Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 212-220
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155170

随机藤壶–藻类–贻贝模型的灭绝性和持久性

黄梓轩，巫东兰，钟志业，陆玉梅

南宁师范大学数学与统计学院，广西 南宁

收稿日期：2025年4月14日；录用日期：2025年5月19日；发布日期：2025年5月29日

摘 要

本文主要考虑一个具有相互作用的潮间带岩石群落的随机藤壶–藻类–贻贝模型的灭绝性和持久性问题。首先证明了该模型具有唯一的全局正解。其次，证明了藤壶–贻贝相互作用导致藤壶–贻贝灭绝。最后，证明了藤壶–藻类–贻贝相互作用的持久性以及藤壶–藻类的灭绝性。

关键词

随机藤壶–藻类–贻贝模型，全局正解，持久性，灭绝性

Extinction and Persistence of the Random Barnacle-Algae-Mussel Model

Zixuan Huang, Donglan Wu, Zhiye Zhong, Yumei Lu

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 19th, 2025; published: May 29th, 2025

Abstract

This article mainly considers the extinction and persistence issues of a stochastic barnacle algae mussel model with interacting intertidal rock communities. Firstly, it has been proven that the model has a unique global positive solution. Secondly, it has been proven that the interaction between barnacles and mussels led to their extinction. Finally, the persistence of the interaction between barnacles, algae, and mussels, and the extinction of barnacles, algae, were demonstrated.

Keywords

Random Barnacle-Algae-Mussel Model, Global Positive Solution, Persistence, Extinction

文章引用：黄梓轩，巫东兰，钟志业，陆玉梅．随机藤壶-藻类-贻贝模型的灭绝性和持久性[J]．理论数学，2025，15(5)：212-220. DOI: 10.12677/pm.2025.155170

1. 引言

在自然生态系统中测试混沌是一个挑战，尽管有许多数学模型[1]-[6]和实验室实验[7] [8]表明物种相互作用可以产生混沌行为。在最近，Benincà 等人的文献[9]中，他们报告了位于新西兰北岛罗德尼角－奥卡卡里角海洋保护区的岩石潮间带群落中藤壶、甲壳藻类和贻贝种群 20 年时间序列的记录数据。数据显示，在混乱的边缘，多年来一直是一个复杂的周期。首先，裸露的岩石被藤壶和甲壳藻类殖民，然后它们被贻贝过度生长，随后贻贝的分离再次返回裸露的岩石。数据显示出不规则的物种波动。Benincà 等人[9]根据这些数据，建立了基于种间相互作用的潮间带群落斑块占有率模型。一些学者研究发现，甲壳藻类和贻贝对温度波动非常敏感，其死亡率受季节温度变化的影响，夏季死亡率高，冬季死亡率低。在 F (T)的表达式中，代表季节强迫的强度，T 平均值是年平均海表面温度 17.1℃，$T_{\max} = 20.5e$ 是在一年中的增暖日，即延迟 32 天的 2 月 1 日。然而，藤壶的死亡率不受季节温度变化的影响。对于现实世界的生态社区来说，潮间岩池生态系统中的不稳定波动是由导致混沌动力学的竞争相互作用引起的。事实上，Benincà 等人[9]给出了大量的数值模拟表明，在某些参数范围内，潮间带群落斑块占有率模型确实有可能在混沌边缘出现多年的复杂循环序列。为了理解在混沌边缘由周期性演替维持的物种波动的机制，Benincà 等人[9]提出了一个具有相互作用的潮间带岩石群落的藤壶－藻类－贻贝模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left[\alpha\left(1-x-z-w\right)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]+y\left[\alpha\left(1-x-z-w\right)+\mu\right], \\ \dot{y} = \beta_1 xz - y\left(\gamma w+\delta+\mu\right), \\ \dot{z} = z\left[\left(\beta_2-\mu\right)-\beta_2 z-\left(\beta_2+\gamma\right)w+\left(\beta_1-\beta_2\right)x\right], \\ \dot{w} = w\left[\gamma\left(x+z\right)-\nu\right], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，α 为裸岩上藤壶定殖率；β_1 为甲壳藻类在藤壶上的定殖率；β_2 为裸岩上甲壳藻类的定殖率；γ 为贻贝在藤壶和甲壳藻类上的定殖率；δ，μ，ν 分别为藤壶、甲壳藻类和贻贝的死亡率。设 x 为无甲壳藻类的藤壶所占据的斑块的分数，设 y 为长满甲壳藻类的藤壶所占据的分数。此外，设 z 为甲壳藻类所占的分数，其中包括藤壶 y 上的甲壳藻类和裸岩上的甲壳藻类，设 w 为贻贝所占的分数。设 R 为裸岩的分数，且 $R = 1-x-z-w$。

事实上，自然界中存在各种类型的随机噪声。Robert 等人[10]将环境干扰大致分为两类：基于物理的干扰(例如风暴、气候突变、火山爆发和森林火灾)和基于生物的种群干扰，如过度捕捞、入侵和疾病及其相互作用。正如 Scheffer 等人[11]指出的那样，所有生态系统都会受到气候、营养负荷、栖息地破碎化或生物开发的逐渐变化的影响。人们通常认为大自然会以平稳的方式对逐渐的变化做出反应。然而，对湖泊、珊瑚礁、海洋、森林和干旱土地的研究表明，平稳的变化可能会因突然急剧转变为相反的状态而中断。因此，在确定性藤壶－藻类－贻贝模型(1.1)引入环境噪声，得到了一个具有相互作用的潮间带岩石群落的随机藤壶－藻类－贻贝模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \left(x\left[\alpha\left(1-x-z-w\right)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]+y\left[\alpha\left(1-x-z-w\right)+\mu\right]\right)\mathrm{d}t+\sigma_1 x\mathrm{d}B_t, \\ \mathrm{d}y = \left[\beta_1 xz-y\left(\gamma w+\delta+\mu\right)\right]\mathrm{d}t+\sigma_2 y\mathrm{d}B_t, \\ \mathrm{d}z = \left(z\left[\left(\beta_2-\mu\right)-\beta_2 z-\left(\beta_2+\gamma\right)w+\left(\beta_1-\beta_2\right)x\right]\right)\mathrm{d}t+\sigma_3 z\mathrm{d}B_t, \\ \mathrm{d}w = w\left[\gamma\left(x+z\right)-\nu\right]\mathrm{d}t+\sigma_4 w\mathrm{d}B_t, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中σ_1，σ_2，σ_3，σ_4为噪声强度，B_t为标准布朗运动。

2. 正解存在唯一性

本小节，主要考虑一个具有相互作用的潮间带岩石群落的随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)全局正解的存在性。

定理 2.1 对任意的初始值$\left(x(0),y(0),z(0),w(0)\right)\in R_+^4$，则随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)存在唯一解$(x,y,z,w)$，并且解在$R_+^4$中以概率 1 存在，即对$\forall t\ge 0$，$(x,y,z,w)\in R_+^4, a.s.$

证明：由于随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的系数满足局部 Lipschitz 条件，所以对任意的初始值$\left(x(0),y(0),z(0),w(0)\right)\in R_+^4$，都存在唯一的局部解$(x,y,z,w)\in R_+^4$, a.s., $t\in[0,\tau_e)$，其中τ_e表示爆破时间。如果我们要证明这个解是全局的，仅需证明$\tau_e=\infty$, a.s. 为此，令$n_0\ge 1$充分大，使得 x，y，z，和 w 都在区间$\left[\frac{1}{2^{n_0}},2^{n_0}\right]$内。定义一个停时[10]

$$\tau_n=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\le\frac{1}{2^n}\text{ or}\max\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\ge 2^n\right\},$$

其中令$\inf\varnothing=\infty$，显然τ_n单增，当$n\to\infty$时，证明如下：

因为

$$\begin{aligned}&\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\le\frac{1}{2^n}\text{ or }\max\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\ge 2^n\right\}\\ &\supset\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\le\frac{1}{2^{n+1}}\text{ or }\max\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\ge 2^{n+1}\right\},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\le\frac{1}{2^n}\text{or }\max\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\ge 2^n\right\}\\ &\le\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\le\frac{1}{2^{n+1}}\text{ or }\max\left\{x(t),y(t),z(t),w(t)\right\}\ge 2^{n+1}\right\},\end{aligned}$$

即

$$\tau_n\le\tau_{n+1},\quad n\to\infty$$

令$\tau=\lim_{n\to\infty}\tau_n$，由于$\tau_\infty\le\tau_e$, a.s.，若$\tau_\infty=\infty$, a.s. ，那么$\tau_e=\infty$, a.s. 且$\left(x(t),y(t),z(t),w(t)\right)\in R_+^4$ a.s. 对$\forall t\ge 0$。换句话说，为了完成证明，我们仅需证明$\tau_\infty=\infty$, a.s. 。如果假设不成立，

即

$$P\left\{\tau_\infty=\infty\right\}^c=P\left\{\tau_\infty<\infty\right\}=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\tau_n\le n\right\},$$

$$P\left\{\tau_\infty\le T\right\}>\varepsilon.$$

又因为

$$P\left\{\tau_\infty\le T\right\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\tau_n\le T\right\}\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\tau_n\le T\right\}>\varepsilon,$$

从而存在一个正常数$n_1\ge n_0$使得

$$P\left\{\tau_n\le T\right\}\ge\varepsilon,\quad n\ge n_1.$$

定义一个 C^2 − 函数 $V: R_+^4 \to R_+ \cup \{0\}$ 为

$$V(x,y,z,w)=\left(x-r_1-r_1\ln\frac{x}{r_1}\right)+(y-1-\ln y)+\left(z-r_2-r_2\ln\frac{z}{r_2}\right)+(w-1-\ln w),$$

其中 $r_i, i=1,2$ 是待定的正常数。这个函数的非负性可以从下列式子得出

$$u-1-\ln u\geq 0,\quad \forall u>0.$$

根据伊藤公式，可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(x,y,z,w)&=LV(x,y,z,w)\mathrm{d}t+(\sigma_1 x-\sigma_1 r_1)\mathrm{d}B_t\\&\quad+(\sigma_2 y-\sigma_2)\mathrm{d}B_t+(\sigma_3 z-r_2\sigma_3)\mathrm{d}B_t+(\sigma_4 w-\sigma_4)\mathrm{d}B_t\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}LV(x,y,z,w)=&\left(1-\frac{r_1}{x}\right)\left(x\left[\alpha(1-x-z-w)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]+y\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\right)\\&+\left(1-\frac{1}{y}\right)\left[\beta_1 xz-y(\gamma w+\delta+\mu)\right]+\left(1-\frac{1}{w}\right)w\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\\&+\left(1-\frac{r_2}{z}\right)\left(z\left[(\beta_2-\mu)-\beta_2 z-(\beta_2+\gamma)w+(\beta_1-\beta_2)x\right]\right)\\&+\frac{1}{2}\left(r_1\sigma_1^2+\sigma_2^2+r_2\sigma_3^2+\sigma_4^2\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

进一步整理，得到

$$\begin{aligned}LV(x,y,z,w)\leq&\left(1-\frac{r_1}{x}\right)\left(x\left[\alpha(1-x-z-w)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]+y\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\right)\\&+\left(1-\frac{1}{y}\right)\left[\beta_1 xz-y(\gamma w+\delta+\mu)\right]+\left(1-\frac{1}{w}\right)w\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\\&+\left(1-\frac{r_2}{z}\right)\left(z\left[(\beta_2-\mu)-\beta_2 z-(\beta_2+\gamma)w+(\beta_1-\beta_2)x\right]\right)\\&+\frac{1}{2}\left(r_1\sigma_1^2+\sigma_2^2+r_2\sigma_3^2+\sigma_4^2\right)\\&=x\left[\alpha(1-x-z-w)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]+y\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\\&-r_1\left[\alpha(1-x-z-w)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]-\frac{r_1 y}{x}\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\\&+\left[\beta_1 xz-y(\gamma w+\delta+\mu)\right]+w\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\\&-\frac{1}{y}\left[\beta_1 xz-y(\gamma w+\delta+\mu)\right]-\frac{1}{w}w\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\\&+z\left[(\beta_2-\mu)-\beta_2 z-(\beta_2+\gamma)w+(\beta_1-\beta_2)x\right]\\&-\frac{r_2}{z}\left(z\left[(\beta_2-\mu)-\beta_2 z-(\beta_2+\gamma)w+(\beta_1-\beta_2)x\right]\right)\\&+\frac{1}{2}\left(r_1\sigma_1^2+\sigma_2^2+r_2\sigma_3^2+\sigma_4^2\right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中，多项式

$$\begin{aligned}H(x,y,z,w)=&x\left[\alpha(1-x-z-w)-\delta\right]+y\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\\&-r_1\left[\alpha(1-x-z-w)-\beta_1 z-\gamma w-\delta\right]-\frac{r_1 y}{x}\left[\alpha(1-x-z-w)+\mu\right]\\&-y(\gamma w+\delta+\mu)-\nu w\\&-\frac{1}{y}\beta_1 xz-(\gamma w+\delta+\mu)-\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\\&+(\beta_2-\mu)z-\beta_2 z^2-\beta_2 wz+(\beta_1-\beta_2)zx\\&-r_2\left[(\beta_2-\mu)-\beta_2 z-(\beta_2+\gamma)w+(\beta_1-\beta_2)x\right]\\&+\frac{1}{2}\left(r_1\sigma_1^2+\sigma_2^2+r_2\sigma_3^2+\sigma_4^2\right)\end{aligned}$$

是有界函数，即 $H(x,y,z,w)\le K$，K 是一个正常数。

从而，我们有

$$\mathrm{d}V(x,y,z,w)\le K\mathrm{d}t+(\sigma_1 x-\sigma_1 r_1)\mathrm{d}B_t+(\sigma_2 y-\sigma_2)\mathrm{d}B_t+(\sigma_3 z-r_2\sigma_3)\mathrm{d}B_t+(\sigma_4 w-\sigma_4)\mathrm{d}B_t \tag{2.4}$$

对上式(2.4)左右两边从 0 到 $\tau_n\wedge T$ 积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_n\wedge T}\mathrm{d}V\le&\int_0^{\tau_n\wedge T}K\mathrm{d}t+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_1 x-\sigma_1 r_1)\mathrm{d}B_t\\&+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_2 y-\sigma_2)\mathrm{d}B_t+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_3 z-r_2\sigma_3)\mathrm{d}B_t+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_4 w-\sigma_4)\mathrm{d}B_t.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&V\left(x(\tau_n\wedge T),y(\tau_n\wedge T),z(\tau_n\wedge T),w(\tau_n\wedge T)\right)\\&\le V(x_0,y_0,z_0,w_0)+K(\tau_n\wedge T)+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_1 x-\sigma_1 r_1)\mathrm{d}B_t\\&+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_2 y-\sigma_2)\mathrm{d}B_t+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_3 z-r_2\sigma_3)\mathrm{d}B_t+\int_0^{\tau_n\wedge T}(\sigma_4 w-\sigma_4)\mathrm{d}B_t.\end{aligned} \tag{2.5}$$

对不等式(2.5)左右两边取期望，可得

$$V\left(x(\tau_n\wedge T),y(\tau_n\wedge T),z(\tau_n\wedge T),w(\tau_n\wedge T)\right)\le V(x_0,y_0,z_0,w_0)+K(\tau_n\wedge T). \tag{2.6}$$

令

$$\Omega_n=\left\{w\in\Omega:\tau_n=\tau_n(\omega)\le T\right\},\quad n\ge n_1,$$

有

$$P(\Omega_n)\ge\varepsilon.$$

对 $\forall\omega\in\Omega_n$，存在 $x(\tau_n,\omega),y(\tau_n,\omega),z(\tau_n,\omega),w(\tau_n,\omega)$ 其中的一个等于 n 或 $\frac{1}{n}$。因此 $V(x(\tau_n)$，$y(\tau_n),z(\tau_n),w(\tau_n,\omega))$ 不小于 $n-a_1-a_1\ln\frac{n}{a_1}$ 或 $\frac{1}{n}-a_1-a_1\ln\frac{1}{na_1}=\frac{1}{n}-a_1+a_1\ln(na_1)$ 或 $n-1-\ln n$ 或 $\frac{1}{n}-1-\ln\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-1+\ln n$，于是，我们有

$$\begin{aligned}&V\left(x(\tau_n,w),y(\tau_n,w),z(\tau_n,w),w(\tau_n,w)\right)\\&\ge\left(n-a_1-a_1\ln\frac{n}{a_1}\right)\wedge\left(\frac{1}{n}-a_1+a_1\ln(na_1)\right)\wedge(n-1-\ln n)\wedge\left(\frac{1}{n}-1+\ln n\right),\end{aligned} \tag{2.7}$$

所以

$$\begin{aligned}&V\left(x_0,y_0,z_0,w_0\right)+K\left(\tau_n\wedge T\right)\\&\geq E\left[1_{\Omega_n}(\omega)V\left(x\left(\tau_n\right),y\left(\tau_n\right),z\left(\tau_n\right),w\left(\tau_n\right)\right)\right]\\&\geq\varepsilon\left(\left(n-a_1-a_1\ln\frac{n}{a_1}\right)\wedge\left(\frac{1}{n}-a_1+a_1\ln\left(na_1\right)\right)\wedge\left(n-1-\ln n\right)\wedge\left(\frac{1}{n}-1+\ln n\right)\right)\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中1_{Ω_n}表示Ω_n的示性函数，令$n\to\infty$，有

$$\infty>V\left(x_0,y_0,z_0,w_0\right)+KT=\infty,$$

矛盾。所以必有$\tau_\infty=\infty$, a.s.。定理证明完毕。

3. 灭绝性和持久性

本小节，主要考虑一个具有相互作用的潮间带岩石群落的随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的灭绝性和持久性。

定理 3.1 假设$\beta_1>\beta_2,\alpha>\delta$和$\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\nu}{\gamma}+\frac{\sigma_4^2}{2\gamma}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2\alpha}>1$成立，则随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的解有如下性质：

$$\mathbb{E}\left[\left(x(t)+y(t)\right)w^{\frac{\alpha}{\gamma}}(t)\right]\leq\mathbb{E}\left[\left(x_0+y_0\right)w_0^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right]\mathrm{e}^{-\alpha\left[\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\nu}{\gamma}+\frac{\sigma_4^2}{2\gamma}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2\alpha}-1\right]t}\to0,\quad t\to\infty$$

证明：注意到，由随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)，可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X&=\mathrm{d}[x+y]=(x+y)\left[\alpha(1-x-z)-(\alpha+\gamma)w-\delta\right]\mathrm{d}t+\left(\sigma_1x+\sigma_2y\right)\mathrm{d}B_t\\&\leq(x+y)\left[\alpha(1-x-z)-(\alpha+\gamma)w-\delta\right]\mathrm{d}t+\hat{\sigma}(x+y)\mathrm{d}B_t,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中$\hat{\sigma}=\max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\}$。

根据随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的第四个方程，可知

$$\mathrm{d}w=w\left[\gamma(x+z)-\nu\right]\mathrm{d}t+\sigma_4w\mathrm{d}B_t,\tag{3.2}$$

结合(3.1)和(3.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\ln(x+y)+\frac{\alpha}{\gamma}\ln w\right]&\leq\left[\alpha(1-x-z)-(\alpha+\gamma)w-\delta-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right]\mathrm{d}t+\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t\\&\quad+\left[\alpha(x+z)-\frac{\nu\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_4^2\alpha}{\gamma}\right]\mathrm{d}t+\frac{\sigma_4\alpha}{\gamma}\mathrm{d}B_t\\&\leq\left[\alpha-(\alpha+\gamma)w-\delta-\frac{\nu\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_4^2\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right]\mathrm{d}t+\left(\hat{\sigma}+\frac{\sigma_4\alpha}{\gamma}\right)\mathrm{d}B_t\\&\leq\left[\alpha-\delta-\frac{\nu\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_4^2\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right]\mathrm{d}t+\left(\hat{\sigma}+\frac{\sigma_4\alpha}{\gamma}\right)\mathrm{d}B_t.\end{aligned}\tag{3.3}$$

对(3.3)式子两边积分，然后取期望，得到

$$\mathbb{E}\left[\ln(x+y)+\frac{\alpha}{\gamma}\ln w\right]\leq\mathbb{E}\left[\ln\left(x_0+y_0\right)+\frac{\alpha}{\gamma}\ln w_0\right]+\left[\alpha-\delta-\frac{\nu\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_4^2\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right]t,\tag{3.4}$$

也就是

$$\mathbb{E}\left[(x+y)w^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right]\le\mathbb{E}\left[(x_0+y_0)w_0^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right]\mathrm{e}^{-\alpha\left[\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\nu}{\gamma}-1+\frac{\sigma_4^2}{2\gamma}+\frac{\theta^2}{2\alpha}\right]t}\to 0,\quad t\to\infty \tag{3.5}$$

定理证明完毕。

定理 3.2 假设 $\beta_2>\alpha$ 和 $\beta_1+\alpha<\beta_2+\gamma$ 和 $\beta_2+\delta+\nu+\frac{\sigma_4^2}{2}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}<\mu+\alpha+\frac{\sigma_3^2}{2}$ 成立，则随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的解有如下性质：

$$\mathbb{E}\left[\frac{z(t)}{(x(t)+y(t))w(t)}\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{z_0}{(x_0+y_0)w_0}\right]$$

而且，在定理 3.1 的条件下，得到

$$\mathbb{E}\left[z(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty.$$

证明：根据随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)第三和四个方程，可知

$$\mathrm{d}\ln z=\left[(\beta_2-\mu)+(\beta_1-\beta_2)(x+z)-\beta_1 z-(\beta_2+\gamma)w-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_3 z\mathrm{d}B_t \tag{3.6}$$

和

$$\mathrm{d}\ln w=\left[\gamma(x+z)-\nu-\frac{\sigma_4^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_4\mathrm{d}B_t \tag{3.7}$$

根据(3.1)，(3.6)和(3.7)，则得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\ln z-\ln X-\ln w\right]\le&\left[(\beta_2-\mu)+(\beta_1-\beta_2)(x+z)-\beta_1 z-(\beta_2+\gamma)w-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_3\mathrm{d}B_t\\&-\left[\alpha(1-x-z)-(\alpha+\gamma)w-\delta-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right]\mathrm{d}t-\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t\\&-\left[\gamma(x+z)-\nu-\frac{\sigma_4^2}{2}\right]\mathrm{d}t-\sigma_4\mathrm{d}B_t\\\le&\left[\beta_2-\mu-\alpha+\delta+\nu-\frac{\sigma_3^2}{2}+\frac{\sigma_4^2}{2}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right]\mathrm{d}t\\&+\left[[\beta_1-\beta_2-\gamma+\alpha](x+z)-\beta_1 z\right]\mathrm{d}t\\&+\left[\alpha-\beta_2\right]w\mathrm{d}t+\sigma_3\mathrm{d}B_t-\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t-\sigma_4\mathrm{d}B_t\\\le&\,\sigma_3\mathrm{d}B_t-\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t-\sigma_4\mathrm{d}B_t.\end{aligned} \tag{3.8}$$

对上式(3.8)两边积分且取期望，得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{z(t)}{(x(t)+y(t))w(t)}\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{z_0}{(x_0+y_0)w_0}\right].$$

由定理 3.1，可知

$$\mathbb{E}\left[(x(t)+y(t))w(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty,$$

从而，得到

$$\mathbb{E}\left[z(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty$$

定理证明完毕。

定理 3.3 假设 $\beta_2<\alpha$ 和 $\beta_2<\alpha+\gamma$ 和 $\alpha+\mu+\nu+\frac{\sigma_3^2}{2}+\frac{\sigma_4^2}{2}<\delta+\beta_2+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}$ 成立，则随机藤壶－藻类－贻贝模型(1.2)的解有如下性质：

$$\mathbb{E}\left[\frac{x(t)+y(t)}{z(t)w(t)}\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{x_0+y_0}{z_0w_0}\right].$$

而且，在定理 3.2 的条件下，得到

$$\mathbb{E}\left[x(t)+y(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty.$$

证明：根据(3.1)，(3.6)和(3.7)，则得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\ln X-\ln z-\ln w\right]\le&\left[\alpha(1-x-z)-(\alpha+\gamma)w-\delta-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t\\&-\left[(\beta_2-\mu)+(\beta_1-\beta_2)(x+z)-\beta_1z-(\beta_2+\gamma)w-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]\mathrm{d}t-\sigma_3\mathrm{d}B_t\\&-\left[\gamma(x+z)-\nu-\frac{\sigma_4^2}{2}\right]\mathrm{d}t-\sigma_4\mathrm{d}B_t\\&\le\left[\alpha-\delta-\beta_2+\mu+\nu+\frac{\sigma_3^2}{2}+\frac{\sigma_4^2}{2}-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right]\mathrm{d}t\\&+\left[\left[\beta_2-\gamma-\alpha\right](x+z)-\beta_1x\right]\mathrm{d}t\\&+\left[\beta_2-\alpha\right]w\mathrm{d}t+\sigma_3\mathrm{d}B_t-\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t-\sigma_4\mathrm{d}B_t\\&\le\sigma_3\mathrm{d}B_t-\hat{\sigma}\mathrm{d}B_t-\sigma_4\mathrm{d}B_t.\end{aligned}\tag{3.9}$$

对上式(3.9)两边积分且取期望，得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{x(t)+y(t)}{z(t)w(t)}\right]\le\mathbb{E}\left[\frac{x_0+y_0}{z_0w_0}\right].$$

由定理 3.2，可知

$$\mathbb{E}\left[z(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty.$$

从而，得到定理证明完毕。

$$\mathbb{E}\left[x(t)+y(t)\right]\to 0,\quad t\to\infty.$$

参考文献

[1] Bjørnstad, O.N. (2015) Nonlinearity and Chaos in Ecological Dynamics Revisited. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **112**, 6252-6253. https://doi.org/10.1073/pnas.1507708112

[2] Hastings, A. and Powell, T. (1991) Chaos in a Three-Species Food Chain. *Ecology*, **72**, 896-903. https://doi.org/10.2307/1940591

[3] Huisman, J. and Weissing, F.J. (1999) Biodiversity of Plankton by Species Oscillations and Chaos. *Nature*, **402**, 407-410. https://doi.org/10.1038/46540

[4] May, R.M. (1974) Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos. *Science*, **186**, 645-647. https://doi.org/10.1126/science.186.4164.645

[5] May, R.M. (1976) Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. *Nature*, **261**, 459-467. https://doi.org/10.1038/261459a0

[6] Schaffer, W.M. and Kot, M. (1985) Nearly One Dimensional Dynamics in an Epidemic. *Journal of Theoretical Biology*, **112**, 403-427. https://doi.org/10.1016/s0022-5193(85)80294-0

[7] Benincà, E., Huisman, J., Heerkloss, R., Jöhnk, K.D., Branco, P., Van Nes, E.H., *et al*. (2008) Chaos in a Long-Term Experiment with a Plankton Community. *Nature*, **451**, 822-825. https://doi.org/10.1038/nature06512

[8] Zhou, H. (2023) Global Extinctions Arising from Barnacle-Algae-Mussel Interaction Model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, **28**, 4190-4200. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2023005

[9] Benincà, E., Ballantine, B., Ellner, S.P. and Huisman, J. (2015) Species Fluctuations Sustained by a Cyclic Succession at the Edge of Chaos. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **112**, 6389-6394. https://doi.org/10.1073/pnas.1421968112

[10] Paine, R.T., Tegner, M.J. and Johnson, E.A. (1998) Compounded Perturbations Yield Ecological Surprises. *Ecosystems*, **1**, 535-545. https://doi.org/10.1007/s100219900049

[11] Scheffer, M., Carpenter, S., Foley, J.A., Folke, C. and Walker, B. (2001) Catastrophic Shifts in Ecosystems. *Nature*, **413**, 591-596. https://doi.org/10.1038/35098000