Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 185-193
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155167

三阶上三角关系矩阵的本质谱性质

赵　娜

内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2025年4月15日；录用日期：2025年5月15日；发布日期：2025年5月27日

摘　要

设 H_1, H_2, H_3 为无穷维复可分Hilbert空间，对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(H_1), B \in \mathcal{BR}(H_2), C \in \mathcal{BR}(H_3)$，记 $M_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{BR}(H_1 \oplus H_2 \oplus H_3)$，本文讨论了 $D \in \mathcal{BR}(H_2, H_1)$，$E \in \mathcal{BR}(H_3, H_1)$，$F \in \mathcal{BR}(H_3, H_2)$ 时 $M_{D,E,F}$ 的本质谱、Weyl谱和本质近似点谱包含关系成立的条件。

关键词

关系矩阵，本质谱，Weyl谱，本质近似点谱

Essential Spectral Properties of Third-Order Upper Triangular Relation Matrices

Na Zhao

College of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Apr. 15th, 2025; accepted: May 15th, 2025; published: May 27th, 2025

Abstract

Let H_1, H_2, H_3 be infinite-dimensional complex separable Hilbert spaces, given the relation $A \in \mathcal{BR}(H_1), B \in \mathcal{BR}(H_2), C \in \mathcal{BR}(H_3)$, and write $M_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{BR}(H_1 \oplus H_2 \oplus H_3)$. In this paper, a necessary and sufficient condition is given for the essential spectrum, Weyl spectrum,

文章引用: 赵娜. 三阶上三角关系矩阵的本质谱性质[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 185-193.
DOI: 10.12677/pm.2025.155167

essential approximation point spectrum for $M_{D,E,F}$ with $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$.

Keywords

Relation Matrix, Essential Spectrum, Weyl Spectrum, Essential Approximation Point Spectrum

1. 引言

多值线性算子和单值线性算子统称为线性关系或者乘积空间中的线性子空间，故线性关系可看作线性算子在多值情形下的推广，它是 von Neumann J.在研究非稠定微分算子的共轭时首次引入的(见文[1])。线性关系矩阵是指以线性关系为元素的矩阵，简称关系矩阵。设T是 Banach 空间H上的有界线性关系，如果存在H的两个闭子空间H_1和H_2使得$H=H_1\oplus H_2$，则H上的任意有界线性关系T可写为如下形式的2×2关系矩阵

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

其中T_{ij}是从H_j到H_i的有界线性关系，$i,j=1,2$。若H_1是T的非平凡不变子空间，则有$T_{21}=0$，显然，此时T可分解为上三角形式。在关系矩阵中，若一些元素已知，而其他元素未知，则称其为缺项关系矩阵。

近年来，关系矩阵的谱补问题一直是比较活跃的研究课题。2014 年，文[2]在 Banach 空间中利用因式分解法刻画了二阶关系矩阵的本质谱。2015 年，文[3]在 Banach 空间研究了三阶上三角关系矩阵的六类本质谱与其对角元之间的联系，其中除过对角线元素都是单值的。2016 年，文[4]在一定条件下讨论了三阶关系矩阵的闭性及其 Fredholm 性。同年，文[5]在 Banach 刻画了二阶关系矩阵的闭性及可闭性，并研究了其本质谱的稳定性。2017 年，Ammar A.、Jeribi A.和 Saadaoui B.在文[6]中研究了 Banach 空间关系矩阵的 Frobenius-Schur 因式分解，刻画了二阶关系矩阵的本质谱。2018 年，文[7]在 Banach 空间给出了关系理论中本质伪谱的定义并利用因式分解法刻画了二阶关系矩阵的本质伪谱。

在算子理论中，对算子矩阵谱的研究相对较成熟。显然，对 Hilbert 空间中上三角算子矩阵有

$$\sigma(M_C)\subseteq\sigma(A)\cup\sigma(B),\forall C\in\mathcal{B}(K,H).$$

2003 年，Eibjaoui H.和 Zerouali E.H.利用局部谱理论在文[8]中讨论了$\sigma(A)\cup\sigma(B)$与$\sigma(M_C)$的差集问题，得到

$$\sigma(M_C)\cup(S_{A^*}\cap S_B)=\sigma(A)\cup\sigma(B),\forall C\in\mathcal{B}(K,H).$$

此外，还有学者得到了上三角算子矩阵的本质谱、Weyl 谱、本质近似点谱和近似点谱等谱由其对角元的相应谱的并集刻画的结论。文[9]-[11]在 Hilbert 空间上用二阶上三角关系矩阵中内部元的性质刻画了关系矩阵的谱、点谱、本质谱、Weyl 谱、本质近似点谱等。另外，发现在算子理论中有$\sigma_*(M_C)\subseteq\sigma*(A)\cup\sigma*(B)$成立，其中$\sigma_*\in\{\sigma_e,\sigma_w,\sigma_{ea},\sigma_b,\sigma_{ab}\}$，然而在线性关系理论中上述包含关系不成立，进而研究了在线性关系理论中上述包含关系成立的充分必要条件。本文在算子矩阵谱的研究基础

上，继续研究 Hilbert 空间上三阶上三角缺项关系矩阵的本质谱包含关系。

2. 预备知识

下面给出本文涉及的定义引理。

定义 2.1 [12]设 H 和 K 是可分的 Hilbert 空间，关系 $T: H \to K$ 是一个映射，它将非空子集 $\mathrm{dom}T \subseteq H$ 中的元素映为 K 的某个非空子集。若关系 T 满足对任意的 $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}T$ 及不全为零的标量 α, β 都有 $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$，则称 T 为线性关系。显然，线性关系 T 的定义域 $\mathrm{dom}T$ 是 H 的线性子空间。

注 若线性关系 T 将其定义域中的每一点都映成单点集，则称 T 是单值线性关系或算子，显然，T 为单值线性关系当且仅当 $T(0) = \{0\}$。

定义 2.2 [12] 记 $\mathcal{LR}(H,K)$ 为所有从 H 到 K 且定义域为全空间 H 的线性关系，并记 $\mathcal{LR}(H) = \mathcal{LR}(H,H)$。分别将所有从 H 到 K 的有界算子和闭算子组成的集合记为 $\mathcal{B}(H,K)$，$\mathcal{C}(H,K)$。设 $T \in \mathcal{LR}(H,K)$， $\mathrm{ran}T$ 和 $\mathrm{ker}T$ 分别为 T 的值域和零空间另外，记 $n(T) = \dim\ker T, d(T) = \dim \mathrm{ran} T^{\perp}$，$\beta(T) = \dim(K/\mathrm{ran}T)$。若 $n(T)$ 和 $\beta(T)$ 之一有限，则定义 T 的指标为 $i(T) = n(T) - \beta(T)$。

定义 2.3 [12]设 $T \in \mathcal{LR}(H,K), Q_T$ 为从 K 到 $K/\overline{T(0)}$ 的商映射，则 $Q_T T$ 是单值的。对任意的 $x \in H$，定义 $\|Tx\| = \|Q_T Tx\|$，且定义 T 的范数为 $\|T\| = \|Q_T T\|$。

定义 2.4 [12]若 $T \in \mathcal{LR}(H,K)$ 且 $\| T\| < +\infty$，则称 T 是有界线性关系。

定义 2.5 [12]设 $T \in \mathcal{BCR}(H,K)$ 且 $\mathrm{ran}\,T$ 是闭的。

i) 若 $n(T) < \infty$，则称 T 是左 Fredholm 关系；

ii) 若 $d(T) < \infty$，则称 T 是右 Fredholm 关系；

iii) 若 $n(T) < \infty$ 且 $d(T) < \infty$，则称 T 是 Fredholm 关系。

定义 2.6 [12]设 $T \in \mathcal{BCR}(H,K)$ 是左 Fredholm 关系，即左或右 Fredholm 关系。

i) 若 $i(T) \le 0$，则称 T 是左 Weyl 关系；

ii) 若 $i(T) \ge 0$，则称 T 是右 Weyl 关系；

iii) 若 $i(T) = 0$，则称 T 是 Weyl 关系。

线性关系 T 的左本质谱 $\sigma_{le}(T)$、右本质谱 $\sigma_{re}(T)$、本质谱 $\sigma_e(T)$、本质近似点谱(左 Weyl 谱) $\sigma_{ea}(T)$、右 Weyl 谱 $\sigma_{rw}(T)$、Weyl 谱 $\sigma_w(T)$ 分别被定义为

$$\sigma_{le}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是左Fredholm关系}\},$$

$$\sigma_{re}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是右Fredholm关系}\},$$

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是Fredholm关系}\},$$

$$\sigma_{ea}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是左Weyl关系}\},$$

$$\sigma_{rw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是右Weyl关系}\},$$

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{不是Weyl关系}\}.$$

引理 2.1 [10]设 $T \in \mathcal{LR}(H)$，则

i) 若 T 连续，并且 $\mathrm{dom}T$ 和 $T(0)$ 都是闭的，则 T 是闭的；

ii) T 闭当且仅当 $Q_T T$ 闭且 $T(0)$ 是闭的。

引理 2.2 [13]设 $T \in \mathcal{BR}(H_1, H_2)$。若 $T(0)$ 是闭的，则 $\mathrm{ker}T$ 是闭的。

引理 2.3 [2]设 $T \in \mathcal{BCR}(H)$，则

i) T 是左 Fredholm 关系当且仅当 $Q_T T$ 是左 Fredholm 关系，且 $i(T)=i(Q_T T)$；

ii) T 是右 Fredholm 关系当且仅当 $Q_T T$ 是右 Fredholm 关系，且 $i(T)=i(Q_T T)$。

引理 2.4 [3]设 $A\in\mathcal{BR}(H_1)$， $B\in\mathcal{BR}(H_2)$， $C\in\mathcal{BR}(H_3)$， $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定关系，则

$$Q_{M_{D,E,F}}M_{D,E,F}=\begin{pmatrix} Q_{(A\,D\,E)}A & Q_{(A\,D\,E)}D & Q_{(A\,D\,E)}E \\ 0 & Q_{(B\,F)}B & Q_{(B\,F)}F \\ 0 & 0 & Q_C C \end{pmatrix}.$$

引理 2.5 [3]设 $A\in\mathcal{BR}(H_1)$， $B\in\mathcal{BR}(H_2)$， $C\in\mathcal{BR}(H_3)$， $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定关系，则 $M_{D,E,F}$ 是闭的当且仅当 $A(0)+D(0)+E(0),B(0)+F(0)$ 和 $C(0)$ 都是闭的。

引理 2.6 [9]设 $M_{D,E,F}\in\mathcal{B}(H_1\oplus H_2\oplus H_3)$，则 $\sigma_*(M_X)\subseteq\sigma_*(A)\cup\sigma_*(B)\cup\sigma_*(C)$，其中 $\sigma_*\in\{\sigma_e,\sigma_w,\sigma_{ea}\}$。

引理 2.7 [12]设 X 是一个线性空间， $M,N\subseteq X$ 是闭子空间且 $M\subseteq N$， 则 $X/N\cong(X/M)(N/M)$。

3. 主要结果及证明

定理 3.1 设 $A\in\mathcal{BR}(H_1)$， $B\in\mathcal{BR}(H_2)$， $C\in\mathcal{BR}(H_3)$， $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定关系，则

i) $\sigma_e(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_e(A_{D(0)+E(0)})\cup\sigma_e(B_{F(0)})\cup\sigma_e(C)$；

ii) $\sigma_w(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_w(A_{D(0)+E(0)})\cup\sigma_w(B_{F(0)})\cup\sigma_e(C)$；

iii) $\sigma_{ea}(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_{ea}(A_{D(0)+E(0)})\cup\sigma_{ea}(B_{F(0)})\cup\sigma_e(C)$。

证明 先证(i)成立。设 $\lambda\notin\sigma_e(A_{D(0)+E(0)})\cup\sigma_e(B_{F(0)})\cup\sigma_e(C)$，只需证 $\lambda\notin\sigma_e(M_{D,E,F})$，即 $M_{D,E,F}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系。显然，$A_{D(0)+E(0)}-\lambda I$， $B_{F(0)}-\lambda I$ 和 $C-\lambda I$ 都是 Fredholm 关系，则 $A(0)+D(0)+E(0)$, $B(0)+F(0)$ 和 $C(0)$ 都是闭的，这意味着

$$M_{D,E,F}(0)=\begin{pmatrix} A(0)+D(0)+E(0) \\ B(0)+F(0) \\ C(0) \end{pmatrix}$$

是闭的。由引理 2.3 和引理 2.5，只需证明 $Q_{M_{D,E,F}}(M_{D,E,F}-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。根据引理 2.4，

$$Q_{M_{D,E,F}}(M_{D,E,F}-\lambda I)=\begin{pmatrix} Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I) & Q_{(A\,D\,E)}D & Q_{(A\,D\,E)}E \\ 0 & Q_{(B\,F)}(B-\lambda I) & Q_{(B\,F)}F \\ 0 & 0 & Q_C(C-\lambda I) \end{pmatrix}.$$

并且 $Q_{M_{D,E,F}}(M_{D,E,F}-\lambda I)$ 是单值关系。显然，

$$\left\|Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)x\right\|\le\left\|Q_A(A-\lambda I)x\right\|=\left\|(A-\lambda I)x\right\|,x\in H_1,$$

因此 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是有界的单值关系。类似地， $Q_{(A\,D\,E)}D$， $Q_{(A\,D\,E)}E$ 也是有界的单值关系。同理，

$$\left\|Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)y\right\|\le\left\|Q_B(B-\lambda I)y\right\|=\left\|(B-\lambda I)y\right\|,y\in H_2,$$

因此 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是有界的单值关系。类似地，$Q_{(B\,F)}F,Q_C C$ 也是有界的单值关系。注意到 $Q_C(C-\lambda I)$ 是有界的，则由引理 2.6，只需分别证明 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I),Q_{(B\,F)}(B-\lambda I),Q_C(C-\lambda I)$ 均是 Fredholm 关系。显然 $C-\lambda I$ 的 Fredholm 性蕴含 $Q_C(C-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。

下证 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。易知 $\operatorname{dom} Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)=\operatorname{dom}(A-\lambda I)=H_1$，结合 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 的有界性可知 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是闭的。因为 $A_{D(0)+E(0)}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系且

$$n\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)\right)=\dim\left\{x\in H_1:(A-\lambda I)x\subseteq A(0)+D(0)+E(0)\right\}=n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right),$$

所以

$$n\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)\right)<\infty.$$

因为

$$\begin{aligned}&\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I\;\, D-D\;\, E-E)\\&=\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)+\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(D-D)+\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(E-E)\\&=\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I),\end{aligned}$$

所以

$$\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I\;\, D-D\;\, E-E)\right)=\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)\right).$$

观察到 $A_{D(0)+E(0)}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系，则 $A(0)+D(0)+E(0)$ 和 $\operatorname{ran}(A-\lambda I\;\, D-D\;\, E-E)$ 均闭，结合引理 2.7 可知

$$\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I\;\, D-D\;\, E-E)\right)=\beta(A-\lambda I\;\, D-D\;\, E-E)=\beta\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<\infty,$$

因此 $\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)\right)<\infty$，进而 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。

同理，下证 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。易知 $\operatorname{dom}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$，$\operatorname{dom}\operatorname{dom}(B-\lambda I)=H_2$，结合 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 的有界性可知 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是闭的。因为 $B_{F(0)}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系且

$$n\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)\right)=\dim\left\{x\in H_1:(B-\lambda I)x\subseteq B(0)+F(0)\right\}=n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right),$$

所以

$$n\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)\right)<\infty.$$

因为

$$\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I\;\, F-F)=\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)+\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(F-F)=\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I),$$

所以

$$\beta\left(Q_{(B\,F)}(A-\lambda I\;\, F-F)\right)=\beta\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)\right).$$

观察到 $B_{F(0)}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系，则 $B(0)+F(0)$ 和 $\operatorname{ran}(B-\lambda I\;\, F-F)$ 均闭，结合引理 2.7 可知

$$\beta\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I\;\, F-F)\right)=\beta(B-\lambda I\;\, F-F)=\beta\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<\infty,$$

因此 $\beta\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)\right)<\infty$，进而 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。

由 (i) 的证明易知 (ii) 是成立的。对 (iii)，设 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{ea}\left(B_{F(0)}\right)\cup\sigma_{e}(C)$，只需证 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)$，即 $M_{D,E,F}-\lambda I$ 是左 Weyl 关系。由 (i) 的证明，只需分别证明 $\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 和 $\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是闭的。下证 $\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是闭的。由上述证明可知

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)&=\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)+\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(D-D)+\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(E-E)\\&=\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I\ D-D\ E-E).\end{aligned}$$

因为 $A(0)+D(0)+E(0)$ 闭，所以 $\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 与 $\operatorname{ran}(A-\lambda I)+D(0)+E(0)$ 的闭性等价。注意到 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)$，则 $\operatorname{ran}\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)$ 是闭的，结合 $\operatorname{ran}(A-\lambda I)+D(0)+E(0)=\operatorname{ran}\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)$，可得 $\operatorname{ran}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是闭的。同理，下证 $\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是闭的。由上述证明可知

$$\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)=\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I\ F-F).$$

因为 $B(0)+F(0)$ 闭，所以 $\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 与 $\operatorname{ran}(B-\lambda I)+F(0)$ 的闭性等价。注意到 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(B_{F(0)}\right)$，则 $\operatorname{ran}\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)$ 是闭的，结合 $\operatorname{ran}(B-\lambda I)+F(0)=\operatorname{ran}\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)$ 可得 $\operatorname{ran}Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 是闭的。

推论 3.1 设 $A\in\mathcal{BR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BR}(H_3)$，$D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定关系，则

i) 若 $A_{D(0)+E(0)}$，$B_{F(0)}$ 和 C 都是 Fredholm 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是 Fredholm 关系；

ii) 若 $A_{D(0)+E(0)}$，$B_{F(0)}$ 和 C 都是 Weyl 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是 Weyl 关系；

iii) 若 $A_{D(0)+E(0)}$，$B_{F(0)}$ 和 C 都是左 Weyl 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是左 Weyl 关系。

定理 3.2 设 $A\in\mathcal{BR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BR}(H_3)$，$D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定关系，且 $A(0)+D(0)+E(0)$ 和 $B(0)+F(0)$ 均闭，则

i) $\sigma_e(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_e(A)\cup\sigma_e(B)\cup\sigma_e(C)\cup\Delta_1$；

ii) $\sigma_w(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_w(A)\cup\sigma_w(B)\cup\sigma_e(C)\cup\Delta_2$；

iii) $\sigma_{ea}(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_{ea}(A)\cup\sigma_{ea}(B)\cup\sigma_{ea}(C)\cup\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)\cup\Delta_2\cup\Delta_3$。

其中 $\Delta_1=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)=\infty\right\}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)=\infty\right\}$,

$$\Delta_2=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\beta\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)\right\}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\beta\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)\right\},$$

$$\Delta_3=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\dim\left(\ker\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)/\ker(A-\lambda I)\right)=\infty\right\}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\dim\left(\ker\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)/\ker(B-\lambda I)\right)=\infty\right\}.$$

证明 先证(i)成立。设 $\lambda\notin\sigma_e(A)\cup\sigma_e(B)\cup\sigma_e(C)\cup\Delta_1$，只需证 $\lambda\notin\sigma_e(M_{D,E,F})$，即 $M_{D,E,F}-\lambda I$ 是 Fredholm 关系。显然，$A-\lambda I$，$B-\lambda I$ 和 $C-\lambda I$ 都是 Fredholm 关系且 $n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<\infty,n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<\infty$，易知 $A(0)+D(0)+E(0),B(0)+F(0)$ 和 $C(0)$ 都是闭的，这意味着 $M_{D,E,F}(0)$ 是闭的，由引理 2.3 和引理 2.5，只需证明 $Q_{M_{D,E,F}}(M_{D,E,F}-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。根据引理 2.4，

$$Q_{M_{D,E,F}}(M_{D,E,F}-\lambda I)=\begin{pmatrix}Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)&Q_{(A\,D\,E)}D&Q_{(A\,D\,E)}E\\0&Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)&Q_{(B\,F)}F\\0&0&Q_C(C-\lambda I)\end{pmatrix}.$$

由定理 3.1 可知，只需证 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 和 $Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)$ 均是 Fredholm 关系。

下证 $Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)$ 是 Fredholm 关系。一方面

$$\begin{aligned}n\left(Q_{(A\,D\,E)}(A-\lambda I)\right)&=\dim\left\{x\in H_1:(A-\lambda I)x\subseteq A(0)+D(0)+E(0)\right\}\\&=n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)\geq n(A-\lambda I),\end{aligned}$$

$$n\left(Q_{(B\,F)}(B-\lambda I)\right)=\dim\left\{x\in H_2:(B-\lambda I)x\subseteq B(0)+F(0)\right\}=n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)\geq n(B-\lambda I),$$

所以

$$n\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)<\infty,n\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)<\infty.$$

另一方面，

$$\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)=\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\ D-D\ E-E\right)\right)=\beta\left(A-\lambda I\ D-D\ E-E\right)\leq\beta\left(A-\lambda I\right),$$

$$\beta\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)=\beta\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\ F-F\right)\right)=\beta\left(B-\lambda I\ F-F\right)\leq\beta\left(B-\lambda I\right).$$

所以

$$\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)<\infty,\beta\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)<\infty.$$

进而 $Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)$ 和 $Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)$ 均是 Fredholm 关系。

定理 3.3 设 $A\in\mathcal{BR}\left(H_1\right)$， $B\in\mathcal{BR}\left(H_2\right)$， $C\in\mathcal{BR}\left(H_3\right)$， $D\in\mathcal{BR}\left(H_2,H_1\right)$， $E\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_1\right)$，$F\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_2\right)$ 为给定关系，且 $A(0)+D(0)+E(0)$ 和 $B(0)+F(0)$ 均闭，则

i) $\sigma_e\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_e\left(A\right)\cup\sigma_e\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$ 当且仅当

$$\Delta_1\subseteq\sigma_e\left(A\right)\cup\sigma_e\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right);$$

ii) $\sigma_w\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_w\left(A\right)\cup\sigma_w\left(B\right)\cup\sigma_w\left(C\right)$ 当且仅当

$$\Delta_2\subseteq\sigma_w\left(A\right)\cup\sigma_w\left(B\right)\cup\sigma_w\left(C\right);$$

iii) $\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right)$ 当且仅当

$$\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)\cup\Delta_1'\cup\Delta_3\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right).$$

其中 Δ_1,Δ_2 是定理 2.2 中定义的集合且

$$\Delta_1'=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\beta\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)+\beta\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)+\beta\left(C\right)<n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)+n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)+n\left(B\right)\right\}.$$

证明 由定理 2.2 可得(i)，(ii)的充分性成立，下面分别证明它们的必要性。对(i)，设 $\lambda\notin\sigma_e\left(A\right)\cup\sigma_e\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$，只需证明 $\lambda\notin\Delta_1$，即 $n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<\infty,n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<\infty.$ 因为 $\sigma_e\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_e\left(A\right)\cup\sigma_e\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$，所以 $\lambda\notin\sigma_e\left(M_{D,E,F}\right)$。应用引理 2.3， $Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)$ 是 Fredholm 关系，则由引理 2.4 可得 $Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)$， $Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)$ 都是左 Fredholm 关系，所以 $n\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)<\infty,n\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)<\infty$，进而 $n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<\infty$， $n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<\infty$。

对(ii)，设 $\lambda\notin\sigma_w\left(A\right)\cup\sigma_w\left(B\right)\cup\sigma_w\left(C\right)$，只需证明 $\lambda\notin\Delta_2$，即 $\beta\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)=n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)$，$\beta\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)=n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)$。显然，$\lambda\notin\sigma_w\left(M_{D,E,F}\right)$。应用引理 2.4，$Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)$，$Q_C\left(C-\lambda I\right)$ 是 Weyl 关系。根据定理 3.1 有 $i\left(Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)\right)=i\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)$ $+i\left(Q_C\left(C-\lambda I\right)\right)$, 进而 $i\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)=0$, 故根据定理 2.1 的证明，

$$\beta\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)=n\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right),\beta\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)=n\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right),$$

因此。$\lambda\notin\Delta_2$。

对(iii)，先证其充分性。设 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right)$，则 $A-\lambda I,B-\lambda I,C-\lambda I$ 都是左 Weyl 关系且 $\lambda\notin\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)\cup\Delta_1'\cup\Delta_3$, 由引理 2.2， $Q_C\left(C-\lambda I\right)$ 是左 Fredholm 关系。因为 $A-\lambda I,B-\lambda I$ 都是左 Weyl 关系且 $\lambda\notin\Delta_3$, 所以 $n\left(A_{D(0)+E(0)}-\lambda I\right)<\infty,n\left(B_{F(0)}-\lambda I\right)<\infty$。由定理 3.1 的证明，

$$n\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)<\infty, n\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)<\infty,$$

进而 $\lambda\notin\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)$ 蕴含着 $Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)$, $Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)$ 都是左 Fredholm 关系。注意到 $Q_C\left(C-\lambda I\right)$ 是左 Fredholm 关系且 $\lambda\notin\Delta_1'$，应用定理 3.1，$Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)$ 是左 Fredholm 关系，且

$$i\left(Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)\right)=i\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_C\left(C-\lambda I\right)\right)\le 0.$$

显然，$Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)$ 是左 Fredholm 关系，因此 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)$，

这意味着 $\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right)$。反过来,设 $\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right)$。如果 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right)$，则 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)$。易知 $Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right), Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)$ 都是左 Fredholm 关系，因此 $\lambda\notin\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)\cup\Delta_3$. 另外，易知 $Q_C\left(C-\lambda I\right)$ 是左 Fredholm 关系，结合 $\lambda\notin\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)$，可得

$$i\left(Q_{(A\,D\,E)}\left(A-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_{(B\,F)}\left(B-\lambda I\right)\right)+i\left(Q_C\left(C-\lambda I\right)\right)\le 0=i\left(Q_{M_{D,E,F}}\left(M_{D,E,F}-\lambda I\right)\right)\le 0.$$

根据定理 3.1 的证明可得 $\lambda\notin\Delta_1'$，因此，

$$\lambda\notin\sigma_{cr}\left(A_{D(0)+E(0)}\right)\cup\sigma_{cr}\left(B_{F(0)}\right)\cup\Delta_1'\cup\Delta_3\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_{ea}\left(C\right).$$

推论 3.2 设 $A\in\mathcal{BR}\left(H_1\right)$，$B\in\mathcal{BR}\left(H_2\right)$，$C\in\mathcal{BR}\left(H_3\right)$，$D\in\mathcal{BR}\left(H_2,H_1\right)$，$E\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_1\right)$，$F\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_2\right)$ 为给定关系，且 $D(0)\subseteq A(0), E(0)\subseteq A(0), F(0)\subseteq B(0)$，则

i) $\sigma_e\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_e\left(A\right)\cup\sigma_e\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$；

ii) $\sigma_w\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_w\left(A\right)\cup\sigma_w\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$；

iii) $\sigma_{ea}\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_{ea}\left(A\right)\cup\sigma_{ea}\left(B\right)\cup\sigma_e\left(C\right)$。

推论 3.3 设 $A\in\mathcal{BR}\left(H_1\right)$，$B\in\mathcal{BR}\left(H_2\right)$，$C\in\mathcal{BR}\left(H_3\right)$，$D\in\mathcal{BR}\left(H_2,H_1\right)$，$E\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_1\right)$，$F\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_2\right)$ 为给定关系，且 $D(0)\subseteq A(0), E(0)\subseteq A(0), F(0)\subseteq B(0)$，则

i) 若 A,B 和 C 都是 Fredholm 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是 Fredholm 关系；

ii) 若 A,B 和 C 都是 Weyl 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是 Weyl 关系；

iii) 若 A,B 和 C 都是左 Weyl 关系，则 $M_{D,E,F}$ 是左 Weyl 关系。

例子 3.1 设 $A\in\mathcal{BR}\left(H_1\right), B\in\mathcal{BR}\left(H_2\right), C\in\mathcal{BR}\left(H_3\right)$ 均为 Fredholm 关系，对任意 $x_1\in H_2, x_2\in H_3$，令 $Dx_1=H_1$，$Ex_2=H_1$ 且 $Fx_2=H_2$。显然，$n\left(M_{D,E,F}\right)=\infty$，故 $M_{D,E,F}$ 不是 Fredholm 关系。

这意味着即使 $A\in\mathcal{BR}\left(H_1\right)$，$B\in\mathcal{BR}\left(H_2\right)$，$C\in\mathcal{BR}\left(H_3\right)$，$D\in\mathcal{BR}\left(H_2,H_1\right)$，$E\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_1\right)$，$F\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_2\right)$ 均为 Fredholm 关系，$M_{D,E,F}$ 也不一定是 Fredholm 关系，因此上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}$ 的 Fredholm 性与关系 $D\in\mathcal{BR}\left(H_2,H_1\right), E\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_1\right), F\in\mathcal{BR}\left(H_3,H_2\right)$ 的多值部分 $D(0), E(0), F(0)$ 有关。

参考文献

[1] Von Neumann, J. (1950) Functional Operator II: The Geometry of Orthogonal Spaces. Princeton University Press.

[2] Álvarez, T., Ammar, A. and Jeribi, A. (2013) On the Essential Spectra of Some Matrix of Linear Relations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **37**, 620-644. https://doi.org/10.1002/mma.2818

[3] Ammar, A., Dhahri, M.Z. and Jeribi, A. (2015) Some Properties of Upper Triangular 3 × 3-Block Matrices of Linear Relations. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **8**, 189-204. https://doi.org/10.1007/s40574-015-0036-y

[4] Ammar, A., Diagana, T. and Jeribi, A. (2016) Perturbations of Fredholm Linear Relations in Banach Spaces with Application to 3 × 3-Block Matrices of Linear Relations. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **22**, 59-76.

[5] Ammar, A., Fakhfakh, S. and Jeribi, A. (2016) Stability of the Essential Spectrum of the Diagonally and Off-Diagonally Dominant Block Matrix Linear Relations. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, **7**, 493-509.

https://doi.org/10.1007/s11868-016-0154-z

[6] Ammar, A., Jeribi, A. and Saadaoui, B. (2017) Frobenius-Schur Factorization for Multivalued 2 × 2 Matrices Linear Operator. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, Article No. 29. https://doi.org/10.1007/s00009-016-0825-2

[7] Ammar, A., Jeribi, A. and Saadaoui, B. (2017) A Characterization of Essential Pseudospectra of the Multivalued Operator Matrix. *Analysis and Mathematical Physics*, **8**, 325-350. https://doi.org/10.1007/s13324-017-0170-z

[8] Elbjaoui, H. and Zerouali, E.H. (2003) Local Spectral Theory for 2 × 2 Operator Matrices. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **2003**, 2667-2672. https://doi.org/10.1155/s0161171203012043

[9] Djordjević, S.V. and Zguitti, H. (2008) Essential Point Spectra of Operator Matrices Trough Local Spectral Theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 285-291. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.031

[10] Duggal, B.P. (2010) Browder and Weyl Spectra of Upper Triangular Operator Matrices. *Filomat*, **24**, 111-130. https://doi.org/10.2298/fil1002111d

[11] Zerouali, E.H. and Zguitti, H. (2006) Perturbation of Spectra of Operator Matrices and Local Spectral Theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **324**, 992-1005. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.12.065

[12] Cross, R. (1998) Multivalued Linear Operators. Marcel Dekker.

[13] Du, Y. and Huang, J. (2022) Essential Spectra of Upper Triangular Relation Matrices. *Monatshefte für Mathematik*, **200**, 43-61. https://doi.org/10.1007/s00605-022-01800-3