

定比分点公式的推广与应用

——基于几何及物理意义方面的启示

尹 星

铜陵学院数学与计算机学院, 安徽 铜陵

收稿日期: 2025年4月15日; 录用日期: 2025年5月20日; 发布日期: 2025年5月31日

摘 要

本文首先推广了线段定比分点公式, 然后建立了线段及三角形的加权重心公式。作为应用, 我们给出了利用定比分点公式及加权重心公式处理几何问题的基本思路。

关键词

定比分点公式, 加权重心公式, 线段, 三角形

The Generalizations and Applications of Fixed Score Formula

—Enlightenment Based on the Geometric and Physical Significance

Xing Yin

Department of Mathematics and Computer Science, Tongling University, Tongling Anhui

Received: Apr. 15th, 2025; accepted: May 20th, 2025; published: May 31st, 2025

Abstract

This paper generalizes the fixed score formula and then builds the weighted gravity formulas for line segments and triangles. As applications, we give the basic methods and ideas dealing with some geometric problems by using the fixed score formula and the weighted gravity formulas.

Keywords

Fixed Score Formula, The Weighted Gravity Formula, Line Segment, Triangle



1. 引言

向量是近代数学的基本概念之一。向量法为研究解决几何问题提供了新的方法,使许多原本充满技巧和挑战性的几何问题变得有章可循,平易简捷。正因为可以按照确定的程序统一处理问题,向量法的思路与步骤正在走向机械化[1]。一般地,用向量方法处理几何问题(在此并不引入坐标)充分体现“数形结合”思想:① 用向量表示几何元素,建立几何与方程的联系,将几何问题转化为代数问题;② 通过向量运算,得到代数结果;③ 用代数结果解释几何关系,如平行、垂直及共面等位置关系,距离、夹角及面积等数量关系。在此过程中,代数运算与几何意义有机结合,相辅相成。

向量的知识既出现在高中的教学课程之中[2]-[4],也是大学解析几何的教学内容[5]-[8]。向量既是代数概念,又是几何的研究工具。但遗憾的是,其“数”与“形”的桥梁作用没有得到足够重视。向量的教学中偏重代数运算,忽略几何内涵的引伸与挖掘。

如所知,定比分点公式是向量代数中重要的公式,在解决几何中线性关系问题具有十分重要的作用。在学习过程中,作者发现定比分点公式不仅具有鲜明的几何意义,还可以赋予一定的物理意义,使之与物体的重心紧密联系。有趣的是,利用物理的重心理论重新审视定比分点公式,可以得到任何线段及三角形的加权重心公式。这些加权重心公式是线段中点与三角形重心公式的推广。特别地,我们还发现:可以选取三角形的质量分布使得其内部任何一点均可成为该三角形的加权重心。利用建立的加权重心公式,我们可以简易地解决几何中一些较为复杂的线性关系问题。

利用定比分点公式的几何意义解决几何问题,在本科教材中有一定的阐述,但并没有展开深入的讨论[5]-[8]。在相关的教学类论文中,作者们主要介绍了定比分点公式在解题中的一些方法与技巧,但没有从几何方面特别是物理方面去挖掘公式的意义[9]-[11]。鉴于此,本文拟就在这些方面对定比分点公式作一些补充说明,提供一些新的思考,以进一步加深理解。

2. 定比分点公式的推广

为了向量的表示和计算更加简洁,在原点为 O 的坐标系下,我们把 $A, B, C, \dots$ 等点的位置向量表示为 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$, 而不是 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \dots$ 。

定理 2.1 设线段 $AB = m, BC = n$ 。则 A, B, C 三点共线当且仅当

$$(m+n)\vec{B} = n\vec{A} + m\vec{C}. \quad (2.1)$$

证明($\Rightarrow$) 设 A, B, C 三点共线, 则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 同向。由于 $AB = m, BC = n$, 故 $\frac{\vec{AB}}{m} = \frac{\vec{BC}}{n}$

即,

$$\frac{\vec{B} - \vec{A}}{m} = \frac{\vec{C} - \vec{B}}{n}$$

整理得到 $(m+n)\vec{B} = n\vec{A} + m\vec{C}$ 。

($\Leftarrow$) 设式(2.1)成立, 则移项合并得到

$$n(\vec{B} - \vec{A}) = m(\vec{C} - \vec{B}).$$

即, $n\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{BC}$ 。从而向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向。特别地, A, B, C 三点共线。

注 1 在定理 2.1 中, 若 A, B, C 三点共线, 且 $\frac{AB}{BC} = \tau$, 则有 $\vec{B} = \frac{\vec{A} + \tau\vec{C}}{1 + \tau}$ 此时, $m = \tau, n = 1$ 。因此, 定理 2.1 是定比分点公式的推广。

注 2 定理 2.1 表明, 线段分点的位置向量可由端点的位置向量表示, 且从几何上看, 分点位置向量的系数是线段的长度, 而端点位置向量的系数恰好是分点到另一端点的距离。事实上, 定理中的距离也可以是有向距离, 此时, 点 B 未必是线段 AC 的内分点。无论哪种情形, 等式两端的系数和始终相等。

例 2.1 已知 $\overrightarrow{OA} = p, \overrightarrow{OB} = q, \overrightarrow{OC} = r$, I 为 $\triangle ABC$ 的内心, A, B, C 所对应的边长分别为 a, b, c 。

证明 $\overrightarrow{OI} = \frac{ap + bq + cr}{a + b + c}$

证明: 作射线 AI 交 BC 于点 D 。由角平分线定理, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ 。令 $BD = ct, DC = bt$ 。

则由定理 2.1,

$$(b + c)\vec{D} = b\vec{B} + c\vec{C}. \quad (2.2)$$

同理, 由角平分线定理,

$$\frac{DI}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{b + c}$$

令 $DI = at, IA = (b + c)t$ 。则由定理 2.1,

$$(a + b + c)\vec{I} = a\vec{A} + (b + c)\vec{D} \quad (2.3)$$

利用式(2.2)~(2.3)得到

$$(a + b + c)\vec{I} = a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}$$

取点 O 为原点, 即得到所证等式。

例 2.2 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 与 E 分别在 BC 及 CA 上, 且 $BD = \frac{1}{3}BC$, $CE = \frac{1}{3}CA$, AD 与 BE 交于点 G 。

证明 $GD = \frac{1}{7}AD$, $GE = \frac{4}{7}BE$ 。

证明: 由 $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA$, 根据定理 2.1,

$$3\vec{D} = 2\vec{B} + \vec{C}, 3\vec{E} = 2\vec{C} + \vec{A}.$$

设 $AG = m, GD = n$, 则同理可得 $(m + n)\vec{G} = n\vec{A} + m\vec{D}$ 。设 $\vec{D} = \vec{0}$ (即, 选取点 D 为原点), 并消去 $\vec{A}, \vec{C}$ 得到

$$(m + n)\vec{G} = 3n\vec{E} + 4n\vec{B} \quad (2.4)$$

由于点 B, G, E 共线, 故由定理 2.1 可知 $m + n = 3n + 4n$ 。于是得 $m = 6n$ 。从而有 $GD = \frac{1}{7}AD$ 。将 $m = 6n$

代入式(2.4)得到 $7\vec{G} = 3\vec{E} + 4\vec{B}$ 。从而有 $GE = \frac{4}{7}BE$ 。

注: 在例 2.2 的证明中, 我们令 $\vec{D} = \vec{0}$, 主要目的是让计算更简单一些。事实上, 由于空间中数量关系与坐标的选取无关, 我们可以选取任意一点作为原点。如, 若在证明中令 $\vec{B} = \vec{0}$, 可得 $6\vec{D} + \vec{A} = 3\vec{E}$ 。

再消去 $\vec{A}$ 得到

$$(m+n)\vec{G} = 3n\vec{E} + (m-6n)\vec{D}.$$

由于点 B, G, E 共线, 故向量 $\vec{G}, \vec{E}$ 共线(因为 $\vec{B} = \vec{0}$)。于是必有 $(m-6n)=0$ 。从而有 $GD = \frac{1}{7}AD$, 且 $7\vec{G} = 3\vec{E}$ 。进而有 $GE = \frac{4}{7}BE$ 。

例 2.3 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 边的中点, $AB=12$, $AC=16$, E 和 F 分别在 AC 和 AB 上, 直线 EF 和 AM 交于 G 。若 $AE=2AF$, 求 $\frac{EG}{GF}$ 。

证明: 设 $AF=m$, 且 $\frac{EG}{GF}=s$ 。则由条件及定比分点公式可得

$$\begin{cases} 12\vec{F} = m\vec{B} + (12-m)\vec{A} \\ 16\vec{E} = 2m\vec{C} + (16-2m)\vec{A} \\ 2\vec{M} = \vec{B} + \vec{C} \\ (1+s)\vec{G} = s\vec{F} + \vec{E} \end{cases}$$

由前三个方程消去 $\vec{B}, \vec{C}$ 得到

$$12\vec{F} + 8\vec{E} = 2m\vec{M} + (20-2m)\vec{A}$$

再与第四方程结合, 消去 $\vec{E}$ 得到

$$8(1+s)\vec{G} + (12-8s)\vec{F} = 2m\vec{M} + (20-2m)\vec{A}$$

令 $\vec{F} = \vec{0}$, 则上式变为

$$8(1+s)\vec{G} = 2m\vec{M} + (20-2m)\vec{A}$$

由于点 A, G, M 共线, 故 $8(1+s) = 2m + (20-2m)$ 。从而 $s = \frac{3}{2}$ (或直接可以从 $\vec{F}$ 的系数 $12-8s=0$ 得到 $s = \frac{3}{2}$)。

3. 加权重心公式

定理 3.1 设线段 AC 的质量分布在端点, 分别为 m_a 与 m_c 。则线段 AC 的重心 B 满足

$$(m_a + m_c)\vec{B} = m_a\vec{A} + m_c\vec{C} \quad (3.1)$$

式(3.1)称为线段加权重心公式。

证明: 以点 B 作为线段 AC 的支点, 则由物理学杠杆原理可知

$$m_a \cdot AB = m_c \cdot BC$$

不失一般性, 不妨设 $AB = m_c, BC = m_a$ 。于是由定理 2.1 得到式(3.1)成立。

注: 定理 3.1 表明, 线段分点的位置向量可由端点的位置向量表示, 且从物理上看, 分点位置向量的系数是线段的总质量, 而端点位置向量的系数恰好是该端点的质量。

利用定理 3.1, 容易得到

推论 3.2 设线段 AB 的质量分布在端点, 分别为 m_a 与 m_c 。若 B 为 AC 的加权重心, 且 $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, 则

$$\frac{m_a}{m_c} = \frac{n}{m}$$

定义 3.1 设三角形的质量分布于三个顶点上。则称三角形的顶点与对边加权重心的连线为三角形的一条重心线。

定理 3.3 设 $\triangle ABC$ 的质量分布在顶点, 分别为 m_a , m_b 与 m_c 。则 $\triangle ABC$ 的三条重心线交于一点 G , 且满足

$$(m_a + m_b + m_c)\vec{G} = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} + m_c\vec{C} \quad (3.2)$$

称点 G 为 $\triangle ABC$ 的加权重心。式(3.2)称为三角形加权重心公式。

证明: 设 D 为边 BC 的重心, 则由定理 3.1 得到

$$m_d\vec{D} = (m_b + m_c)\vec{D} = m_b\vec{B} + m_c\vec{C}$$

设 G_1 为线段 AD 的加权重心, 则由定理 3.1 及上式得到

$$(m_a + m_d)\vec{G}_1 = m_a\vec{A} + m_d\vec{D} = m_a\vec{A} + (m_b + m_c)\vec{D}$$

即, $(m_a + m_b + m_c)\vec{G}_1 = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} + m_c\vec{C}$

同理可得另外两条重心线的重心 G_2, G_3 也满足上式, 从而三条重心线交于一点。

注 1 在定理 3.3 中, 若 $m_a + m_b + m_c$, 则得到三角形的重心公式

$$\vec{G} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$$

注 2 对于三角形内任意一点, 总可以对三个顶点赋予相应的质量, 使得该点为三角形的某个加权重心。留作练习供读者思考。

注 3 定理 3.3 表明, 三角形内部点的位置向量可由顶点的位置向量表示, 且从物理上看, 内点位置向量的系数是三角形的总质量, 而顶点位置向量的系数恰好是该顶点的质量。这与物理学中离散性质量分布下物体重心的位置是一致的。

例 3.1 证明塞瓦(Giovanni Ceva)定理及其逆定理: 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上。则 AD, BE, CF 交于一点当且仅当 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ 。

证明: ($\Rightarrow$) 设 AD, BE, CF 交于一点 G , 则 G 是 $\triangle ABC$ 中的加权重心, 点 D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 上的加权重心。由推论 3.2,

$$\frac{AF}{FB} = \frac{m_b}{m_a}; \frac{BD}{DC} = \frac{m_c}{m_b}; \frac{CE}{EA} = \frac{m_a}{m_c}.$$

于是,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{m_b}{m_a} \cdot \frac{m_c}{m_b} \cdot \frac{m_a}{m_c} = 1$$

($\Leftarrow$) 设 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ 令 $\frac{AF}{FB} = \frac{m_b}{m_a}, \frac{BD}{DC} = \frac{m_c}{m_b}$, 则 $\frac{CE}{EA} = \frac{m_a}{m_c}$ 。于是点 D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 上的重心。由定理 3.3 可知, AD, BE, CF 交于一点。

例 3.2 用加权重心公式证明例 2.1。

证明: 如所知, 三角形的三条对角线 AD, BE, CF 交于内心 I 。则 I 也是三角形的加权重心。由角平

分线定理, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, 根据推论 3.2, 取 $m_b = b, m_c = c$ 。再由 $\frac{AF}{FB} = \frac{CA}{AB} = \frac{b}{a}$, 可知 $m_a = a$ 。于是由定理 3.3 三角形加权重心公式得到

$$(a+b+c)\vec{I} = a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}$$

例 3.3 用加权重心公式证明例 2.2。

证明: 设 $m_b = 2, m_c = 1$ 。则由 $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ 知 D 为 BC 重心。设 $m_a = \frac{1}{2}$, 则由 $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$ 知 E 为 AC 重心。于是点 G 既是线段 AD 加权重心, 也是三角形的加权重心。由定理 3.1 及 3.3 得到

$$(m_a + m_b + m_c)\vec{G} = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} + m_c\vec{C} = m_a\vec{A} + m_d\vec{D} = m_b\vec{B} + m_e\vec{E}$$

将 $m_a = \frac{1}{2}, m_b = 2, m_c = 1, m_d = 3, m_e = \frac{3}{2}$ 代入得到

$$7\vec{G} = \vec{A} + 6\vec{D} = 4\vec{B} + 3\vec{E}.$$

于是 $GD = \frac{1}{7}AD, GE = \frac{4}{7}BE$ 。

例 3.4 设 G 为 $\triangle ABC$ 内一点。证明:

$$S_{\triangle GBC} \cdot \vec{GA} + S_{\triangle GAC} \cdot \vec{GB} + S_{\triangle GAB} \cdot \vec{GC} = 0$$

证明: 设 AG, BG, CG 分别交 BC, CA, AB 于 D, E, F 。由于 G 为 $\triangle ABC$ 加权重心, 故

$$(m_a + m_b + m_c)\vec{G} = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} + m_c\vec{C}$$

整理得到

$$m_a\vec{GA} + m_b\vec{GB} + m_c\vec{GC} = 0. \quad (3.3)$$

由三角形面积比性质及推论 3.2,

$$\frac{S_{\triangle GBC}}{S_{\triangle GAC}} = \frac{S_{\triangle GBF}}{S_{\triangle GAF}} = \frac{BF}{AF} = \frac{m_a}{m_b}$$

$$\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GAC}} = \frac{S_{\triangle GBD}}{S_{\triangle GCD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{m_c}{m_b}$$

故

$$S_{\triangle GBC} : S_{\triangle GAC} : S_{\triangle GAB} = m_a : m_b : m_c.$$

代入式(3.3)中, 即得要证等式。

注例 3.4 及其证明表明, 三角形内部点的位置向量可由顶点的位置向量表示, 且从几何上看, 内点位置向量的系数是三角形的总面积, 而顶点位置向量的系数恰好是内点与另外两个顶点构成的三角形面积。换言之, 我们有

$$S_{\triangle ABC} \cdot \vec{G} = S_{\triangle GBC} \cdot \vec{A} + S_{\triangle GAC} \cdot \vec{B} + S_{\triangle GAB} \cdot \vec{C}$$

例 3.5 设 O 点是 $\triangle ABC$ 内一点。 BO, CO 的延长线分别交 AC, AB 于 E, F , 则

$$\frac{OB}{OE} \cdot \frac{OC}{OF} = \frac{AB}{AF} \cdot \frac{AC}{AE}$$

证明: 设 O 点是 $\triangle ABC$ 的加权重心, 则 E, F 分别为边 AC, AB 的加权重心。于是

$$\begin{cases} (m_a + m_b)\vec{F} = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} \\ (m_a + m_c)\vec{E} = m_a\vec{A} + m_c\vec{C} \\ (m_a + m_b + m_c)\vec{O} = m_a\vec{A} + m_b\vec{B} + m_c\vec{C} \end{cases}$$

由推论 3.2 及第一、二个方程得到

$$\frac{AB}{AF} = \frac{m_a + m_b}{m_b}, \frac{AC}{AE} = \frac{m_a + m_c}{m_c}$$

再由三个方程得到

$$(m_a + m_b + m_c)\vec{O} = (m_a + m_b)\vec{F} + m_c\vec{E} = (m_a + m_c)\vec{E} + m_b\vec{B}$$

类似可得

$$\frac{OB}{OE} = \frac{m_a + m_c}{m_b}, \frac{OC}{OF} = \frac{m_a + m_b}{m_c}$$

于是,

$$\frac{OB}{OE} \cdot \frac{OC}{OF} = \frac{m_a + m_c}{m_b} \cdot \frac{m_a + m_b}{m_c} = \frac{AB}{AF} \cdot \frac{AC}{AE}$$

4. 分析与讨论

在本文中, 我们首先从定比分点公式出发, 得到它的一般形式, 重点阐释了系数表达的几何意义, 并通过例题介绍了灵活使用定比分点公式的基本思路和方法。其次, 我们利用杠杆原理将定比分点公式赋予物理意义, 将分点及三角形内点分别理解为线段及三角形的加权重心, 得到线段与三角形的加权重心公式。在运用加权重心公式处理几何问题时, 我们可以将端点或顶点进行赋值, 列出位置向量的线性方程组, 从而使较为复杂的几何问题转化为一些简单的计算。有兴趣的读者可以进一步将以上结果推广到四面体中, 即得到四面体的加权重心公式。

通过探究来理解数学, 对数学结果进行多角度多维度解读, 或横向关联, 或纵向挖掘, 把数学中蕴含的精神、思想、方法揭示出来, 是学习数学的重要途径。大学课堂教学中要鼓励探究, 激发兴趣, 更要培养学生发散性思维、创造性思维。本文将定比分点公式的几何意义与物理意义相互融合, 体现了数学与物理密不可分的联系; 同时也建构了几何与代数、数学与物理之间的桥梁, 增添了数学知识的趣味性与深度。

致 谢

作者在本文的撰写中得到尹松庭教授的指导与帮助, 在此表示诚挚的感谢。

基金项目

本文得到大学生国家级创新创业项目(201810383166)资助。

参考文献

- [1] 邹宇, 张景中. 用向量解直线交点类问题的机械化方法[J]. 数学通报, 2012, 51(2): 58-62.
- [2] 严士健, 张奠宙, 王尚志. 普通高中数学课程标准(实验)解读[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2004.
- [3] 张景中, 彭翥成. 论向量法解几何问题的基本思路[J]. 数学通报, 2008, 47(2): 6-10.

-
- [4] 张景中, 彭翥成. 论向量法解几何问题的基本思路(续) [J]. 数学通报, 2008, 47(3): 31-36.
 - [5] 高红铸, 王敬虞, 傅若男. 空间解析几何[M]. 第4版. 北京: 北京师范大学出版社, 2018.
 - [6] 吕林根, 许子道, 等. 解析几何[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2001.
 - [7] 宋卫东. 解析几何[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
 - [8] 尤承业. 解析几何[M]. 第2版. 北京: 北京大学出版社, 2004.
 - [9] 李玉浩. 定比分点公式的推广与应用——一道a课本例题的研究与启示[J]. 高中数学教与学, 2021(9): 19-20.
 - [10] 张大华. 平面几何中的一个定比分点公式及应用[J]. 上海中学数学, 2017(5): 37-38.
 - [11] 朱胜强. 线段定比分点向量公式的几何意义及其应用[J]. 数学通报, 2016, 55(6): 31-33.