Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(6), 69-77
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.156190

Hans汉斯

以拟齐次函数为符号的H-Toeplitz算子与JH-Toeplitz算子

曹璎元*，董　玉

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2025年4月21日；录用日期：2025年6月13日；发布日期：2025年6月26日

摘　要

本文研究了调和Bergman空间中的H-Toeplitz算子，并定义了调和Bergman空间上的JH-Toeplitz算子，给出了两个以拟齐次函数为符号的H-Toeplitz算子的交换性的充要条件。本文还讨论了以拟齐次函数为符号的H-Toeplitz算子与JH-Toeplitz算子乘积的相关理论。

关键词

调和Bergman空间，H-Toeplitz算子，JH-Toeplitz算子，交换性

H-Toeplitz Operator and JH-Toeplitz Operator with Quasi Homogeneous Functions as Symbols

Yingyuan Cao*, Yu Dong

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: Jun. 13th, 2025; published: Jun. 26th, 2025

Abstract

This article studies the H-Toeplitz operator in harmonic Bergman space and defines the JH-Toeplitz operator on harmonic Bergman space. The necessary and sufficient conditions for the commutativity of two H-Toeplitz operators with quasi homogeneous functions as symbols are given. The article also discusses the relevant theories of the product of H-Toeplitz operator and JH-Toeplitz operator with

*通讯作者。

文章引用: 曹璎元, 董玉. 以拟齐次函数为符号的 H-Toeplitz 算子与 JH-Toeplitz 算子[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 69-77. DOI: 10.12677/pm.2025.156190

quasi homogeneous functions as symbols.

Keywords

Harmonic Bergman space, H-Toeplitz Operator, JH-Toeplitz Operator, Interchangeability, Quasi Commutativity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

近年来，众多学者对各种函数空间上的 Toeplitz 算子进行了大量的研究，这些研究不仅丰富了数学理论，还在概率论、控制论等领域中发挥着重要作用。关于算子交换性的研究，学者们首先关注的是在 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的交换性。随着研究的深入，学者们进一步探讨了在更广泛的函数空间上 Toeplitz 算子的交换性，特别是在调和 Bergman 空间上，对 Toeplitz 算子的研究取得了不少成果。通过对调和 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的深入研究，学者们揭示了其内在的结构和性质，为进一步的研究提供了坚实的理论基础。1998 年，Zeljko Cuckovi 和 NV Rao 在文献[1]中给出了一个符号在 Bergman 空间上产生 Toeplitz 算子的充要条件，并且在该文章中首次提出了拟齐次的概念。2001 年，项一星[2]讨论了 Bergman 空间中 Toeplitz 和 Hankel 算子的紧性，得到与 Bergman 空间上 T-H 算子紧性的某些结果。2003 年，郭坤宇和郑德超[3]描述了 Hankel 算子和 Toeplitz 算子何时具有紧凑的换向器。1991 年，S Axler 和 Eljko Ukovi [4]利用共形不变均值特性，讨论了在 Bergman 空间上两个具有调和符号的 Toeplitz 算子的交换性情况。2008 年，JR Lee 和 YH Lee [5]考虑了在函数具有多项式的情况下，带符号的 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的次正态性。2006 年，Louhichi I 等人在文献[6]中研究出乘积为 Toeplitz 算子的充要条件，并在某些情况下给出了乘积符号的显式公式，然后证明几乎任何事情都可能发生。2017 年，陈泳和于涛等人在文献[7]中描述了单位圆盘调和 Dirichlet 空间正交补上对偶 Toeplitz 算子的代数和谱性质。2016 年，卢玉峰等人[8]主要研究调和 Hardy 空间上对偶 Toeplitz 算子的代数性质及谱包含定理，给出了 $n = 2$ 时，一些特殊符号的对偶 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件。1994 年，Cuckovic 和 Zeljko [9]证明了如果 Bergman 空间上的两个 Toeplitz 算子交换，其中一个算子的符号是解析的和非常数的，那么另一个算子也是解析的。

设 $\mathbb{D}$ 是复平面上的单位元，$L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 表示 $\mathbb{D}$ 上所有平方可积函数全体构成的 Hilbert 空间，记为 $L_a^2(\mathbb{D})$。$L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 上所有解析函数全体构成的空间是 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，记为 $L_a^2(\mathbb{D})$。Bergman 空间的再生核为 $K_z(w)=\dfrac{1}{(1-\overline{z}w)^2}$，$z,w\in\mathbb{D}$。$L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 上所有调和函数全体构成的空间是调和 Bergman 空间 $L_h^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，记为 $L_h^2(\mathbb{D})$。调和 Bergman 空间的再生核为 $R_z(w)=\dfrac{1}{(1-\overline{z}w)^2}+\dfrac{1}{(1-z\overline{w})^2}-1,\ z,w\in\mathbb{D}$。

令 P 为 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)\to L_a^2(\mathbb{D})$ 的投影算子，G 为 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)\to L_h^2(\mathbb{D})$ 的投影算子。对任意 $f\in L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，有

$$P(f)(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^2}\mathrm{d}A(w),$$

$$G(f)(z)=\langle f,R_z\rangle=\int_{\mathbb{D}}f(w)\left[\frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}+\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}-1\right]\mathrm{d}A(w).$$

令 $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n, z\in\mathbb{D}$，则 $\{e_n\}_{n\geq 0}$ 是 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的规范正交基。定义算子 $K:L_a^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D})$ 满足

$$K(e_{2n})=e_n, K(e_{2n+1})=\overline{e_{n+1}}, n\geq 0.$$

显然 K 在 $L_a^2(\mathbb{D})$ 中有界，且 $\|K\|=1$。它的伴随算子 $K^*:L_h^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$K^*(e_n)=e_{2n}, K^*(\overline{e_{n+1}})=e_{2n+1}, n\geq 0.$$

对于 p 次拟齐次函数 $f\in L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，有[2]

$$f(re^{i\theta})=e^{ip\theta}\varphi(r).$$

注意 p 为非零整数。当 $p=0$ 时，f 为径向函数。

对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，乘法算子 M_φ 定义为 $M_\varphi(f)=\varphi f$，翻转算子 $J:L_h^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$J(e_n)=\overline{e_n}(n\in\mathbb{Z}).$$

对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，定义 H-Toeplitz 算子 $B_\varphi:L_h^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D})$ 为

$$B_\varphi=GM_\varphi K^*.$$

对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，定义算子 $H_\varphi:L_h^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D})$ 为

$$H_\varphi:L_h^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D}).$$

该算子与 Hankle 算子不同，是 H-Toeplitz 算子的翻转，因此称之为 JH-Toeplitz 算子。

不同空间上的算子交换性是众多学者在研究算子相关性质时关注的重要议题之一，这一领域已经取得了相当显著的进展。然而在调和 Bergman 空间中，算子交换性的研究依然面临着诸多挑战。基于此背景，本文旨在进一步探讨调和 Bergman 空间中满足交换性的算子的具体形式和所需条件。

本文研究了调和 Bergman 空间上以拟齐次函数为符号的 H-Toeplitz 算子和新定义的 JH-Toeplitz 算子，主要探讨了这两类算子的交换性以及 H-Toeplitz 算子与 JH-Toeplitz 算子乘积的性质。该研究丰富了调和 Bergman 空间上算子理论的研究内容。H-Toeplitz 算子是已有研究对象，而 JH-Toeplitz 算子是本文新定义的，是对 H-Toeplitz 算子的一个拓展。研究这两类算子的交换性及乘积性质，有助于更深入地理解调和 Bergman 空间的结构及算子特性。

本文的创新点在于研究调和 Bergman 空间上的以拟齐次函数为符号的 H-Toeplitz 算子，推断出以其为符号的 H-Toeplitz 算子满足交换性时的充要条件，从而构造出符合条件的拟齐次函数的具体形式。其次重新定义了一个 JH-Toeplitz 算子，并讨论了以拟齐次函数为符号的 H-Toeplitz 算子与 JH-Toeplitz 算子乘积的相关理论。

2. H-Toeplitz 算子的交换性

在本节中，我们将讨论两个以拟齐次函数为符号的 H-Toeplitz 算子的交换性。我们首先给出了两个引理，会在下面定理的证明中用到。

下面引理给出了 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 中的任意函数作用在 H-Toeplitz 算子和 JH-Toeplitz 算子上的具体形式。

引理 1 设 $k\in\mathbb{Z}^+$，且 φ 是有界径向函数。则对任意

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)}\in L_h^2(\mathbb{D}).$$

有

$$B_{e^{ik\theta}\varphi} f = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \sqrt{2n+1}(2n+k+1)\hat{\varphi}_2(4n+k+2) z^{2n+k}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} 2b_{m+1}\sqrt{2m+2}(2m+k+2)\hat{\varphi}_2(4m+k+4) z^{2m+k+1},$$
$$H_{e^{ik\theta}\varphi} f = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \sqrt{(2n+1)(2n+k+1)}\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\overline{e}_{2n+k}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} 2b_{m+1}\sqrt{(2m+2)(2m+k+2)}\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\overline{e}_{2m+k+1}.$$

引理 2 [10]对于 $\phi \in L^1([0,1], rdr)$，若存在正整数序列 $\{n_j\}$，使得 $\sum_j \frac{1}{n_j} = \infty$ 且对于所有的 j，$\hat{\phi}(n_k) = 0$，则 $\phi = 0$。

值得注意的是，H-Toeplitz 算子和 JH-Toeplitz 算子与其被诱导的符号密切相关。事实上，对于任意 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$，有

(1) $B_\varphi f = GM_\varphi K^* f = 0$ 当且仅当 $\varphi = 0$， $H_\varphi f = JGM_\varphi K^* f = 0$ 当且仅当 $\varphi = 0$；

(2) $B_{e^{ik\theta}c\varphi} = GM_{e^{ik\theta}c\varphi}K^* = Ge^{ik\theta}c\varphi K^* = cGe^{ik\theta}\varphi K^* = cGM_{e^{ik\theta}\varphi}K^* = cB_{e^{ik\theta}\varphi}$。

接下来我们将描述单个拟齐次函数符号诱导的 H-Toeplitz 算子在 $L_h^2(\mathbb{D})$ 上可交换的充要条件。

定理 1 设 a,b,s,t 为任意常数， $\varphi_1(z) = a|z|^s$， $\varphi_2(z) = b|z|^t$，则当 $k \in \mathbb{Z}^+$ 时， $B_{e^{ik\theta}\varphi_1} B_{e^{ik\theta}\varphi_2} = B_{e^{ik\theta}\varphi_2} B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$ 当且仅当 $s = t$。

证明 对任意 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(z) + \sum_{m=0}^{\infty} b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)} \in L_h^2(\mathbb{D})$，通过定理 2.1，可直接计算出

$$B_{e^{ik\theta}\varphi_1} B_{e^{ik\theta}\varphi_2} f$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4\sqrt{2n+1}a_n \sqrt{(2n+k+1)(4n+2k+1)}(4n+3k+1)$$
$$\frac{ab}{(4n+k+2+t)(8n+5k+2+s)} z^{4n+3k}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} 4\sqrt{2m+2}b_{m+1}\sqrt{(2m+k+2)(4m+2k+3)}(4m+3k+3)$$
$$\frac{ab}{(4m+k+4+t)(8m+5k+6+s)} z^{4m+3k+2},$$
$$B_{e^{ik\theta}\varphi_2} B_{e^{ik\theta}\varphi_1} f$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4\sqrt{2n+1}a_n \sqrt{(2n+k+1)(4n+2k+1)}(4n+3k+1)$$
$$\frac{ab}{(4n+k+2+s)(8n+5k+2+t)} z^{4n+3k}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty} 4\sqrt{2m+2}b_{m+1}\sqrt{(2m+k+2)(4m+2k+3)}(4m+3k+3)$$
$$\frac{ab}{(4m+k+4+s)(8m+5k+6+t)} z^{4m+3k+2}.$$

若 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1} B_{e^{ik\theta}\varphi_2} = B_{e^{ik\theta}\varphi_2} B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$，则有

$$(4n+k+2+t)(8n+5k+2+s) =$$
$$(4n+k+2+s)(8n+5k+2+t)$$

且

$$\begin{aligned}&(4m+k+4+t)(8m+5k+6+s)=\\&(4m+k+4+s)(8m+5k+6+t),\end{aligned}$$

从而推出 $s=t$。反过来，若 $s=t$，则有 $bB_{e^{ik\theta}\varphi_1}=aB_{e^{ik\theta}\varphi_2}$，从而满足 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$。

现在我们考虑以两个拟齐次函数相加为符号的 H-Toeplitz 算子的交换性的充要条件。

定理 2 设 a,b,c,d,s,t 为任意常数，$\varphi_1(z)=a|z|^s+b|z|^t$，$\varphi_2(z)=c|z|^s+d|z|^t$，则当 $k\in\mathbb{Z}^+$ 时，$B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$ 当且仅当 $ad=bc$。

证明 首先证明必要性。对任意 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)}\in L_h^2(\mathbb{D})$，通过定理 2.1，可直接计算出

$$\begin{aligned}&B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}4\sqrt{2n+1}a_n\sqrt{(2n+k+1)(4n+2k+1)}(4n+3k+1)\\&\left(\frac{a}{8n+5k+2+s}+\frac{b}{8n+5k+2+t}\right)\left(\frac{c}{4n+k+2+s}+\frac{d}{4n+k+2+t}\right)z^{4n+3k}\\&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}4\sqrt{2m+2}b_{m+1}\sqrt{(2m+k+2)(4m+2k+3)}(4m+3k+3)\\&\left(\frac{a}{8m+5k+6+s}+\frac{b}{8m+5k+6+t}\right)\left(\frac{c}{4m+k+4+s}+\frac{d}{4m+k+4+t}\right)z^{4m+3k+2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}f\\&=\sum_{n=0}^{\infty}4\sqrt{2n+1}a_n\sqrt{(2n+k+1)(4n+2k+1)}(4n+3k+1)\\&\left(\frac{c}{8n+5k+2+s}+\frac{d}{8n+5k+2+t}\right)\left(\frac{a}{4n+k+2+s}+\frac{b}{4n+k+2+t}\right)z^{4n+3k}\\&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}4\sqrt{2m+2}b_{m+1}\sqrt{(2m+k+2)(4m+2k+3)}(4m+3k+3)\\&\left(\frac{c}{8m+5k+6+s}+\frac{d}{8m+5k+6+t}\right)\left(\frac{a}{4m+k+4+s}+\frac{b}{4m+k+4+t}\right)z^{4m+3k+2}.\end{aligned}$$

若 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$，则有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{8n+5k+2+s}+\frac{b}{8n+5k+2+t}\right)\left(\frac{c}{4n+k+2+s}+\frac{d}{4n+k+2+t}\right)=\\&\left(\frac{c}{8n+5k+2+s}+\frac{d}{8n+5k+2+t}\right)\left(\frac{a}{4n+k+2+s}+\frac{b}{4n+k+2+t}\right)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{8m+5k+6+s}+\frac{b}{8m+5k+6+t}\right)\left(\frac{c}{4m+k+4+s}+\frac{d}{4m+k+4+t}\right)=\\&\left(\frac{c}{8m+5k+6+s}+\frac{d}{8m+5k+6+t}\right)\left(\frac{a}{4m+k+4+s}+\frac{b}{4m+k+4+t}\right),\end{aligned}$$

从而推出 $ad=bc$。

反过来，若 $ad=bc$，则 φ_1 与 φ_2 线性相关，显然有 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}$。

接下来给出一些例子。

例 1 设 $\varphi_1(z)=|z|+2|z|^2$，$\varphi_2(z)=2|z|^3+4|z|^4$，则对于任意的 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)}\in L_h^2(\mathbb{D})$，有 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}f=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}f$。

例 2 设 $\varphi_1(z)=|z|+|z|^2$，$\varphi_2(z)=|z|+2|z|^2$，$f=\overline{z}$，有

$$B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}f=4\sqrt{(k+2)(2k+3)}(3k+3)\left(\frac{1}{5k+7}+\frac{1}{5k+8}\right)\left(\frac{1}{k+5}+\frac{2}{k+6}\right)z^{3k+2},$$

$$B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}f=4\sqrt{(k+2)(2k+3)}(3k+3)\left(\frac{1}{5k+7}+\frac{2}{5k+8}\right)\left(\frac{1}{k+5}+\frac{1}{k+6}\right)z^{3k+2},$$

只有当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}f=B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}f$ 才成立，但 $k\in\mathbb{Z}^+$，故 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}f\neq B_{e^{ik\theta}\varphi_2}B_{e^{ik\theta}\varphi_1}f$。

以上是关于两个具有相同阶数的拟齐次函数符号的 H-Toeplitz 算子的交换，下面我们将讨论两个具有不同阶数的拟齐次函数符号的 H-Toeplitz 算子的交换性。我们给出以下定理。

定理 3 设 $p,s\in\mathbb{Z}^+$ 且 $p\neq s$，φ_1,φ_2 是有界径向函数，则当 $k\in Z^+$ 时，$B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}=B_{e^{is\theta}\varphi_2}B_{e^{ip\theta}\varphi_1}$ 当且仅当 $\varphi_1=0$ 或 $\varphi_2=0$。

证明 充分性显然成立，现证必要性。分两种情况讨论。

情况 1 等式两边代入 $\overline{e_{n+1}}$，利用定理 2.1，可直接计算出

$$\begin{aligned}&B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}\left(\overline{e_{n+1}}\right)\\&=4\sqrt{(2n+2)(3+4n+2s)(2+2n+s)}(3+4n+2s+p)\\&\hat{\varphi}_2(4n+s+4)\hat{\varphi}_1(8n+6+4s+p+6)z^{4n+2s+p+2}.\end{aligned}$$

同理可得，

$$\begin{aligned}&B_{e^{is\theta}\varphi_2}B_{e^{ip\theta}\varphi_1}\left(\overline{e_{n+1}}\right)\\&=4\sqrt{(2n+2)(3+4n+2p)(2+2n+p)}(3+4n+2p+s)\\&\hat{\varphi}_2(4n+p+4)\hat{\varphi}_1(8n+4p+s+6)z^{4n+2p+s+2}.\end{aligned}$$

由于 $s\neq p$，则 $4n+2s+p+2\neq 4n+2p+s+2$，又 $B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}=B_{e^{is\theta}\varphi_2}B_{e^{ip\theta}\varphi_1}$，因此 $B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}\left(\overline{e_{n+1}}\right)=0$，从而有

$$\hat{\varphi}_2(4n+s+4)\hat{\varphi}_1(8n+4s+p+6)=0,\forall n\geq 0.$$

设

$$\begin{aligned}G_1&=\{n\geq 0:\hat{\varphi}_1(8n+4s+p+6)=0\}\\G_2&=\{n\geq 0:\hat{\varphi}_2(4n+s+4)=0\}\end{aligned}$$

若 G_1 中有有限个元素，则 $\sum_{n\in G_2}\frac{1}{n}=\infty$，因此由定理 2.2 知，$\varphi_2=0$；反之若 G_2 中有有限个元素，则 $\sum_{n\in G_1}\frac{1}{n}=\infty$，从而 $\varphi_1=0$。

情况 2 等式两边代入 e_n，计算得

$$\begin{aligned}&B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}(e_n)\\&=4\sqrt{(2n+1)(2+4n+2s)(1+2n+s)}(1+4n+2s+p)\hat{\varphi}_2(4n+s+2)\hat{\varphi}_1(8n+4s+p+2)z^{4n+2s+p},\end{aligned}$$

$$B_{e^{is\theta}\varphi_2}B_{e^{ip\theta}\varphi_1}(e_n)$$
$$=4\sqrt{(2n+1)(2+4n+2p)(1+2n+p)}(1+4n+2p+s)\hat{\varphi}_2(4n+p+2)\hat{\varphi}_1(8n+4p+s+2)z^{4n+2p+s},$$

由于 $s\neq p$，则 $4n+2s+p\neq 4n+2p+s$，又 $B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}=B_{e^{is\theta}\varphi_2}B_{e^{ip\theta}\varphi_1}$，因此 $B_{e^{ip\theta}\varphi_1}B_{e^{is\theta}\varphi_2}(e_n)=0$。从而有

$$\hat{\varphi}_2(4n+s+2)\hat{\varphi}_1(8n+4s+p+2)=0,\ \forall n\geq 0.$$

设

$$G_1=\{n\geq 0:\hat{\varphi}_1(8n+4s+p+2)=0\}$$
$$G_2=\{n\geq 0:\hat{\varphi}_2(4n+s+2)=0\}$$

若 G_1 中有有限个元素，则 $\sum_{n\in G_2}\frac{1}{n}=\infty$，因此由定理 2.2 知，$\varphi_2=0$；反之若 G_2 中有有限个元素，则 $\sum_{n\in G_1}\frac{1}{n}=\infty$，从而 $\varphi_1=0$。

H-Toeplitz 算子与 JH-Toeplitz 算子的乘积

在本节中，我们将给出以拟齐次函数为符号的H-Toeplitz算子和JH-Toeplitz算子的乘积的相关性质。

定理 4 设 $k\in\mathbb{Z}^+$，φ_1,φ_2 是有界径向函数，若存在径向函数 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},dA)$ 使得 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi}$，则 $\varphi_1=\varphi=0$ 或者 $\varphi_2=\varphi=0$。

证明 对任意 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)}\in L_h^2(\mathbb{D})$，有

$$B_{e^{ik\theta}\varphi}f$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}2a_n\sqrt{(2n+1)(2n+k+1)}\hat{\varphi}(4n+k+2)e_{2n+k}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}2b_{m+1}\sqrt{(2m+2)(2m+k+2)}\hat{\varphi}(4m+k+4)e_{2m+k+1}$$

且

$$B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}f$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}4a_n\sqrt{(2n+1)(2n+k+1)(4n+2k)(4n+3k)}$$
$$\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\hat{\varphi}_1(8n+5k)e_{4n+3k-1}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}4b_{m+1}\sqrt{(2m+2)(2m+k+2)(4m+2k+2)(4m+3k+2)}$$
$$\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\hat{\varphi}_1(8m+5k+4)e_{4m+3k+1}.$$

对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$，$2n+k\neq 4n+3k-1$。因此 e_{2n+k} 与 $e_{4n+3k-1}$ 不可能相等，同样 e_{2m+k+1} 与 $e_{4n+3k+1}$ 不可能相等，但 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi}$，故有 $B_{e^{ik\theta}\varphi}=0$，从而 $\varphi=0$。

下证 $\varphi_1=0$ 或 $\varphi_2=0$。由上面知 $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=0$，从而存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，$\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\hat{\varphi}_1(8n+5k+2)=0$ 且 $\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\hat{\varphi}_1(8m+5k+8)=0$，故 $\varphi_1=0$ 或 $\varphi_2=0$。

以下推论很快回答了两个具有拟齐次函数符号的 H-Toeplitz 算子和 JH-Toeplitz 算子在一般情况下是半交换的，并由定理 3.1 即可快速证明。

推论 1 设 $k\in\mathbb{Z}^+$，$\varphi_1,\varphi_2,\varphi$ 是有界径向函数。则下面详述等价

(1) $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=B_{e^{ik\theta}\varphi_1\varphi_2}$；

(2) $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=0$；

(3) $\varphi_1=0$ 或者 $\varphi_2=0$。

定理 5 设 $k\in\mathbb{Z}^+$，φ_1,φ_2 是有界径向函数，若存在径向函数 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},dA)$ 使得 $H_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=H_{e^{ik\theta}\varphi}$，则 $\varphi_1=\varphi=0$ 或者 $\varphi_2=\varphi=0$。

证明 对任意 $f=\sum_{n=0}^\infty a_ne_n(z)+\sum_{n=0}^\infty b_{m+1}\overline{e_{m+1}(z)}\in L_h^2(\mathbb{D})$，有

$$H_{e^{ik\theta}\varphi}f=\sum_{n=0}^\infty 2\sqrt{(2n+1)(2n+k+1)}a_n\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\overline{e_{2n+k}}$$
$$+\sum_{m=0}^\infty 2\sqrt{(2m+2)(2m+k+2)}b_{m+1}\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\overline{e_{2m+k+1}},$$

且

$$H_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}f$$
$$=\sum_{n=0}^\infty 4a_n\sqrt{(2n+1)(2n+k+1)(4n+2k+1)(4n+3k+1)}$$
$$\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\hat{\varphi}_1(8n+5k+2)\overline{e_{4n+3k}}$$
$$+\sum_{m=0}^\infty 4b_{m+1}\sqrt{(2m+2)(2m+k+2)(4m+2k+3)(4m+3k+3)}$$
$$\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\hat{\varphi}_1(8m+5k+8)\overline{e_{4m+3k+2}},$$

显然对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$，$\overline{e_{2m+k+1}}\neq\overline{e_{4m+3k+2}}$，因此有 $H_{e^{ik\theta}\varphi}=0$，从而 $\varphi=0$。

下证 $\varphi_1=0$ 或 $\varphi_2=0$。由上面知 $H_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=0$，从而存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，$\hat{\varphi}_2(4n+k+2)\hat{\varphi}_1(8n+5k+2)=0$ 且 $\hat{\varphi}_2(4m+k+4)\hat{\varphi}_1(8m+5k+8)=0$，故 $\varphi_1=0$ 或 $\varphi_2=0$。

下面推论与前一个推论类似，根据定理 3.3 就能快速证明。

推论 2 设 $k\in\mathbb{Z}^+$，φ_1,φ_2 是有界径向函数。则下面详述等价

(1) $H_{e^{ik\theta}\varphi_1}B_{e^{ik\theta}\varphi_2}=H_{e^{ik\theta}\varphi_1\varphi_2}$；

(2) $B_{e^{ik\theta}\varphi_1}H_{e^{ik\theta}\varphi_2}=0$；

(3) $\varphi_1=0$ 或者 $\varphi_2=0$。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11901269)；辽宁省教育厅自然科学类项目(JYTMS20231041)。

参考文献

[1] Cucković, Z. and Rao, N.V. (1998) Mellin Transform, Monomial Symbols, and Commuting Toeplitz Operators. *Journal of Functional Analysis*, **154**, 195-214. https://doi.org/10.1006/jfan.1997.3204

[2] 项一星. Bergman 空间 L1α(Ω)上的 Toeplitz 和 Hankel 算子[J]. 大学数学, 2001, 17(1): 9-11.

[3] Guo, K. and Zheng, D. (2003) Essentially Commuting Hankel and Toeplitz Operators. *Journal of Functional Analysis*, **201**, 121-147. https://doi.org/10.1016/s0022-1236(03)00100-9

[4] Axler, S. and Čučković, Ž. (1991) Commuting Toeplitz Operators with Harmonic Symbols. *Integral Equations and Operator Theory*, **14**, 1-12. https://doi.org/10.1007/bf01194925

[5] Lee, J. and Lee, Y. (2008) Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Honam Mathematical Journal*, **30**, 127-135. https://doi.org/10.5831/hmj.2008.30.1.127

[6] Louhichi, I., Strouse, E. and Zakariasy, L. (2005) Products of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **54**, 525-539. https://doi.org/10.1007/s00020-005-1369-1

[7] Chen, Y., Yu, T. and Zhao, Y.L. (2016) Dual Toeplitz Operators on Orthogonal Complement of the Harmonic Dirichlet Space. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **33**, 383-402. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5779-6

[8] 卢玉峰, 丁晓娟, 刘浏. 多圆盘调和 Hardy 空间上的对偶 Toeplitz 算子[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(3): 289-294.

[9] Cuckovic, Z. (1994) Commutants of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Pacific Journal of Mathematics*, **162**,

277-285. https://doi.org/10.2140/pjm.1994.162.277

[10] Liang, J., Lai, L., Zhao, Y. and Chen, Y. (2022) Commuting H-Toeplitz Operators with Quasihomogeneous Symbols. *AIMS Mathematics*, **7**, 7898-7908. https://doi.org/10.3934/math.2022442