其中 $b=\dfrac{\alpha(r-\alpha)}{\omega}$，且 $r>2\alpha$，系统 (2) 有正平衡点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\dfrac{\alpha}{\omega},\dfrac{\alpha}{\omega}\right)$，且 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\dfrac{\alpha}{\omega},\dfrac{\alpha}{\omega}\right)$ 是一个余维为 1 的尖点。

证明：令 $u=x-\dfrac{\alpha}{\omega},v=y-\dfrac{\alpha}{\omega}$，将点 $E_2^*\left(\dfrac{\alpha}{\omega},\dfrac{\alpha}{\omega}\right)$ 移到原点，继续用 u,v 表示 x,y，则系统(5)在原点的泰勒级数展开式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(r-\alpha)x-\alpha y-\omega xy+O\left(|x,y|^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha x-\alpha y\end{cases}\tag{7}$$

其中 $O\left(|x,y|^2\right)$ 是关于 x，y 的至少为二阶的函数。

在 $\mathrm{tr}\left(J|_{E_2^*}\right)=0$ 的情况下，$J|_{E_2^*}$ 为 $J|_{E_2^*}=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ \alpha & -\alpha\end{pmatrix}$，则可以得到，特征方程

$$\left|\lambda E-J|_{E_2^*}\right|=0,\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & \alpha\\ \alpha & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=0$$

即 $\lambda^2=0$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$，故 $E_2^*\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$ 是一个余维为 1 的奇点。

作非线性变换 $x=\overline{x}+\overline{y}, y=\overline{x}-\overline{y}, \mathrm{d}t=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{d}\tau$，继续使用 x,y,t 表示 $\overline{x},\overline{y},\tau$，则(6)系统变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha(r-2\alpha)x+\alpha(r+2\alpha)y-\alpha\omega x^2+\alpha\omega y^2+O\left(|x,y|^3\right)\triangleq 6\alpha^2y+P(x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha(r-2\alpha)x+\alpha(r-2\alpha)y-\alpha\omega x^2+\alpha\omega y^2+O\left(|x,y|^3\right)\triangleq Q(x,y)\end{cases}\tag{8}$$

在原点的充分小领域里进行如下变换，

$$x\to x,\quad 6\alpha^2y+P(x,y)\to y$$

则系统(7)变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\alpha\omega x^2\left[1+h(x)\right]+\alpha(r-2\alpha)x+\alpha(r-2\alpha)y+y^2f(x,y)+Q(x,y)\end{cases}$$

其中 $h(x),f(x,y)$ 都是解析函数，并满足 $h(0)=0$，从而原点是系统的一个奇点。由引理 2 知，系统(6)在原点处是一个退化奇点，即系统(2)的正平衡点 $E_2^*\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$ 是一个余维为 1 的退化奇点。

对(7)系统作如下变换：$y_1=x$，$y_2=\alpha x-\alpha y$，有

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=(r-2\alpha)y_1+y_2-\omega y_1^2+\frac{\omega}{\alpha}y_1y_2+O\left(|x,y|^3\right)\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\alpha(r-2\alpha)y_1-\alpha\omega y_1^2+\omega y_1y_2+O\left(|x,y|^3\right)\end{cases}$$

所以，可以得到 $\mu_1=-\alpha\omega,\mu_2=\omega$。故 $\mu_1\mu_2=-\alpha\omega^2<0\neq 0$，故平衡点 $E_2^*\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$ 是一个余维为 1 的尖点。

最后考虑 $\Delta=0,A=0$ 的情况。

当 $\Delta=0,A=0$ 时，可得系统有唯一正平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$，且 $m=27\omega,r=\omega(n+9)$，其中 $m=\frac{b^2}{\alpha-b},n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$，$b=\frac{\alpha(r-\alpha)}{\omega}$。

定理 3：i) 若 $m=27\omega,r=\omega(n+9)$，系统(2)有唯一退化正平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$，当 $3-\frac{\alpha}{\omega}<0$ 时，E^* 是一个稳定的退化节点。当 $3-\frac{\alpha}{\omega}>0$ 时，E^* 是一个不稳定的退化节点。

ii) 若 $m=27\omega,r=\omega(n+9)$ 且 $3-\frac{\alpha}{\omega}=0$，系统(2)有唯一的退化正平衡点 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$。

证明：i) 当 $\Delta=0,A=0$ 成立时，有 $m=27\omega,r=\omega(n+9)$，其中 $m=\frac{b^2}{\alpha-b}$，$n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$，$b=\frac{\alpha(r-\alpha)}{\omega}$，

有 $\det\left(J\left(E^*\right)\right)=0$， $\mathrm{tr}\left(J\left(E^*\right)\right)=3-\frac{\alpha}{\omega}$。

当 $3-\frac{\alpha}{\omega}\neq 0$ 时，得 $\mathrm{tr}\left(J\left(E^*\right)\right)\neq 0$，雅克比矩阵只有一个零特征根；当 $3-\frac{\alpha}{\omega}<0$ 时， E^* 是一个稳定的退化节点；当 $3-\frac{\alpha}{\omega}>0$ 时， E^* 是一个不稳定的退化节点。

ii) 当 $3-\frac{\alpha}{\omega}=0$ 时，有 $\mathrm{tr}\left(J\left(E^*\right)\right)=0$， $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 是一个零幂特征根。将系统(2)变为一个包含至少三阶项的标准型。

在 $E^*\left(x^*,y^*\right)=\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 处的雅克比矩阵为 $J\big|_{E^*}=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ \alpha & -\alpha\end{pmatrix}$，得 $\mathrm{tr}\left(J\big|_{E^*}\right)=0$， $\det\left(J\big|_{E^*}\right)=0$。此时，多项式的特征根是 $\lambda_1=\lambda_2=0$，故 $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 是一个余维为 1 的奇点。

由引理 4 知，此时系统的解 $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 满足条件 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0$，则系统不存在全部位于 G 内的极限环。继续讨论在此种情况下是否有围绕点 $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 的闭轨。

运用 Dulac 判断，取 $B=x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$，其中 α,β 为待定常数，即

$$D\triangleq\frac{\alpha(BP)}{\alpha x}+\frac{\alpha(BQ)}{\alpha y}$$
$$=x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left[(\alpha r+2r-\alpha\beta)x^2-b(\alpha+1)x+a^2\alpha(r-\beta)-\omega(\alpha+2)x^2y-a^2\alpha\omega y+\alpha(\beta-1)x^3y^{-1}+a^2\alpha(\beta-1)xy^{-1}\right]$$

由于 x,y 定号，要使 D 不变号，那么设

$$\alpha=\frac{2r}{1-r}(0<r<1),\beta=1$$

即 D 变为

$$D\triangleq x^{\alpha-1}\left[-\frac{(r+1)b}{1-r}x-2a^2r-\frac{2r\omega}{1-r}y\left(x^2+a^2\right)-2\omega x^2y\right]$$

可知，D 不变号，那么平衡点 $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 周围不存在闭轨，又因为 $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 是一个局部渐进稳定的奇点，所以当 $3-\frac{\alpha}{\omega}=0$ 成立时， $E^*\left(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$ 是全局稳定的。

4. 结论

我们通过研究此类单种群模型，得到了不同条件下的正平衡点的性态，结论如下：

1) 当 $\Delta=0$， $A=0$， 且 $m=\frac{b^2}{\alpha-b},n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$， $r>2\alpha$ 时，系统 (2) 有正平衡点 $E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$，且 $E_1^*\left(\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega},\frac{r-\alpha+\frac{\omega b}{\alpha-b}}{\omega}\right)$ 是一个不稳定的一阶细焦点。

2) 当 $\Delta=0$，$A=0$，且 $m=\frac{b^2}{\alpha-b},n=\frac{b}{\alpha-b}-\frac{\alpha}{\omega}$，$r>2\alpha$ 时，系统(2)有正平衡点 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$，且 $E_2^*\left(x_2^*,y_2^*\right)=\left(\frac{\alpha}{\omega},\frac{\alpha}{\omega}\right)$ 是一个余维为 1 的尖点。

3) 当$\Delta=0, A=0$时

i) 若$m=27\omega, r=\omega(n+9)$，系统(2)有唯一退化正平衡点$E^*(x^*, y^*)=(\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$，当$3-\frac{\alpha}{\omega}<0$时，$E^*$是一个稳定的退化节点。当$3-\frac{\alpha}{\omega}>0$时，$E^*$是一个不稳定的退化节点。

ii) 若$m=27\omega, r=\omega(n+9)$且$3-\frac{\alpha}{\omega}=0$，系统(2)有唯一的退化正平衡点$E^*(x^*, y^*)=(\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$。

基金项目

本文在国家自然科学基金(12061061)资助下完成。

参考文献

[1] Volterra, V. (1934) Remarques sur la note de M. Régnier et Mlle. Lambin (tude dun cas dantagonisme microbien). *Comptes Rendus de Academie des Sciences Serie C*, **199**, 1684-1686.

[2] Kang, Y. and Udiani, O. (2014) Dynamics of a Single Species Evolutionary Model with Allee Effects. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **418**, 492-515. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.083

[3] 付胜男. 两类具有分布时滞和非线性收获的单种群模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 恩施: 湖北民族大学, 2019.

[4] 方侃, 陈晓英. 具有 Allee 效应单种群反馈控制模型的动力学分析[J]. 闽南师范大学学报, 自然科学版, 2021, 34(3): 39-45.

[5] 陈贤礼. 具有 Allee 效应及非线性扰动的随机单种群模型的平稳分布及灭绝性[J]. 系统科学与数学, 2019, 39(12): 2093-2104.

[6] Wang, J. and Wang, K. (2004) Optimal Control of Harvesting for Single Population. *Applied Mathematics and Computation*, **156**, 235-247. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.07.019

[7] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[8] 张芷芬. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[9] Li, X. and Huang, S. (2019) Stability and Bifurcation for a Single-Species Model with Delay Weak Kernel and Constant Rate Harvesting. *Complexity*, **2019**, Article ID: 1810385. https://doi.org/10.1155/2019/1810385