Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 255-263
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155174

Hans汉斯

树上加权$L_{\lambda}^{p}(T)$空间上的加权复合算子

李克成

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年4月16日；录用日期：2025年5月20日；发布日期：2025年5月29日

摘　要

本文给出了加权$L_{\lambda}^{p}(T)$空间之间加权复合算子$W_{\psi,\varphi}$的有界性与紧性特征的刻画。

关键词

加权复合算子，有界性，紧性

Weighted Composition Operator on Weighted $L_{\lambda}^{p}(T)$ Spaces of a Tree

Kecheng Li

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Apr. 16th, 2025; accepted: May 20th, 2025; published: May 29th, 2025

Abstract

Characterizations of boundedness and compactness of weighted composition operators $W_{\psi,\varphi}$ between the weighted $L_{\lambda}^{p}(T)$ spaces are provided.

Keywords

Weighted Composition Operator, Boundedness, Compactness

文章引用：李克成．树上加权$L_{\lambda}^{p}(T)$空间上的加权复合算子[J]．理论数学, 2025, 15(5): 255-263.
DOI: 10.12677/pm.2025.155174

1. 引言

加权复合算子在函数空间上已取得大量研究成果，相关论著可参阅文献[1] [2]。在文献[3] [4]中，Contreras、Zhao 等详细讨论了单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上 Hardy 空间与加权 Bergman 空间的加权复合算子。此外，Tien 等研究了 Fock 空间上的加权复合算子[5]。

函数空间的离散结构与算子理论已得到广泛研究，其中最具有研究价值的离散结构是树结构——该结构可视为边计数度量的完备度量空间。在许多情形下，树上的函数空间可视为经典函数空间的离散结构，如单位开圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Hardy 空间、有界解析函数空间及加权 Lebesgue 空间等。

首先研究的离散空间是树上 Lipschitz 空间，其定义见文献[6]。该空间实质上是 Bloch 空间的离散形式。文献[6]与[7]中，Allen、Hosokawa 等分别研究了树上 Lipschitz 空间的乘法算子与加权复合算子。对于其他离散空间，Muthukumar、Ponnusamy 等学者[8]-[12]系统研究了树上 Hardy 空间与 Lipschitz 空间上的加权复合算子、复合算子及乘法算子。其中，Hardy 空间是 $L^p(T)$ 空间的子空间。这些空间在边计数测度下均为 Banach 空间。Allen 等[13] [14]刻画了树上加权 Banach 空间上乘法算子与复合算子的性质，而 Xu 与 Zhang 研究了树结构加权 $L^p(T)$ 空间上的复合算子[15]。

本文结构如下：第二节给出加权 $L_\lambda^p(T)$ 空间与加权复合算子的基本性质；第三、四节刻画不同 $L_\lambda^p(T)$ 空间之间加权复合算子的有界性与紧性特征。

下文采用如下记号约定：对任意实数 A 与 B，若存在正常数 C 使得 $A \le CB$，则称 A 几乎小于 B，记作 $A \lesssim B$。类似可定义 $\gtrsim$。当 $A \lesssim B$ 与 $A \gtrsim B$ 同时成立时，记作 $A \approx B$。

2. 预备知识

设 $\mathbb{R}^+$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示全体正实数、全体实数、全体复数和全体非负整数构成的集合。图 $G=(V,E)$ 是由满足 $E \subset V \times V$ 的集合对构成，其中 V 称为 G 的顶点集，E 称为 G 的边集。特别地，树 T 作为图的特殊结构，它是一个无向、连通且无圈的图。通常将树的所有顶点集合视为 T 本身，并用 o 表示 T 的根顶点。若两个顶点 u 与 v 通过一条边相连，则称它们相邻，记作 $u \sim v$。对于任意 $u,v \in T$，$[u,v]$ 表示连接 u 与 v 的路径。路径的长度定义为其包含的边数，因此顶点 u 与 v 之间的距离 $d(u,v)$ 即为路径 $[u,v]$ 的长度。关于树的更多细节可参阅文献[15] [16]。下面我们回顾 $L^p(T)$ 空间的定义。

定义 2.1：对于任意 $1 \le p < \infty$，设 T 为树，则 $L^p(T)$ 空间为满足

$$\sum_{v \in T} \left| f(v) \right| < \infty$$

的复值函数 $f: T \to \mathbb{C}$ 的全体。

与复平面单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Bergman 空间 $A^p(\mathbb{D})$ 对比，由范数 $\|f\|_p = \sum_{v \in T} \left| f(v) \right| < \infty$ 可知 $L^p(T)$ 是 Banach 空间。

定义 2.2：对于 $1 \le p < \infty$，设 $\{\lambda(v)\}_{v \in T}$ 为 T 上的非负函数，则 T 上的加权 $L^p(T)$ 空间为满足

$$\sum_{v \in T} \left| f(v) \right|^p \lambda(v) < \infty$$

的函数 f 的全体，记作 $L_\lambda^p(T)$。特别地，$L_\lambda^\infty(T)$ 为满足

$$\|f\|_{\lambda,\infty} = \sup_{v \in T} \left\{ \left| f(v) \right| \lambda(v) \right\}$$

的函数所 f 的全体。

因此，对于任意 $f \in L_\lambda^p(T)$，它的范数为

$$\|f\|_{\lambda,p}=\left[\sum_{v\in T}|f(v)|^{p}\lambda(v)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

易得 $L_{\lambda}^{p}(T)$ 和 $L_{\lambda}^{\infty}(T)$ 关于各自范数是 Banach 空间。特别地，$L_{\lambda}^{2}(T)$ 的内积为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{v\in T}f(v)g(v)\lambda(v).$$

因此 $L_{\lambda}^{2}(T)$ 是可分 Hilbert 空间。

对于给定的树 T 的自映射 φ 和 T 上的复值函数 ψ，则加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}$ 为

$$W_{\psi,\varphi}(f)=\psi(f\circ\varphi)$$

其中 $f\in L_{\lambda}^{p}(T)$。

若 $\psi\equiv 1$，则 $W_{\psi,\varphi}$ 为复合算子 C_{φ}（定义为 $C_{\varphi}(f)=f\circ\varphi$）；若对任意 $v\in T$ 有 $\varphi(v)=v$，则 $W_{\psi,\varphi}$ 为乘法算子 M_{ψ}（定义为 $M_{\psi}f=\psi f$）。

3. 有界性

本文中，λ_1 和 λ_2 表示树 T 上的权函数。本节主要研究加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}$ 在 $L_{\lambda}^{p}(T)$ 空间之间的有界性。

定理 3.1：设 $1\le p\le\infty$，则加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}$ 从 $L_{\lambda_1}^{\infty}(T)$ 到 $L_{\lambda_2}^{p}(T)$ 是有界的充要条件为

$$\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}\in L_{\lambda_2}^{p}(T).$$

证明：假设 $\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}\in L_{\lambda_2}^{p}(T)$。对任意 $f\in L_{\lambda_1}^{p}(T)$，当 $p<\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f\|_{\lambda_2,p}&=\sum_{u\in T}|\psi(u)f(\varphi(u))|^{p}\lambda_2(u)^{\frac{1}{p}}\\&=\sum_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right|^{p}\lambda_2(u)|f(\varphi(u))\lambda_1(\varphi(u))|^{\frac{1}{p}}\\&\le\left\|\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}\right\|_{\lambda_2,p}\|f\|_{\lambda_1,\infty}.\end{aligned}$$

当 $p=\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f\|_{\lambda_2,\infty}&=\sup_{u\in T}\big(\psi(u)f(\varphi(u))\big)\lambda_2(u)\\&=\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right|\lambda_2(u)|f(\varphi(u))\lambda_1(\varphi(u))|\\&\le\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right|\lambda_2(u)\sup_{u\in T}|f(\varphi(u))\lambda_1(\varphi(u))|\\&=\left\|\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}\right\|_{\lambda_2,\infty}\|f\|_{\lambda_1,\infty}.\end{aligned}$$

故算子 $W_{\psi,\varphi}$ 是有界的。

反之，若 $W_{\psi,\varphi}:L_{\lambda_1}^{\infty}(T)\to L_{\lambda_2}^{p}(T)$ 为有界算子，则

$$\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}=W_{\psi,\varphi}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\in L_{\lambda_2}^{p}(T),$$

当$\frac{1}{\lambda_1}\in L^{\infty}_{\lambda_1}(T)$时。因为$\|1/\lambda_1\|_{\lambda_1,\infty}=1$，则

$$\|W_{\psi,\varphi}\|\geq\left\|\frac{\psi}{\lambda_1\circ\varphi}\right\|_{\lambda_2,p}.$$

推论 3.2：(i) 对$1\leq p\leq\infty$，复合算子C_φ从$L^{\infty}_{\lambda_1}(T)$到$L^{p}_{\lambda_2}(T)$是有界的当且仅当

$$\frac{1}{\lambda_1\circ\varphi}\in L^{p}_{\lambda_2}(T).$$

(ii) 对$1\leq p\leq\infty$，乘法算子M_ψ从$L^{\infty}_{\lambda_1}(T)$到$L^{p}_{\lambda_2}(T)$是有界的当且仅当。

$$\frac{\psi}{\lambda_1}\in L^{p}_{\lambda_2}(T).$$

下面给出$L^{p}_{\lambda}(T)$空间中函数的估计。

命题 3.3：设$f\in L^{p}_{\lambda}(T)$ ($1\leq p<\infty$)，则对任意$v\in T/\{o\}$有

$$|f(v)|^p\lambda(v)\leq\|f\|^p_{\lambda,p}.$$

证明：对$v\in T/\{o\}$，设$n=|v|$，则

$$|f(v)|^p\lambda(v)\leq\sum_{|w|=n}|f(w)|^p\lambda(w)\leq\sum_{w\in T}|f(w)|^p\lambda(w).$$

定理 3.4：设$1\leq p<\infty$，则算子$W_{\psi,\varphi}:L^{p}_{\lambda_1}(T)\to L^{\infty}_{\lambda_2}(T)$是有界的充要条件为

$$\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|<\infty.$$

证明：我们首先给出必要性的证明，给定一个函数$f_u(v)=\frac{\chi_u(v)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}$，易得$\|f_u\|^p_{\lambda_1}=1$且

$$\|W_{\psi,\varphi}\|\gtrsim\|W_{\psi,\varphi}f_u\|_{\lambda_2,\infty}=\sup_{u\in T}\left|\frac{\lambda_2(u)\psi(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|.$$

反之，对任意$f\in L^{p}_{\lambda_1}(T)$，

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f\|_{\lambda_2,\infty}&=\sup_{u\in T}|\psi(u)f(\varphi(u))|\lambda(u)\\&=\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|\left|f(\varphi(u))\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(u))\right|\\&\leq\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|\|f\|_{\lambda_1,p}\\&\lesssim\|f\|_{\lambda_1,p}\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|.\end{aligned}$$

推论 3.5：(i) 对$1\leq p\leq\infty$，算子$C_\varphi:L^{p}_{\lambda_1}(T)\to L^{\infty}_{\lambda_2}(T)$是有界的当且仅当

$$\sup_{u\in T}\left|\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(u))}\right|<\infty.$$

(ii) 对$1\le p\le\infty$，算子$M_\psi: L_{\lambda_1}^p(T)\to L_{\lambda_2}^\infty(T)$是有界的当且仅当

$$\sup_{u\in T}\left|\frac{\psi(u)\lambda_2(u)}{\lambda_1^{1/p}(u)}\right|<\infty.$$

定理 3.6：设$1\le p<\infty$，则算子$W_{\psi,\varphi}: L_{\lambda_1}^p(T)\to L_{\lambda_2}^p(T)$是有界的充要条件为

$$\sup_{u\in T}|\psi(u)|\left(\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

证明：首先，我们定义函数$f_u(v)=\dfrac{\chi_u(v)}{\lambda_1^{1/p}(u)}$，则

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}\| &\ge \|W_{\psi,\varphi}f_u\|_{\lambda_2,p}\\ &=\left(\sum_{v\in T}|\psi(v)f_u(\varphi(v))|^p\lambda_2(v)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=|\psi(u)|\left(\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

反之，对任意$f\in L_{\lambda_1}^p(T)$，

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f\|_{\lambda_2,p} &=\left(\sum_{u\in T}|\psi(u)f(\varphi(u))|^p\lambda_2(u)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\left(\sum_{u\in T}|\psi(u)|^p\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}|f(\varphi(u))|^p\lambda_1(\varphi(u))\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le\sup_{u\in T}|\psi(u)|\left(\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{\lambda_1,p}.\end{aligned}$$

推论 3.7：(i) 对$1\le p<\infty$，算子$C_\varphi: L_{\lambda_1}^p(T)\to L_{\lambda_2}^p(T)$是有界的当且仅当

$$\sup_{u\in T}\left(\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(\varphi(u))}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

(ii) 对$1\le p<\infty$，算子$M_\psi: L_{\lambda_1}^p(T)\to L_{\lambda_2}^p(T)$是有界的当且仅当

$$\sup_{u\in T}|\psi(u)|\left(\frac{\lambda_2(u)}{\lambda_1(u)}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Xu 和 Zhang 研究了由自映射φ诱导的复合算子C_φ在加权$L_\lambda^p(T)$空间上的有界性[15]。

定理 3.8：对任意$1\le p\le\infty$，设T为树，φ为T的单射自映射，则加权复合算子$W_{\varphi,\varphi}$在加权$L_\lambda^p(T)$空间上有界的充要条件是：存在正常数m,M使得对所有$u\in T$有$m\le\lambda(u)\le M$，且$\psi\in L^\infty(T)$。

证明过程与文献[15]中的定理 3.4 类似，此处从略。

4. 紧性

本节将研究加权复合算子$W_{\psi,\varphi}$紧性的特征。根据文献[15]，当$|u|\to\infty$时，由特征函数χ_u构成的归一

化函数 $f_u(v)=\dfrac{\chi_u(v)}{\lambda^{1/p}(u)}$ 逐点收敛于 0。

引理 4.1 [15]：若归一化函数 $f_u(v)=\dfrac{\chi_u(v)}{\lambda^{1/p}(u)}$ 是 $L_\lambda^p(T)$ 的单位向量，则存在 T 中满足 $|v_n|\to\infty$ 的序列 $\{v_n\}$ 使得函数序列 $\{f_u\}$ 在 $L_\lambda^p(T)$ 中有界且逐点收敛于 0。

首先刻画 $L_\lambda^p(T)$ 空间之间加权复合算子的紧性：

定理 4.2：对 $1\le p<\infty$，算子 $W_{\psi,\varphi}:L_{\lambda_1}^p(T)\to L_{\lambda_2}^p(T)$ 是紧的充要条件是对任意的 $\{f_n\}\in L_{\lambda_1}^p(T)$ 是有界的且逐点收敛于 0，有 $\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_{\lambda_2,p}\to 0$。

证明：如果算子 $W_{\psi,\varphi}$ 是从 $L_{\lambda_1}^p(T)$ 到 $L_{\lambda_2}^p(T)$ 的紧算子，并且序列 $\{f_n\}\in L_{\lambda_1}^p(T)$ 收敛到 0，那么存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $W_{\psi,\varphi}$ 在 $\|\cdot\|_{\lambda_2,p}$ 范数下收敛到某个函数，记为 f。这意味着 $W_{\psi,\varphi}f_{n_k}$ 逐点收敛到 f。由于 $\{f_n\}$ 逐点收敛到 0，我们有 $f\equiv 0$。因此，$W_{\psi,\varphi}f_{n_k}$ 在 $\|\cdot\|_{\lambda_2,p}$ 范数下收敛到 0。

反之，假设对于 $L_{\lambda_1}^p(T)$ 中任何趋于 0 的有界序列 $\{f_n\}$，当 n 趋于无穷时，$\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_{\lambda_2,p}\to 0$。如果 $\{g_n\}$ 是 $L_{\lambda_1}^p(T)$ 中的一个有界序列，不妨设对所有 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\|g_n\|_{\lambda_1,p}\le 1$。那么，根据命题 3.3，对于任意 $v\in T$，序列 $g_n(v)$ 也是一个有界序列。根据对角化方法，存在 $\{g_n\}$ 的一个子序列 $\{g_{n_k}\}$ 使得 $\{g_{n_k}\}$ 收敛到某个函数 g。由于 $\|g_{n_k}\|_{\lambda_1,p}\to\|g\|_{\lambda_1,p}$ 且对所有 k 有 $\|g_{n_k}\|\le 1$，因此 $g\in L_{\lambda_1}^p(T)$ 且 $\|g\|_{\lambda_1,p}\le 1$。令 $f_k=g_{n_k}-g\in L_{\lambda_1}^p(T)$，则 f_k 逐点收敛到 0。根据上述假设，序列 $\|W_{\psi,\varphi}f_k\|_{\lambda_2,p}\to 0$ 当 $k\to\infty$。证明完成。

定理 4.3：设加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}:L_{\lambda_1}^\infty(T)\to L_{\lambda_2}^\infty(T)$ 是有界的，则这个算子是紧的充要条件是

$$\lim_{|u|\to\infty}\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|=0.$$

证明：若算子 $W_{\psi,\varphi}$ 是紧的，则对任意满足 $\|f_u\|_{\lambda_1,\infty}=1$ 且当 $|u|\to\infty$ 时逐点趋于零的函数 $f_u(v)=\dfrac{\chi_u(v)}{\lambda_1(u)}$，有

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f_u\|_{\lambda_2,\infty}&=\sup_{v\in T}|\psi(v)f_u(\varphi(v))|\lambda_2(v)\\&=\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|.\end{aligned}$$

由于 $W_{\psi,\varphi}$ 是紧算子，根据引理 4.1 可得，当 $|u|\to\infty$ 时，

$$\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|\to 0$$

反之，给定 $\varepsilon>0$，存在常数 $M>0$，当 $|u|>M$ 时

$$\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

等价地，

$$\sup_{|\varphi(v)|>M}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设序列$\{f_n\}\subset L^{\infty}_{\lambda_1}(T)$满足$\|f_n\|_{\lambda_1,\infty}\le 1$对所有$n\in\mathbb{N}$成立，且当$n\to\infty$时$f_n$逐点趋于0。由于集合$\{u\in T:|u|\le M\}$有限，存在$N\in\mathbb{N}$使得

$$\sup_{|u|\le M}|f_n(u)|\lambda_1(u)\le\frac{\varepsilon}{2\|W_{\psi,\varphi}\|}$$

因此，当$n>N$时：

$$\begin{aligned}\sup_{|\varphi(v)|\le M}|\psi(v)\lambda_2(v)f_n(\varphi(v))|&\le\sup_{|\varphi(v)|\le M}\left|\frac{\lambda_2\psi}{\lambda_1\circ\varphi}(v)\right|\sup_{|\varphi(v)|\le M}|f_n(\varphi(v))\lambda_1(\varphi(v))|\\&\le\|W_{\psi,\varphi}\|\cdot\frac{\varepsilon}{2\|W_{\psi,\varphi}\|}=\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\sup_{|\varphi(v)|>M}|\lambda_2(v)\psi(v)f_n(\varphi(v))|&\le\sup_{|\varphi(v)|>M}\left|\frac{\lambda_2\psi}{\lambda_1\circ\varphi}(v)\right|\sup_{|\varphi(v)|>M}|f_n(\varphi(v))\lambda_1(\varphi(v))|\\&\le\frac{\varepsilon}{2}\|f_n\|_{\lambda_1,\varphi}\le\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

综上，对所有$n>N$有，

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_{\lambda_2,\infty}&=\sup_{v\in T}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)\\&\le\sup_{|\varphi(v)|\le M}|\psi(v)\lambda_2(v)f_n(\varphi(v))|+\sup_{|\varphi(v)|>M}|\lambda_2(v)\psi(v)f_n(\varphi(v))|\\&\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

推论4.4：(i) 乘法算子M_ψ为紧的当且仅当

$$\lim_{|v|\to\infty}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(v)}\right|=0;$$

(ii) 复合算子为C_φ为紧的当且仅当

$$\lim_{|u|\to\infty}\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1(\varphi(v))}\right|=0.$$

定理4.5：对$1\le p<\infty$，有界算子$W_{\psi,\varphi}:L^p_{\lambda_1}(T)\to L^{\infty}_{\lambda_2}(T)$是紧的充要条件是

$$\lim_{|u|\to\infty}\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{1/p}(\varphi(v))}=0.$$

证明：首先，假设当$|u|\to\infty$时，

$$\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\to 0.$$

给定$\varepsilon>0$，存在常数$M>0$，当$|u|>M$时，

$$\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

等价地，

$$\sup_{|\varphi(v)|>M}\left|\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设序列 $\{f_n\}\subset L_{\lambda_1}^p(T)$ 满足当 $n\to\infty$ 时 f_n 逐点趋于零。由于 $\{u\in T:|u|\le M\}$ 是有限集，存在 $N\in\mathbb{N}$，对所有 $n>N$，

$$\sup_{|u|\le M}|f_n(u)|\lambda_1^{\frac{1}{p}}(u)\le\frac{\varepsilon}{2\|W_{\psi,\varphi}\|}.$$

因此，我们得到

$$\sup_{|\varphi(v)|\le M}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)\le\sup_{|\varphi(v)|\le M}\left|\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\right|\sup_{|\varphi(v)|\le M}|f_n(\varphi(v))|\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))\le\|W_{\psi,\varphi}\|\cdot\frac{\varepsilon}{2\|W_{\psi,\varphi}\|}\le\frac{\varepsilon}{2},$$

以及

$$\sup_{|\varphi(v)|>M}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)\le\sup_{|\varphi(v)|>M}\left|\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\right|\|f_n\|_{\lambda_1,p}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对所有 $n>N$ 有

$$\begin{aligned}\|W_{\psi,\varphi}f_n\|_{\lambda_2,\infty}&=\sup_{v\in T}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)\\&\le\sup_{|\varphi(v)|\le M}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)+\sup_{|\varphi(v)|>M}|\psi(v)f_n(\varphi(v))|\lambda_2(v)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

反之，假设算子 $W_{\psi,\varphi}$ 是紧的。我们定义函数

$$f_u(v)=\frac{\chi_u(v)}{\lambda_1^{1/p}(u)},$$

其中 $\|f_u\|_{\lambda_1,p}=1$ 且当 $|u|\to\infty$ 时 f_u 逐点趋于零。于是

$$\|W_{\psi,\varphi}f_u\|_{\lambda_2,\infty}=\sup_{v\in T}|\psi(v)f_u(\varphi(v))|\lambda_2(v)=\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\left|\psi(v)\frac{\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\right|.$$

由于算子 $W_{\psi,\varphi}$ 是紧的，根据引理 4.1 可得，当 $|u|\to\infty$ 时，

$$\sup_{v\in\varphi^{-1}(u)}\frac{\psi(v)\lambda_2(v)}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\varphi(v))}\to 0.$$

5. 结语

本文作为加权复合算子在不同树上加权 Hardy 空间[8]结果的推广，我们主要研究了加权复合算子在

加权 $L_{\lambda}^{p}(T)$ 空间上的有界性和紧性。特别地，齐次树作为一种特殊的树，Muthukumar、Ponnusamy 等研究了乘法算子和复合算子在齐次树上的性质[9] [10] [12]。由前面的定理可知，算子 $W_{\psi,\varphi}$ 的有界性与树的节点树有关，因此在齐次树的情况下，我们的结果可以得到更加具体的结果。

参考文献

[1] Cowen, C.C. and Mac Cluer, B.D. (1999) Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. CRC Press.

[2] Singh, R.K. and Manhas, J.S. (1993) Composition Operators on Function Spaces. Elsevier.

[3] Zhao, R. (2004) Weighted Composition Operators on Bergman Space. *Journal of the London Mathematical Society*, **70**, 499-511.

[4] Contreras, M.D. and Hernández-Díaz, A.G. (2003) Weighted Composition Operators between Different Hardy Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **46**, 165-188. https://doi.org/10.1007/s000200300023

[5] Tien, P.T. and Khoi, L.H. (2018) Weighted Composition Operators between Different Fock Spaces. *Potential Analysis*, **50**, 171-195. https://doi.org/10.1007/s11118-017-9678-y

[6] Allen R F, Colonna F, Easley G R. (2011) Multiplication Operators between Lipschitz-Type Spaces on a Tree. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **2011**, Article 472495.

[7] Hosokawa, T. (2020) Weighted Composition Operators Acting from the Lipschitz Space to the Space of Bounded Functions on a Tree. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **86**, 209-224. https://doi.org/10.14232/actasm-019-522-6

[8] Muthukumar, P., Sharma, A.K. and Kumar, V. (2023) Weighted Composition Operators between Weighted Hardy Spaces on Rooted Trees. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **20**, Article No. 61. https://doi.org/10.1007/s00009-023-02269-6

[9] Muthukumar, P. and Ponnusamy, S. (2016) Composition Operators on the Discrete Analogue of Generalized Hardy Space on Homogenous Trees. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **40**, 1801-1815. https://doi.org/10.1007/s40840-016-0419-y

[10] Muthukumar, P. and Ponnusamy, S. (2020) Composition Operators on Hardy Spaces of the Homogenous Rooted Trees. *Monatshefte für Mathematik*, **192**, 721-743. https://doi.org/10.1007/s00605-020-01410-x

[11] Muthukumar, P. and Shankar, P. (2022) Multiplication Operators between Discrete Hardy Spaces on Rooted Trees. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**, 3252-3263. https://doi.org/10.1134/s1995080222140281

[12] Muthukumar, P. and Ponnusamy, S. (2016) Discrete Analogue of Generalized Hardy Spaces and Multiplication Operators on Homogenous Trees. *Analysis and Mathematical Physics*, **7**, 267-283. https://doi.org/10.1007/s13324-016-0141-9

[13] Allen, R.F. and Sundberg, I. (2015) Multiplication Operators on Weighted Banach Spaces of a Tree. https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.07914

[14] Allen, R.F. and Pons, M.A. (2018) Composition Operators on Weighted Banach Spaces of a Tree. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **41**, 1805-1818.

[15] Xu, H. and Zhang, X. (2023) Composition Operators on Weighted L^p Spaces of a Tree. https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.10864

[16] Jabłoński, Z., Jung, I.B. and Stochel, J. (2012) Weighted Shifts on Directed Trees. American Mathematical Society.