

NLS-KDV方程的格子Boltzmann方法

董亚茹, 戴厚平, 王 晶

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2025年4月21日; 录用日期: 2025年5月20日; 发布日期: 2025年5月29日

摘 要

建立一维格子Boltzmann模型的演化方程, 运用Taylor展开和Chapman-Enskog多尺度分析技术, 推导出能够恢复一类非线性耦合的NLS-KDV方程的平衡态分布函数和修正函数。最后, 数值算例验证出该方法的计算结果与给出的精确解有很好的 consistency。

关键词

NLS-KDV方程, 格子Boltzmann方法, Taylor展开

Lattice Boltzmann Method for the NLS-KDV Equation

Yaru Dong, Houping Dai, Jing Wang

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: May 20th, 2025; published: May 29th, 2025

Abstract

The evolution equations of the one-dimensional lattice Boltzmann model are established, and the equilibrium distribution function and the correction function that can recover a class of nonlinearly coupled NLS-KDV equations are derived by using Taylor expansion and Chapman-Enskog multiscale analysis techniques. Finally, numerical examples verify that the computational results of the method are in good agreement with the given exact solutions.

Keywords

NLS-KDV Equation, Lattice Boltzmann Method, Taylor Expansion



1. 引言

非线性 Schrödinger 方程是孤立光学方程的必要组成部分, 有助于理解非线性光学、原子物理和量子场论等多种过程[1] [2]。KDV 方程在流体动力学、等离子体物理学等领域发挥着重要作用, 例如在等离子体物理学中产生了离子声学解, 在地球物理流体动力学中表征了深海和潜水中的长波[3]。在实际物理系统中, 不同波动模式会相互作用, 因此将两个方程结合, 得到耦合 NLS-KDV 方程。耦合 NLS-KDV 方程是非线性演化方程在等离子体物理学中的一个关键系统, 控制着沿第三个非谐波介质的能量传递问题的长波极限[1], 用于在以离子声速度运动的坐标系统中模拟一维朗缪尔波和离子声波的非线性动力学[4], 描述了尘埃等离子体中的各种过程, 如朗缪尔波、尘埃声波和电磁波的波动[5]。在数值计算方面, 目前该方程的求解方法有有限元法[6] [7]、无网格法[8]、分解法[9]、同伦摄动法[10]和变分迭代法[11] [12]等。这些方法的迭代格式复杂, 应用灵活性较差, 不利于处理复杂的边界条件, 也无法进行大规模并行计算。

格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann Method, LBM)已经广泛地被认为是描述流体运动与处理工程问题的有效手段[13] [14]。LBM 已逐步应用于很多偏微分方程的求解, 如长短波方程[15], EFK 方程[16], STO 方程[17], Burgers 方程[18]等。LBM 具备易于并行计算、程序易于实施等优势。因此, 笔者利用 LBM 求解一维 NLS-KDV 方程的初边值问题。

2. NLS-KDV 方程的格子 Boltzmann 模型

在长波和短波之间的非线性相互作用中, 基于弱非线性假设, 两种典型的相互作用方程可以统一为具有如下标准形式的 NLS-KDV 方程:

$$\begin{cases} iu_t + \phi u_{xx} - \phi uv - \lambda |u|^2 u = F(x, t), \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (\beta v^m + \gamma |u|^2)_x = G(x, t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\phi, \lambda, \alpha, \beta$ 和 γ 为常数; $u(x, t)$ 是用来描述朗缪尔振荡电场的复值函数, $v(x, t)$ 是用来描述低频密度扰动的实值函数; $F(x, t)$ 和 $G(x, t)$ 分别为已知的复函数和实函数。

对方程(1)采用 D1Q5 模型, 构造格子 Boltzmann 演化方程为:

$$\begin{aligned} f_{si}(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_{si}(x, t) = & -\frac{1}{\tau_s} [f_{si}(x, t) - f_{si}^{eq}(x, t)] \\ & + \Delta t h_{si}(x, t) + \Delta t^2 \sigma_{si}(x, t) \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $f_{si}(x, t)$ 为 (x, t) 处粒子的分布函数, $f_{si}^{eq}(x, t)$ 为 (x, t) 处粒子在平衡状态下的分布函数; $h_{si}(x, t)$ 和 $\sigma_{si}(x, t)$ 为修正函数; ε 为 Kundsens (克努森)数, c 为格子速度, $c_i = c \cdot e_i$ 表示不同方向的离散格子速度, τ_s 为弛豫时间。

将(2)式左边利用 Taylor 公式展开, 得到

$$\begin{aligned} \Delta t (\partial_t + c_i \partial_x) f_{si} + \frac{\Delta t^2}{2} (\partial_t + c_i \partial_x)^2 f_{si} + \frac{\Delta t^3}{6} (\partial_t + c_i \partial_x)^3 f_{si} + O(\Delta t^4) \\ = -\frac{1}{\tau_s} (f_{si} - f_{si}^{eq}) + \Delta t h_{si}(x, t) + \Delta t^2 \sigma_{si}(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

对(3)式进行 Chapman-Enskog 多尺度展开:

$$\begin{cases} \partial_t = \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + O(\varepsilon^3), \\ f_{si} = f_{si}^{(0)} + \varepsilon f_{si}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{si}^{(2)} + \varepsilon^3 f_{si}^{(3)} + O(\varepsilon^4), \\ h_{si} = \varepsilon^2 h_{si}^{(1)} + O(\varepsilon^3), \\ D = \partial_{t_0} + c_i \partial_x. \end{cases} \quad (4)$$

令 $\Delta t = \varepsilon$, 将(4)式代入(3)式, 并比较 ε 同阶项的系数, 可得

$$O(\varepsilon^1): C_1 D f_{si}^{(0)} = -\frac{1}{\tau_s} f_{si}^{(1)}, \quad (5)$$

$$O(\varepsilon^2): \partial_{t_1} f_{si}^{(0)} + D f_{si}^{(1)} + \frac{1}{2} D^2 f_{si}^{(0)} = -\frac{1}{\tau_s} f_{si}^{(2)} + \sigma_{si}(x, t), \quad (6)$$

$$O(\varepsilon^3): \partial_{t_2} f_{si}^{(0)} + \partial_{t_1} f_{si}^{(1)} + D f_{si}^{(2)} + \frac{1}{2} D^2 f_{si}^{(1)} + D \partial_{t_1} f_{si}^{(0)} + \frac{1}{6} D^3 f_{si}^{(0)} = -\frac{1}{\tau_s} f_{si}^{(3)} + h_{si}^{(1)}, \quad (7)$$

由(5)式和(6)式可以推导出

$$O(\varepsilon^2): \partial_{t_1} f_{si}^{(0)} + C_2 D^2 f_{si}^{(0)} = -\frac{1}{\tau_s} f_{si}^{(2)} + \sigma_{si}. \quad (8)$$

在(5)式和(8)式的基础上, 用(7)式推导出

$$O(\varepsilon^3): \partial_{t_2} f_{si}^{(0)} + 2C_2 D \partial_{t_1} f_{si}^{(0)} + C_3 D^3 f_{si}^{(0)} + \tau_s D \sigma_{si} = -\frac{1}{\tau_s} f_{si}^{(3)} + h_{si}^{(1)}. \quad (9)$$

对(5) (8) (9)式两边关于 i 求和, 可得:

$$\sum_i D f_{si}^{(0)} = 0. \quad (10)$$

$$\partial_{t_1} \sum_i f_{si}^{(0)} + C_2 \sum_i D^2 f_{si}^{(0)} = \sum_i \sigma_{si}. \quad (11)$$

$$\partial_{t_2} \sum_i f_{si}^{(0)} + 2C_2 \partial_{t_1} \sum_i D f_{si}^{(0)} + C_3 \sum_i D^3 f_{si}^{(0)} + \tau_s \sum_i D \sigma_{si} = \sum_i h_{si}^{(1)}. \quad (12)$$

其中: $C_1 = 1; C_2 = -\tau_s + \frac{1}{2}; C_3 = \tau_s^2 - \tau_s + \frac{1}{6}$.

2.1. LBM 模型

在 D1Q5 模型的基础上, 建立一维方程的格子玻尔兹曼模型, 离散速度为

$$e_i = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 1, -1, 2, -2).$$

2.1.1. 恢复 NLS 方程

当 $s=1$ 时, 为了恢复 NLS 方程, 选择满足

$$\begin{cases} \sum_i f_{1i}^{(0)} = iu, \\ \sum_i c_i f_{1i}^{(0)} = 0, \\ \sum_i c_i^2 f_{1i}^{(0)} = \frac{\phi u}{C_2 \varepsilon}, \\ \sum_i c_i^3 f_{1i}^{(0)} = 0, \\ \sum_i c_i^4 f_{1i}^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

的平衡态分布函数 f_{1i}^{eq} ($i=0,1,2,3,4$) 和修正函数 h_{1i}, σ_{1i} ,

$$\sigma_{1i} = 0, h_{1i} = \frac{1}{5} \left(F(x, t) + \phi uv + \lambda |u|^2 u \right) \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (14)$$

将(13) (14)式代入(10)~(12)式, 可得

$$i\partial_{t_0} u = 0, \quad (15)$$

$$i\partial_{t_1} u + \frac{\phi}{\varepsilon} u_{xx} = 0, \quad (16)$$

$$i\partial_{t_2} u = \sum_i h_{1i}^{(1)}. \quad (17)$$

将(15)式 + $\varepsilon \times$ (16)式 + $\varepsilon^2 \times$ (17)式, 可以恢复出如下形式的 NLS 方程:

$$iu_t + \phi u_{xx} - \phi uv - \lambda |u|^2 u = F(x, t).$$

2.1.2. 恢复 KDV 方程

当 $s=2$ 时, 为了恢复 KDV 方程, 选择满足

$$\begin{cases} \sum_i f_{2i}^{(0)} = v, \\ \sum_i c_i f_{2i}^{(0)} = 0, \\ \sum_i c_i^2 f_{2i}^{(0)} = 0, \\ \sum_i c_i^3 f_{2i}^{(0)} = \frac{\alpha v}{\varepsilon^2 C_3}, \\ \sum_i c_i^4 f_{2i}^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \sum_i \sigma_{2i} = 0, \\ \sum_i c_i \sigma_{2i} = \frac{\beta v^m + \gamma |u|^2}{\tau_2 \varepsilon^2}, \\ \sum_i c_i^2 \sigma_{2i} = 0, \\ \sum_i c_i^3 \sigma_{2i} = 0, \\ \sum_i c_i^4 \sigma_{2i} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

的平衡态分布函数 $f_{2i}^{eq} (i=0,1,2,3,4)$ 和修正函数 h_{2i}, σ_{2i} ,

$$h_{2i} = \frac{1}{5} G(x, t) \quad i=0,1,2,3,4. \quad (20)$$

将(18)~(20)式代入(10)~(12)式, 可得

$$\partial_{t_0} v = 0, \quad (21)$$

$$\partial_{t_1} v = 0, \quad (22)$$

$$\partial_{t_2} v + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} v_{xxx} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\beta v^m + \gamma |u|^2)_x = \sum h_{2i}^{(1)}. \quad (23)$$

将(21)式+ $\varepsilon \times$ (22)式+ $\varepsilon^2 \times$ (23)式, 可以恢复出如下形式的 KDV 方程:

$$v_t + \alpha v_{xxx} + (\beta v^m + \gamma |u|^2)_x = G(x, t).$$

3. 数值算例

现给出一维 NLS-KDV 方程的两个数值算例, 用来验证建立的格子 Boltzmann 模型对求解此方程的有效性。为了分析初边值问题 LBM 解和精确解之间的误差精度, 引入全局相对误差(Global Relative Error, 符号为 δ_{GRE})和最大绝对误差(Maximum Absolute Error, 符号为 δ_{MAE}), 定义如下:

$$\delta_{GRE}(u) = \frac{\sum_k |u(x_k, t) - u^*(x_k, t)|}{\sum_k |u^*(x_k, t)|},$$

$$\delta_{MAE}(u) = \max_k |u(x_k, t) - u^*(x_k, t)|,$$

其中: $u(x_k, t), u^*(x_k, t)$ 分别为 (x_k, t) 处的数值解和精确解。

3.1. 算例 1

考虑方程(1)中参数 $\phi = 0.1, \varphi = 1, \lambda = -2, m = 1, \alpha = 0.01, \beta = 0.1, \gamma = 1$, 函数

$$\begin{cases} F(x, t) = (0.4 + t \sin 2x + 2 \sin^2 x) \sin x e^{-\frac{it}{2}}, \\ G(x, t) = -\sin 2x - 0.12t \cos 2x + \sin 2x. \end{cases}$$

此时方程(1)有如下解析解:

$$\begin{cases} u(x, t) = \sin x e^{-\frac{it}{2}}, \\ v(x, t) = -t \sin 2x. \end{cases}$$

设置该例求解的区间范围为 $[0, \pi]$ 。图 1 是在 $N=120, \Delta t=0.00001, \tau_1=6.1, \tau_2=1, T=1$ 条件下, $|u|$ 和 v 的精确解和 LBM 解。由图 1 可知, LBM 解与精确解吻合得较好, 具有很好的一致性, 说明模型具有较高的可靠性。图 2 分别给出了 $|u|$ 和 v 在 $T=1$ 时的 LBM 解的三维演化结果图以及精确解在时间和空间的分布图, 可以看出数值解和精确解有很好的相似性。表 1 是 $T=1$ 时不同网格数下 u 和 v 的误差, 表 2 是 $N=120$ 时不同时刻 u 和 v 的误差, 可以看出全局相对误差和最大绝对误差都达到 10^{-3} 精度, 说明模型的求解精度较高。

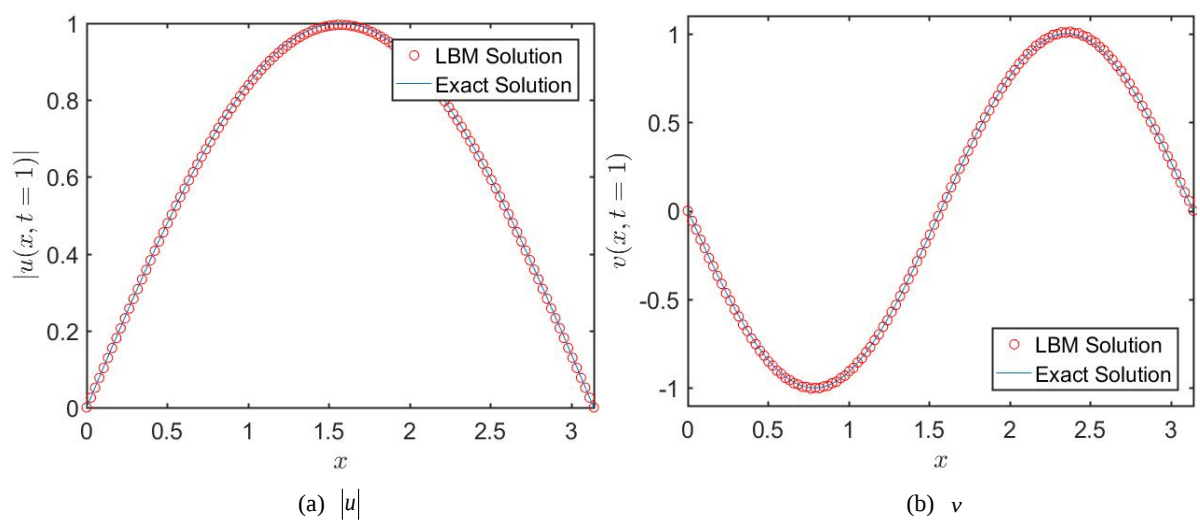


Figure 1. Evolution of exact solutions and LBM numerical solutions
图 1. 精确解和 LBM 数值解的演化

Table 1. Global relative error and maximum absolute error of u and v with different N when $T = 1$
表 1. $T = 1$ 时不同网格数下 u 和 v 的全局相对误差和最大绝对误差

误差	N				
	40	60	80	100	120
$\delta_{\text{GRE}}(u)/10^{-3}$	67.946	27.716	15.773	9.6757	6.9809
$\delta_{\text{GRE}}(v)/10^{-3}$	17.534	17.069	8.0779	6.3539	5.1506
$\delta_{\text{MAE}}(u)/10^{-3}$	87.325	28.169	15.157	10.644	7.9288
$\delta_{\text{MAE}}(v)/10^{-3}$	28.757	25.202	13.786	10.880	9.9770

Table 2. Global relative error and maximum absolute error of u and v with different T
表 2. 不同时刻 T 下 u 和 v 的全局相对误差和最大绝对误差

误差	T				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\delta_{\text{GRE}}(u)/10^{-3}$	3.1279	5.2708	6.3663	7.2294	6.9809
$\delta_{\text{GRE}}(v)/10^{-3}$	8.1168	7.0354	5.4325	4.6511	5.1506
$\delta_{\text{MAE}}(u)/10^{-3}$	3.7756	5.2574	6.2732	6.7194	7.9288
$\delta_{\text{MAE}}(v)/10^{-3}$	1.6345	3.9306	5.7468	7.8233	9.9770

3.2. 算例 2

考虑方程(1)中参数 $\phi = -1, \varphi = 1, \lambda = -5, m = 1, \alpha = 0.1, \beta = 1, \gamma = 1$, 函数

$$\begin{cases} F(x, t) = \frac{(7+t)e^{-it}}{\cosh^3 x}, \\ G(x, t) = \frac{-\cosh^3 x + (2.8t - 2)\sinh x \cosh^2 x - 2.4t \sinh x}{\cosh^5 x}. \end{cases}$$

此时方程(1)有如下解析解:

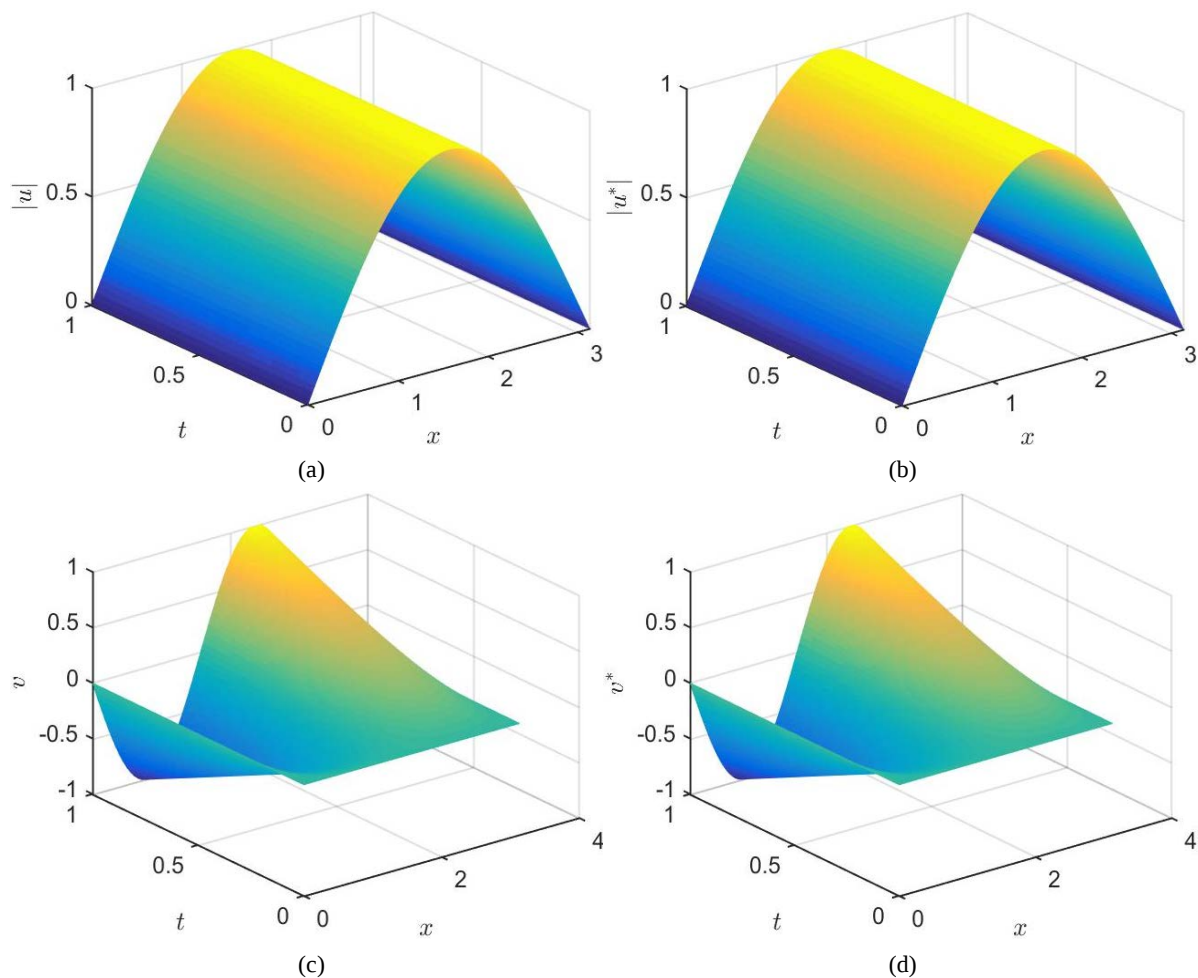


Figure 2. Evolution of exact solutions and LBM numerical solutions: (a) numerical solution of u ; (b) exact solution of u ; (c) numerical solution of v ; (d) exact solution of v

图 2. 精确解和 LBM 数值解的演化: (a) u 的数值解; (b) u 的精确解; (c) v 的数值解; (d) v 的精确解

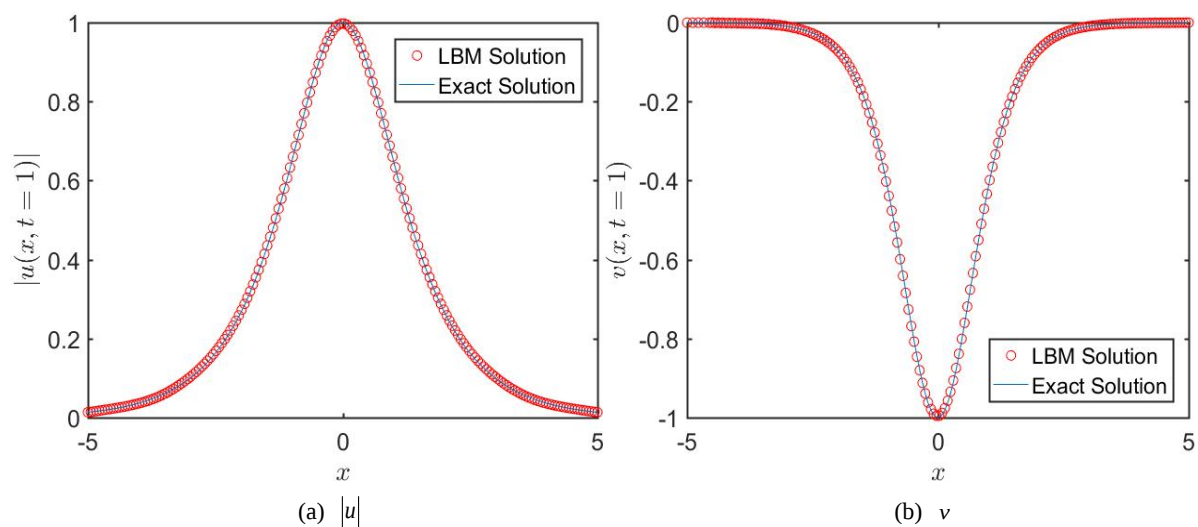


Figure 3. Evolution of exact solutions and LBM numerical solutions

图 3. 精确解和 LBM 数值解的演化

$$\begin{cases} u(x, t) = \operatorname{sech} x e^{-it}, \\ v(x, t) = -t \operatorname{sech}^2 x. \end{cases}$$

设置该例求解的区间范围为 $[-5, 5]$ 。图 3 是在 $N=180, \Delta t=0.00001, \tau_1=1.5, \tau_2=1, T=1$ 条件下, $|u|$ 和 v 的精确解和 LBM 解。由图 3 可知, LBM 解与精确解吻合得较好, 具有很好的一致性, 说明模型具有较高的可靠性。表 3 是 $T=1$ 时不同网格数下 u 和 v 的误差, 表 4 是 $N=180$ 时不同时刻 u 和 v 的误差, 可以看出全局相对误差和最大绝对误差都达到 10^{-3} 精度, 说明模型的求解精度较高。

Table 3. Global relative error and maximum absolute error of u and v with different N when $T=1$

表 3. $T=1$ 时不同网格数下 u 和 v 的全局相对误差和最大绝对误差

误差	N				
	60	90	120	150	180
$\delta_{\text{GRE}}(u)/10^{-3}$	50.049	23.905	14.502	9.9713	7.3721
$\delta_{\text{GRE}}(v)/10^{-3}$	38.138	17.578	10.349	6.8545	5.2158
$\delta_{\text{MAE}}(u)/10^{-3}$	26.647	12.817	8.6151	6.0742	4.5503
$\delta_{\text{MAE}}(v)/10^{-3}$	45.782	21.559	11.564	7.4338	5.6430

Table 4. Global relative error and maximum absolute error of u and v with different T

表 4. 不同时刻 T 下 u 和 v 的全局相对误差和最大绝对误差

误差	T				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\delta_{\text{GRE}}(u)/10^{-3}$	3.9149	5.3276	6.4918	7.4508	7.3721
$\delta_{\text{GRE}}(v)/10^{-3}$	8.4048	6.2536	6.3615	5.4409	5.2158
$\delta_{\text{MAE}}(u)/10^{-3}$	4.6479	3.2862	3.5933	4.0468	4.5503
$\delta_{\text{MAE}}(v)/10^{-3}$	1.5953	2.7316	4.0137	4.6579	5.6430

4. 结语

笔者构建了双分布函数的一维格子 Boltzmann 模型, 通过在模型中加入修正项函数来灵活地处理 NLS-KDV 方程中的非线性项和计算过程中产生的误差项, 从而恢复出宏观方程。数值算例结果表明, 数值解与精确解拟合较好, 说明双分布函数的格子 Boltzmann 模型求解一维 NLS-KDV 方程的初边值问题是有效的。接下来, 笔者将利用该格子 Boltzmann 模型求解高维情形的 NLS-KDV 方程, 并将其推广到更高阶偏微分方程的数值求解中, 以拓宽模型的应用范围。

参考文献

- [1] Shang, J., Li, W. and Li, D. (2023) Traveling Wave Solutions of a Coupled Schrödinger-Korteweg-De Vries Equation by the Generalized Coupled Trial Equation Method. *Heliyon*, **9**, e15695. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15695>
- [2] Akinyemi, L., Şenol, M., Akpan, U. and Oluwasegun, K. (2021) The Optical Soliton Solutions of Generalized Coupled Nonlinear Schrödinger-Korteweg-De Vries Equations. *Optical and Quantum Electronics*, **53**, Article No. 394. <https://doi.org/10.1007/s11082-021-03030-7>
- [3] Akinyemi, L., Veerasha, P. and Ajibola, S.O. (2021) Numerical Simulation for Coupled Nonlinear Schrödinger-korteweg-de Vries and Maccari Systems of Equations. *Modern Physics Letters B*, **35**, Article ID: 2150339.

- <https://doi.org/10.1142/s0217984921503395>
- [4] Ray, S.S. (2018) The Time-Splitting Fourier Spectral Method for Riesz Fractional Coupled Schrödinger-KdV Equations in Plasma Physics. *Modern Physics Letters B*, **32**, Article ID: 1850341. <https://doi.org/10.1142/s0217984918503414>
 - [5] Ali A. Mustafa, and Al-Hayani, W. (2023) Solving the Coupled Schrödinger-Korteweg-De-Vries System by Modified Variational Iteration Method with Genetic Algorithm. *Wasit Journal of Computer and Mathematics Science*, **2**, 97-108. <https://doi.org/10.31185/wjcm.127>
 - [6] Bai, D. and Zhang, L. (2009) The Finite Element Method for the Coupled Schrödinger-KdV Equations. *Physics Letters A*, **373**, 2237-2244. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.04.043>
 - [7] Chippada, S., Dawson, C.N., Martínez-Canales, M.L. and Wheeler, M.F. (1998) Finite Element Approximations to the System of Shallow Water Equations, Part II: Discrete-Time a Priori Error Estimates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36**, 226-250. <https://doi.org/10.1137/s0036142996314159>
 - [8] Golbabai, A. and Safdari-Vaighani, A. (2010) A Meshless Method for Numerical Solution of the Coupled Schrödinger-KdV Equations. *Computing*, **92**, 225-242. <https://doi.org/10.1007/s00607-010-0138-4>
 - [9] Kaya, D. and El-Sayed, S.M. (2003) On the Solution of the Coupled Schrödinger-KdV Equation by the Decomposition Method. *Physics Letters A*, **313**, 82-88. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(03\)00723-0](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(03)00723-0)
 - [10] Küçükarslan, S. (2009) Homotopy Perturbation Method for Coupled Schrödinger-KdV Equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 2264-2271. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.04.008>
 - [11] Abdou, M.A. and Soliman, A.A. (2005) New Applications of Variational Iteration Method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **211**, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.08.002>
 - [12] Doosthoseini, A. and Shahmohamadi, H. (2010) Variational Iteration Method for Solving Coupled Schrödinger-KdV Equation. *Applied Mathematical Sciences*, **4**, 823-837.
 - [13] 何雅玲, 王勇, 李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 1.
 - [14] 郭照立, 郑楚光. 格子 Boltzmann 方法的原理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 10.
 - [15] 宋通政, 戴厚平, 冯舒婷, 等. 非线性耦合长短波方程的格子 Boltzmann 模型求解[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2022, 43(3): 7-14.
 - [16] 冯颖欣, 戴厚平, 汪辰, 等. 扩展 Fisher-Kolmogorov 方程的格子 Boltzmann 方法[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2023, 44(4): 19-30.
 - [17] Feng, Y., Dai, H. and Wei, X. (2023) Numerical Solutions to the Sharma-Tasso-Olver Equation Using Lattice Boltzmann Method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **95**, 1546-1564. <https://doi.org/10.1002/flid.5219>
 - [18] Zhang, J. and Yan, G. (2008) Lattice Boltzmann Method for One and Two-Dimensional Burgers Equation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **387**, 4771-4786. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.04.002>