

带混合色散项的非线性薛定谔方程归一化驻波解的存在性

何 涛

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年4月15日; 录用日期: 2025年5月16日; 发布日期: 2025年5月27日

摘 要

本文研究了带混合色散项的非线性薛定谔方程归一化驻波解的存在性结果, 证明了三维情况下方程基态解的存在性。主要研究方法是基于极小极大方法和集中紧性原理。

关键词

归一化解, 基态, 非线性薛定谔方程

Existence of Normalized Standing Waves for a Nonlinear Schrödinger Equation with Mixed Dispersion

Tao He

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 15th, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 27th, 2025

Abstract

In this paper, we study the existence of normalized standing wave solutions for a nonlinear Schrödinger equation with mixed dispersion, and prove the existence of ground state solutions in the three-dimensional case. The main analytical approaches are based on the minimax approach and Concentration-compactness Lemma.

Keywords

Normalized Solution, Ground State, Nonlinear Schrödinger Equation



1. 引言

为了对非线性薛定谔方程的解进行正则化和稳定性研究, Karpman 以及之后的 Karpman 和 Shagalov [1][2], 提出在模型中加入高阶色散项, 作为通过非线性饱和来实现稳定性的替代方法。研究表明, 添加一个高的小阶色散项有助于解的稳定性。

本文研究如下带混合色散项的非线性薛定谔方程:

$$\begin{cases} i\partial_t \psi - \gamma \Delta^2 \psi + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $N=3$, $\gamma > 0$ 是被给定的参数, 双调和算子 $\Delta^2 := \Delta(\Delta)$, $\sigma > 2$ 对于 $N=3$ 。

2019 年, Bonheure 等人[3]研究了方程(1.1)在质量临界情况 $\sigma N = 4$ 和质量超临界情况 $4 < \sigma N < 4^*$ 下基态和正解的存在性以及径向解的多重性。还讨论了相关色散方程的驻波的稳定性。这里

$$4^* = \begin{cases} \infty, & N \leq 4 \\ \frac{4N}{N-4}, & N \geq 5 \end{cases}.$$

2. 准备工作

对于方程(1.1)质量和能量在演化过程中是守恒的。本文主要研究方程的驻波解, 即解的形式为:

$$\psi(t, x) = e^{i\beta t} u(x), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

则 $u(x)$ 满足下列椭圆方程:

$$\gamma \Delta^2 u - \Delta u + \beta u = |u|^{2\sigma} u, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^N). \quad (2.1)$$

在本文中, 我们寻找满足给定 L^2 范数的方程(2.1)的解。因为方程(1.1)的某些解在时间演化中保持质量不变, 从物理角度来看, 给定 $m > 0$ 时, 在以下约束条件下寻找方程(2.1)的解是有意义的:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = m. \quad (2.2)$$

满足方程(2.1)和约束条件(2.2)的解是作为能量泛函的约束临界点得到的, 即

$$E(u) = \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2\sigma+2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma+2} dx, \quad (2.3)$$

约束在

$$S(m) = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}^N) \mid \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = m \right\}. \quad (2.4)$$

因此, 方程(2.1)中的 $\beta \in \mathbb{R}$ 是一个未知量, 并且是作为一个相关的拉格朗日乘子出现。实际上, 我们关心的是能量泛函 $E(u)$ 在 $S(m)$ 上的最小能量临界点的存在性。为了进一步阐明这一点, 先回顾一下基态的定义。

定义 1.1 令 $m > 0$, 如果 $u_m \in S(m)$ 满足

$$E(u_m) = \inf \left\{ E(u) \mid dE|_{S(m)}(u) = 0, u \in S(m) \right\},$$

则 u_m 是一个基态。

在质量超临界的情况下 $4 < \sigma N < 4^*$, 这个能量泛函 E 在 L^2 范数约束下不是下有界的。我们将基于[4]的思想方法, 证明能量泛函 E 在 $S(m)$ 上具有山路几何结构。我们将在山路值处获得一个临界点。

定义 1.2 设 $m > 0$, $E(u)$ 在 $S(m)$ 上有山路几何结构, 如果这里存在 $u_1, u_2 \in S(m)$, 使得

$$I(m) > \max \{E(u_1), E(u_2)\} \text{ 和 } E(u_1) > 0 > E(u_2)$$

其中

$$I(m) := \inf_{g \in \Gamma(m)} \max_{t \in [0,1]} E(g(t)),$$

在如下给定的集合中成立

$$\Gamma(m) = \{g \in C([0,1]; S(m)) \mid g(0) = u_1, g(1) = u_2\}.$$

首先, 我们知道从 Ekeland 变分原理可以导致存在一个 Palais-Smale 序列在能级 $I(m)$ 上[5], 即这个序列 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 满足

$$E(u_n) = I(m) + o_n(1) \text{ 和 } \|dE|_{S(m)}(u_n)\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^N)} = o_n(1) \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}.$$

然而, 当我们尝试去构建一个有界的 Palais-Smale 序列时出现了一个困难。为了克服这个问题, 我们将介绍这个 Derrick-Pohozaev 函数[6] [7]

$$Q(u) := \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma+2} dx. \quad (2.5)$$

我们特别注意到方程(2.1)的解 u 满足 $Q(u) = 0$ (看[8])。

定义 1.3 空间 X 被定义为

$$X := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx < \infty \right\},$$

并且定义 Banach 空间 X 嵌入到范数 $\|u\|_X^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ 。

为了方便, 在后续论文中我们都定义

$$A(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx, \quad D(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad K(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma+2} dx.$$

则

$$E(u) = \frac{\gamma}{2} A(u) + \frac{1}{2} D(u) - \frac{1}{2\sigma+2} K(u),$$

和

$$Q(u) = \gamma A(u) + \frac{1}{2} D(u) - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} K(u).$$

为了研究 Palais-Smale 序列的紧性, 我们考虑下列的椭圆方程:

$$\gamma \Delta^2 u - \Delta u = |u|^{2\sigma} u. \quad (2.6)$$

方程(2.6)是一种被称作“零质量”的特殊情况, 在文献[9]中, d'Avenia 等人则研究了方程(2.6)对于

多重径向和非径向的解。

接着, 给出一个特别重要的等式:

$$E(u) - \frac{2}{\sigma N} Q(u) = \gamma \frac{\sigma N - 4}{2\sigma N} A(u) + \frac{\sigma N - 2}{2\sigma N} D(u). \quad (2.7)$$

对于 $u \in S(m)$ 和 $\lambda > 0$, 定义这个缩放

$$u^\lambda(x) := \lambda^{\frac{N}{4}} u(\sqrt{\lambda}x). \quad (2.8)$$

这个定义是明显保持 L^2 范数的, 即 $\|u^\lambda\|_2^2 = \|u\|_2^2$ 。因此, 这就导致了 $u^\lambda \in S(m)$ 。

3. 主要结果

命题 3.1 令 $N=3$, $\sigma > 2$, $m > 0$ 和 $u \in S(m)$, 有

- (i) $\frac{d}{d\lambda} E(u^\lambda) = \frac{1}{\lambda} Q(u^\lambda)$, 对于 $\lambda > 0$;
- (ii) 这里存在一个唯一的 $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(u) > 0$, 使得 $u^{\tilde{\lambda}} \in V(m)$;
- (iii) 这个映射 $\lambda \mapsto E(u^\lambda)$ 在 $[\tilde{\lambda}, \infty)$ 上凹的并且 $\frac{d^2}{d\lambda^2} E(u^{\tilde{\lambda}}) < 0$;
- (iv) 存在一个 $\tilde{\lambda}(u) = 1$ 当且仅当 $Q(u) = 0$ 。

证明: 首先证明(i)。从(2.8)可得

$$E(u^\lambda) = \frac{\gamma}{2} \lambda^2 A(u) + \frac{1}{2} \lambda D(u) - \frac{1}{2\sigma+2} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}} K(u) \quad (3.1)$$

和

$$Q(u^\lambda) = \gamma \lambda^2 A(u) + \frac{1}{2} \lambda D(u) - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}} K(u). \quad (3.2)$$

通过计算有

$$\frac{d}{d\lambda} E(u^\lambda) = \gamma \lambda A(u) + \frac{1}{2} D(u) - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}-1} K(u). \quad (3.3)$$

因此得到

$$\frac{d}{d\lambda} E(u^\lambda) = \frac{1}{\lambda} Q(u^\lambda). \quad (3.4)$$

下面证明(ii), 从(3.2)有

$$Q(u^\lambda) = \lambda \left[\gamma \lambda A(u) + \frac{1}{2} D(u) - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}-1} K(u) \right].$$

令

$$y(\lambda) = \gamma \lambda A(u) + \frac{1}{2} D(u) - \frac{\sigma N}{2(2\sigma+2)} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}-1} K(u),$$

并且观察到 $Q(u^\lambda) = \lambda y(\lambda)$ 。注意到如果证明 $y(\lambda)$ 获得了一个唯一的零点, 记为 $\tilde{\lambda} > 0$, 则有 $Q(u^{\tilde{\lambda}}) = 0$ 。事实上, 通过一些计算有

$$y'(\lambda) = \gamma A(u) - \frac{\sigma N(\sigma N - 2)}{4(2\sigma + 2)} \lambda^{\frac{\sigma N}{2} - 2} K(u).$$

当 $\sigma N > 4$ 时, 有 $\frac{\sigma N}{2} - 2 > 0$, 并且 $y'(\lambda)$ 有且只有一个大于零的零点, 记为 $\lambda_0 > 0$ 。

因为 $y(0) = \frac{1}{2} D(u) \geq 0$ 和 $y(\lambda) \rightarrow -\infty$ 当 $\lambda \rightarrow +\infty$, 我们推测 $y(\lambda)$ 是递增的在 $[0, \lambda_0]$ 上, 并且是递减的在 $[\lambda_0, +\infty)$ 。则这里存在唯一一个 $\tilde{\lambda} > 0$ 使得 $y(\tilde{\lambda}) = 0$, 这就意味着 $Q(u^{\tilde{\lambda}}) = 0$ 。更进一步, 通过这个缩放 (2.8), 有 $\|u^{\tilde{\lambda}}\|_2^2 = \|u\|_2^2$ 。因此, 就证明了 $u^{\tilde{\lambda}} \in S(m)$ 。

接下来证明(iii)。将缩放后的能量重新表达为

$$E(u^\lambda) = \frac{\gamma}{2} \lambda^2 A(u) + \frac{1}{2} \lambda D(u) - \frac{1}{2\sigma + 2} \lambda^{\frac{\sigma N}{2}} K(u) = a\lambda^2 + b\lambda - c\lambda^{\frac{\sigma N}{2}}.$$

令 $\lambda \in (0, \infty)$ 和 $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda - c\lambda^{\frac{\sigma N}{2}}$, 其中 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$ 。则 $E(u^\lambda) = f(\lambda)$ 。

$$f'(\lambda) = 2a\lambda + b - c\frac{\sigma N}{2} \lambda^{\frac{\sigma N}{2} - 1}, \quad f''(\lambda) = 2a - c\frac{\sigma N}{2} \left(\frac{\sigma N}{2} - 1 \right) \lambda^{\frac{\sigma N}{2} - 2}.$$

从上面两个等式有

$$f'(\lambda) - \lambda f''(\lambda) = b + c\frac{\sigma N}{2} \left(\frac{\sigma N}{2} - 2 \right) \lambda^{\frac{\sigma N}{2} - 1}.$$

因为 $\sigma N > 4$, 则有 $f'(\lambda) > \lambda f''(\lambda)$ 。

更进一步, 基于(i)和(ii), 知道了 $f'(\tilde{\lambda}) = 0$ 和 $f'(\lambda) \leq 0$ 在 $[\tilde{\lambda}, \infty)$ 。因此 $f''(\tilde{\lambda}) < 0$ 和 $f''(\lambda) < 0$ 在 $[\tilde{\lambda}, \infty)$ 上。

最后让我们证明(iv)。一方面, 当 $\tilde{\lambda} = 1$ 时, 因为 $Q(u^{\tilde{\lambda}}) = 0$, 则 $Q(u) = Q(u^{\tilde{\lambda}}) = 0$ 另一方面, 因为 $\tilde{\lambda} > 0$ 是 $Q(u^{\tilde{\lambda}})$ 唯一的一个零点, 通过 $Q(u) = 0$, 推测 $\tilde{\lambda} = 1$ 。

命题 3.2 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 对于任意的 $m > 0$, $E(u)$ 在 L^2 限制的 $S(m)$ 上有一个山路几何结构。

证明: 步骤 1: 我们声明这里存在 $0 < k_1 \ll k_2$ 使得

$$0 < \sup_{u \in \mathcal{D}_{k_1}} E(u) < \inf_{u \in \mathcal{D}_{k_2}} E(u),$$

其中 $\mathcal{D}_{k_1} = \{u \in S(m) \mid \|u\|_X^2 \leq k_1\}$, $\mathcal{D}_{k_2} = \{u \in S(m) \mid \|u\|_X^2 = k_2\}$ 。

事实上, 从 X 范数的定义可以得到 $A(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_X^2$ 或者 $D(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_X^2$, 这个事实意味着

$$\frac{\gamma}{2} A(u) + \frac{1}{2} D(u) = \frac{1}{2} (\gamma A(u) + D(u)) \geq \frac{\gamma + 1}{4} \|u\|_X^2. \quad (3.5)$$

此外, 从 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 可以得出

$$K(u) \leq B_N(\sigma) m^{1 + \sigma - \frac{\sigma N}{4}} \|\Delta u\|_2^{\frac{\sigma N}{2}} \leq C \|u\|_X^{\frac{\sigma N}{2}}, \quad (3.6)$$

结合(3.5)和(3.6)给出

$$E(u) \leq \frac{\gamma}{2} A(u) + \frac{1}{2} D(u) + \frac{1}{2\sigma + 2} K(u) \leq \frac{\gamma}{2} \|u\|_X^2 + \frac{1}{2} \|u\|_X^2 + C \|u\|_X^{\frac{\sigma N}{2}}, \quad (3.7)$$

$$E(u) \geq \frac{\gamma+1}{4} \|u\|_X^2 - \frac{1}{2\sigma+2} K(u) \geq \frac{\gamma+1}{4} \|u\|_X^2 - C \|u\|_X^{\frac{\sigma N}{2}}. \quad (3.8)$$

因此, 固定 $\|u\|_X^2 = k$, 并且定义这个集合 $\mathcal{D}_k = \{u \in S(m) \mid \|u\|_X^2 = k, k > 0\}$, 对于任意 $u \in \mathcal{D}_k$, 得到

$$E(u) \geq \frac{\gamma+1}{4} k - C k^{\frac{\sigma N}{4}}, \quad Q(u) \geq \frac{\gamma+1}{4} k - C k^{\frac{\sigma N}{4}}.$$

因为 $\sigma N > 4$, 推测这里存在一个足够小的 $0 < k_1 \ll k_2 \ll 1$ 使得

$$0 < \sup_{u \in \mathcal{D}_{k_1}} E(u) < \inf_{u \in \mathcal{D}_{k_2}} E(u) \quad \text{和} \quad \inf_{u \in \mathcal{D}_k} Q(u) > 0 \quad \text{对于} \quad 0 < k < k_2.$$

因此, 从 $I(m)$ 的定义有 $I(m) \geq \inf_{u \in \mathcal{D}_{k_2}} E(u) > 0$ 。

步骤 2: 证明这里存在 $u_1, u_2 \in S(m)$ 使得

$$\|u_1\|_X^2 \leq k_1 \ll k_2 < \|u_2\|_X^2 \quad \text{和} \quad E(u_1) > 0 > E(u_2). \quad (3.9)$$

事实上, 因为 $A(u^\lambda) = \lambda^2 A(u)$, $D(u^\lambda) = \lambda D(u)$, 可以看出 $A(u^\lambda) \rightarrow 0$, $D(u^\lambda) \rightarrow 0$ 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 并且 $A(u^\lambda) \rightarrow +\infty$, $D(u^\lambda) \rightarrow +\infty$, 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 。结合 $\sigma N > 4$ 和 (3.1) 可以得出 $E(u^\lambda) \rightarrow -\infty$ 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 并且 $E(u^\lambda) \rightarrow 0$ 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时。

因此, 这里存在足够小 $0 < t_1 < 1$ 使得 $\|u^{t_1}\|_X^2 \leq k_1$ 和 $E(u^{t_1}) > 0$, 这里也存在足够大的 $t_2 > 1$ 使得 $\|u^{t_2}\|_X^2 > k_2$ 和 $E(u^{t_2}) < 0$ 。定义 $u_1 = u^{t_1}$, $u_2 = u^{t_2}$, 因此 $u_1, u_2 \in S(m)$ 和 (3.9) 成立。则有 $I(m) > \max\{E(u_1), E(u_2)\} > 0$ 。所以, 命题 3.2 得证。

我们定义包含了所有 E 限制在 $S(m)$ 上临界点的一个集合为

$$V(m) := \{u \in S(m) \mid Q(u) = 0\}. \quad (3.10)$$

命题 3.3 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 则这里存在一个 Palais-Smale 序列 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 满足 $Q(u_n) = o_n(1)$, 并且这个序列 $\{u_n\}_n$ 是有界的在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中。

证明: 命题 2.2 意味着一个存在一个 Palais-Smale 序列 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 满足

$$E(u_n) = I(m) + o_n(1) \quad \text{和} \quad \|dE|_{S(m)}(u_n)\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^N)} = o_n(1).$$

基于 [10] [11] 中的定理 1, 在 $V(m)$ 周围存在一个特殊的序列满足 $\text{dist}(u_n, V(m)) = o_n(1)$ 。令 $v \in V(m)$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$Q(u_n) = Q(v) + dQ(\theta u_n + (1-\theta)v)(u_n - v) = dG(\theta u_n + (1-\theta)v)(u_n - v),$$

其中 $\theta \in [0, 1]$, 因此, 选择一个序列 $\{v_j\}_j \subset V(m)$ 使得

$$\|u_n - v_j\| \rightarrow \text{dist}(u_n, V(m)) = o_n(1) \quad \text{当} \quad j \rightarrow \infty.$$

则得到 $Q(u_n) = o_n(1)$ 。最后, 注意到 $A(u_n)$ 和 $D(u_n)$ 是有界的因为 (2.7)。因此, 可以毫无疑问的假设 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 是有界序列在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中。

对于任意的 $m > 0$, 令 $u_m \in S(m)$ 是一个基态, 很容易得到 $E(u_m) = \inf_{V(m)} E(u)$ 。

命题 3.4 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 有 $I(m) = \inf_{V(m)} E(u)$ 。

证明: 对于任意的 $u \in V(m)$, 定义一条路径为 $g(\mu) = u^{(1-\mu)t_1 + \mu t_2}$ 对于 $\mu \in [0, 1]$ 。我们声明定义的这条路径满足(3.9)。事实上, 如果 $\mu = 0$, $g(0) = u^{t_1} = u_1$, 并且如果 $\mu = 1$, $g(1) = u^{t_2} = u_2$ 。同时, 考虑到这个缩放保持 L^2 范数这个事实, 则在 $\Gamma(m)$ 中得到了一条路径。

一方面, 从 $I(m)$ 的定义可以得到 $I(m) \leq \max_{\mu \in [0, 1]} E(g(\mu))$ 。因为 $Q(u) = 0$, 从命题 3.1(iv), 得到 $\max_{\mu \in [0, 1]} E(g(\mu)) = E(u)$ 。这就意味着 $I(m) \leq \inf_{V(m)} E(u)$ 。另一方面, 从命题 3.1 得到如果 $E(u) < 0$, 则 $Q(u) < 0$, 并且从命题 3.2 知道这里存在 $u \in S(m)$, 使得 $Q(u) > 0$ 。通过函数 g 的连续性, 在 $\Gamma(m)$ 中的每一条道路都和 $V(m)$ 相交。因此, 有 $\max_{\mu \in [0, 1]} E(g(\mu)) \geq \inf_{V(m)} E(u)$ 。这就意味着 $I(m) \geq \inf_{V(m)} E(u)$ 。结果, 这就得到 $I(m) = \inf_{V(m)} E(u)$ 。

命题 3.5 ([3]) 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 则这个函数 $m \mapsto I(m)$ 是连续的和非增的在 $(0, \infty)$ 上。

引理 3.6 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 有 $I(m) \rightarrow \infty$ 当 $m \rightarrow 0^+$ 时。

证明: 首先, 令 $u_m \in V(m)$ 同时 $E(u_m) = I(m)$, 因为 $Q(u_m) = 0$ 得到

$$\gamma \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_m|^2 dx \leq \frac{\sigma N}{2(2\sigma + 2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_m|^{2\sigma+2} dx.$$

因此, 从 Gagliardo-Nirenberg 不等式得到

$$\|\Delta u_m\|_2^2 \leq \frac{\sigma N}{2\gamma(2\sigma + 2)} \|u_m\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \leq \frac{\sigma N}{2\gamma(2\sigma + 2)} B_N(\sigma) \|u_m\|_2^{2+2\sigma-\frac{\sigma N}{2}} \|\Delta u_m\|_2^{\frac{\sigma N}{2}},$$

即

$$1 \leq \frac{\sigma N}{2\gamma(2\sigma + 2)} B_N(\sigma) m^{1+\sigma-\frac{\sigma N}{4}} \|\Delta u_m\|_2^{\frac{\sigma N}{4}}.$$

因为 $6 < \sigma N < \infty$, 得到 $\|\Delta u_m\|_2^2 \rightarrow \infty$ 当 $m \rightarrow 0^+$ 时, 现在, 通过(2.7), 得到

$$I(m) = E(u_m) = \gamma \frac{\sigma N - 4}{2\sigma N} A(u_m) + \frac{\sigma N - 2}{2\sigma N} D(u_m).$$

因此 $I(m) \rightarrow \infty$ 当 $m \rightarrow 0^+$ 时。

命题 3.7 ([12]) 函数 $\theta \mapsto E((\theta u)^{\tilde{\lambda}(\theta u)})$ 是 C^1 的在 $\theta = 1$ 的某个领域内。

引理 3.8 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 是一个有界的 Palais - Smale 序列在这个能级 $I(m)$ 上。如果 $I(m) < I(\mu)$, 对于任意的 $\mu \in (0, m)$, 则存在子序列, 使得平移后的序列 $u_n \rightarrow u$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$, 同时 $E(u) = I(m)$ 和 $Q(u) = 0$ 。

证明: 根据命题 3.3, 这里存在一个有界的序列 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 满足

$$E(u_n) = I(m) + o_n(1), \quad \|dE|_{S(m)}(u_n)\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^N)} = o_n(1) \text{ 和 } Q(u_n) = o_n(1).$$

第二步, 证明 $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ 。事实上, 如果 $u = 0$, 则通过集中紧性原理[13]可以推断 $\{u_n\}_n$ 满足消失性, 并且 $\|u_n\|_{2\sigma+2} = o_n(1)$ 。我们声明 $\|u_n\|_{2\sigma+2} \geq c > 0$ 。事实上, 通过反证法假设 $\|u_n\|_{2\sigma+2} = o_n(1)$ 。因为 $Q(u_n) = o_n(1)$, 从(2.5)可以断定 $A(u_n) = o_n(1)$, $D(u_n) = o_n(1)$, 并且因此从(2.7)可以推测 $I(m) = o_n(1)$, 这就产生了一个矛盾。因此 $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ 。

最后, 让我们证明 $\{u_n\}_n$ 强收敛到 u 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中。因为我们已经知道了 u 是方程(2.1)的一个非平方的弱解, 能够假设 $u \in V(\mu^2)$ 对于任意的 $\mu \in (0, m]$ 。一方面, 从这个弱收敛 $u_n \rightharpoonup u$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中

$$A(u_n - u) + A(u) = A(u_n) + o_n(1), D(u_n - u) + D(u) = D(u_n) + o_n(1). \quad (3.11)$$

另一方面, 从 Brezis-Lieb 引理推断出

$$K(u_n - u) + K(u) = K(u_n) + o_n(1), \quad (3.12)$$

并且因为 $E(u_n) \rightarrow I(m)$, 这意味着

$$E(u_n - u) + E(u) = I(m) + o_n(1), Q(u_n - u) + Q(u) = Q(u_n) + o_n(1). \quad (3.13)$$

因为 $Q(u_n) = 0$, $Q(u) = 0$, 也有 $Q(u_n - u) = o_n(1)$ 。从 $u \in V(\mu)$ 可以得出结论 $E(u) \geq I(\mu)$, 则

$$E(u_n - u) + I(\mu) \leq E(u_n - u) + E(u) = I(m) + o_n(1). \quad (3.14)$$

从(2.7)推断出

$$\gamma \frac{\sigma N - 4}{2\sigma N} A(u_n - u) + \frac{\sigma N - 2}{2\sigma N} D(u_n - u) + I(\mu) \leq I(m) + o_n(1). \quad (3.15)$$

通过 $I(m)$ 的单调性, 直接推断 $\mu = m$ 这意味着 $A(u_n - u) = o_n(1)$, $D(u_n - u) = o_n(1)$ 。

同时, 因为 $u_n \rightharpoonup u$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中, 得到 $\|u_n - u\|_2^2 = o_n(1)$, 并且因此这就证明了 $u_n \rightarrow u$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中当 $n \rightarrow \infty$ 时和 $E(u_n - u) = o_n(1)$ 。则从(3.13)有 $E(u) = I(m)$ 。

引理 3.9 如果函数 $m \mapsto I(m)$ 不是严格递减的在区间 $(0, m]$ 上, 则这里存在一个 $m_0 \in (0, m)$ 和一个相对应的基态 $u_0 \in S(m_0)$, 使得 u_0 是方程(2.6)的一个解。

证明: 因为 $I(m)$ 不是严格单调递减的函数在区间 $(0, m]$ 上, 则这里存在一个最小点 $\bar{m} \in (0, m)$, 使得对于这个给定的参数 e 和 m_0 , 有 $m_0 < \bar{m}$, 其中 e 和 m_0 被定义为

$$e := \inf_{m \in (0, \bar{m})} I(m) \text{ 和 } m_0 := \inf \{m \in (0, \bar{m}) \mid I(m) = e\}.$$

从引理 3.6 有 $m_0 > 0$ 。因此, 得到一个区间 $(0, m_0]$ 。对于任意的 $s \in (0, m_0)$, 有 $I(m_0) < I(s)$, 并且如果 $s \in (m_0, \bar{m})$, 则 $I(s) = I(m_0)$ 。更进一步, 从引理 3.8 得到这里存在一个山路解 u_0 具有质量 m_0 在山路能级上。因为函数 $I(m)$ 在 m_0 处取了一个全局最小值点在 $(0, \bar{m})$ 上, 有

$$E(u_0) = I(m_0) \leq I(\theta u_0) \leq E((\theta u_0)^{\tilde{\lambda}(\theta u_0)}),$$

对于任意的 $\theta \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ 。从命题 2.1(iv)推断出 $\theta = 1$ 是函数 $E((\theta u_0)^{\tilde{\lambda}(\theta u_0)})$ 的一个局部最小值点, 则

$$\frac{d}{d\theta} \left(E((\theta u_0)^{\tilde{\lambda}(\theta u_0)}) \right) \Big|_{\theta=1} = 0.$$

通过保持 L^2 范数的缩放(2.8)的定义, 有

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{\gamma}{2} \theta^2 \tilde{\lambda}^2 A(u_0) + \frac{1}{2} \theta^2 \tilde{\lambda} D(u_0) - \frac{1}{2\sigma + 2} \theta^{2\sigma+2} \tilde{\lambda}^{\frac{\sigma N}{2}} K(u_0) \right] \Big|_{\theta=1} = 0.$$

由命题 3.7 知道 $\tilde{\lambda}(\theta u_0)$ 是 C^1 对于 $\theta \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ 。通过 $Q(u_0) = 0$ 这个事实, 有 $\tilde{\lambda}(\theta u_0)|_{\theta=1} = 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(E((\theta u)^{\tilde{\lambda}(\theta u)}) \right) \Big|_{\theta=1} &= \left[\gamma A(u_0) + \frac{1}{2} D(u_0) + \frac{\sigma N}{2(2\sigma + 2)} K(u_0) \right] \frac{d}{d\theta} \tilde{\lambda} \Big|_{\theta=1} \\ &\quad + \gamma A(u_0) + D(u_0) - K(u_0) = 0. \end{aligned}$$

从 $Q(u)$ 的定义, 结合 $Q(u_0) = 0$ 这个事实, 有 $\gamma A(u_0) + D(u_0) - K(u_0) = 0$, 并且因为 u_0 满足方程

$$\gamma \Delta^2 u_0 - \Delta u_0 + \beta u_0 = |u_0|^{2\sigma} u_0,$$

其中 β 是一个相关的拉格朗日乘子, 这意味着 $\beta = 0$ 。因此, 推断出 u_0 是方程(2.6)的解。

定义 $\rho := \inf \{E(u) | u \in X \setminus \{0\}, dE(u) = 0\}$ 。

命题 3.10 ([3]) 当 $N = 3$ 时令 $\sigma > 2$, 则 $\rho > 0$ 能够取到。而且没有极小点属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 。

4. 定理的证明

定理 4.1 令 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$, 则对于任意的 $m > 0$ 这里存在一个基态 $u_m \in S(m)$ 和相应的拉格朗日乘子 $\beta_m \in \mathbb{R}$, 使得 $e^{i\beta_m t} u_m$ 是方程(1.1)的一个解且 $E(u_m) = I(m)$ 。

Bonheure 等人[4]获得方程(1.1)基态的存在性, 只有当 $0 < m < m_{N,\sigma} < \infty$ 时, 其中 $m_{N,\sigma}$ 是一个取决于 N 和 σ 的常数。这里我们获得的存在性结果是对于所有的 $m > 0$ 成立。

定理 4.1 的证明: 当 $N = 3$ 且 $\sigma > 2$ 时, 通过命题 3.3, 我们推断存在一个有界的 Palais-Smale 序列 $\{u_n\}_n \subset S(m)$ 满足 $Q(u_n) = o_n(1)$ 。

我们断言函数 $m \mapsto I(m)$ 是严格递减的在 $(0, \infty)$ 上。事实上, 如果我们假设 $I(m)$ 不是严格递减的在 $(0, \infty)$ 上, 则从引理 3.9 可以得出结论: 这里存在一个基态 $u_0 \in S(m_0)$, 其中 $m_0 \in (0, \infty)$, 使得 u_0 是方程(2.6)的一个解, 这意味着这个最小值点 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 这和引理 3.10 相矛盾了。

因此, $I(m) < I(\mu)$ 对于任意的 $0 < \mu < m < \infty$, 从引理 3.8 断定对于任意的 $m \in (0, \infty)$ 一个基态 u_m 是存在的, 并且 $E(u_m) = I(m)$ 。

参考文献

- [1] Karpman, V.I. (1996) Stabilization of Soliton Instabilities by Higher Order Dispersion: KdV-Type Equations. *Physics Letters A*, **210**, 77-84. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00752-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00752-0)
- [2] Karpman, V.I. and Shagalov, A.G. (2000) Stability of Solitons Described by Nonlinear Schrödinger-Type Equations with Higher-Order Dispersion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **144**, 194-210. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00078-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00078-6)
- [3] Bonheure, D., Casteras, J., Gou, T. and Jeanjean, L. (2019) Normalized Solutions to the Mixed Dispersion Nonlinear Schrödinger Equation in the Mass Critical and Supercritical Regime. *Transactions of the American Mathematical Society*, **372**, 2167-2212. <https://doi.org/10.1090/tran/7769>
- [4] Jeanjean, L. (1997) Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **28**, 1633-1659. [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(96\)00021-1](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00021-1)
- [5] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A. (2009) *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge University Press.
- [6] Derrick, G.H. (1964) Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. *Journal of Mathematical Physics*, **5**, 1252-1254. <https://doi.org/10.1063/1.1704233>
- [7] Pohožaev, S.I. (1965) On the Eigenfunctions of the Equation. *Doklady Akademii Nauk*, **165**, 36-39.
- [8] Bonheure, D., Castéras, J., Gou, T. and Jeanjean, L. (2017) Strong Instability of Ground States to a Fourth Order Schrödinger Equation. *International Mathematics Research Notices*, **2019**, 5299-5315. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnx273>
- [9] d'Avenia, P., Pomponio, A. and Schino, J. (2023) Radial and Non-Radial Multiple Solutions to a General Mixed Dispersion NLS Equation. *Nonlinearity*, **36**, 1743-1775. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/acb62d>
- [10] Ghoussoub, N. (1993) *Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511551703>
- [11] Ghoussoub, N. and Preiss, D. (1989) A General Mountain Pass Principle for Locating and Classifying Critical Points. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **6**, 321-330. [https://doi.org/10.1016/S0294-1449\(16\)30313-4](https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30313-4)
- [12] Bellazzini, J., Forcella, L. and Georgiev, V. (2023) Ground State Energy Threshold and Blow-Up for NLS with Competing Nonlinearities. *Annali Scuola Normale Superiore—Classe di Scienze*, **24**, 955-988. https://doi.org/10.2422/2036-2145.202005_044
- [13] Lions, P.L. (1984) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. the Locally Compact Case, Part 2. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **1**, 223-283. [https://doi.org/10.1016/S0294-1449\(16\)30422-x](https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30422-x)