Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(6), 17-28
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.156185

一类具有无症状感染及接种疫苗的随机SAIRS传染病模型的平稳分布

高　琴

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年4月23日；录用日期：2025年5月27日；发布日期：2025年6月19日

摘　要

本文综合研究了一类无症状感染，有症状感染，以及接种疫苗的随机SAIRS传染病模型的平稳分布，首先证明了模型正解的存在唯一性。然后，利用构造Lyapunov函数的方法建立了参数$\mathcal{R}_0^s$，并且证明了当$\mathcal{R}_0^s > 1$时，模型的解在$\mathbb{R}_+^3$上存在一个唯一的平稳分布。最后，对本文主要研究内容进行了总结，发现$\mathcal{R}_0^s$受到白噪声的影响，并且$\mathcal{R}_0^s$小于等于确定型SAIRS模型的基本再生数$\mathcal{R}_0$。

关键词

随机SAIRS传染病模型，解的存在唯一性，平稳分布

The Stationary Distribution of a Stochastic SAIRS Infectious Disease Model with Asymptomatic Infections and Vaccination

Qin Gao

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 23rd, 2025; accepted: May 27th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

This article comprehensively studies the stationary distribution of a stochastic SAIRS infectious

文章引用: 高琴. 一类具有无症状感染及接种疫苗的随机 SAIRS 传染病模型的平稳分布[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 17-28. DOI: 10.12677/pm.2025.156185

disease model with asymptomatic infection, symptomatic infection, and vaccination. Firstly, we prove the existence and uniqueness of the positive solution of the model. Then, we established the parameters $\mathcal{R}_0^s$ by using the method of constructing Lyapunov function, and proven that when $\mathcal{R}_0^s > 1$, the solution of the model has a unique stationary distribution in $\mathbb{R}_+^3$. Finally, we summarize the main results of this article and find that $\mathcal{R}_0^s$ is affected by white noise. In addition, $\mathcal{R}_0^s$ is less than or equal to the basic reproduction number $\mathcal{R}_0$ of the deterministic SAIRS model.

Keywords

Stochastic SAIRS Infectious Disease Model, The Existence and Uniqueness of Solutions, Stationary Distribution

1. 引言

近二十年来，全球公共卫生领域面临了多次重大挑战，从严重急性呼吸综合征(SARS)到禽流感(H5N1)，甲型H1N1流感，中东呼吸综合征(MERS)，再到近年发生的新型冠状病毒肺炎(COVID-19)，多种传染病的暴发和流行给人类社会造成了巨大的健康危害，同时对社会经济造成了严重冲击。这充分表明传染病严重威胁着人类的生存和发展。为研究疾病的传播规律，学者们基于不同的传染病具有不同的传播特点，建立了多种仓室模型以模拟疾病的传播过程。例如，Robinson等[1]提出了一类在无症状感染的情况下出现耐药性的SAIRS模型，明确考虑无症状和有症状的感染个体的情况下，分析了流行病的动态是由基本再生数决定的。Ansumali等[2]在文献[1]基础上简化了模型，即假设康复者不会失去免疫力，且无症状和有症状个体的感染率相等，其康复率也相等。2022年Ottaviano等[3]在文献[1]的模型基础上提出了如下带有疫苗接种的SAIRS型传染病模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\mu-(\beta_A A+\beta_I I)S-(\mu+v)S+\gamma R,\\ \dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=(\beta_A A+\beta_I I)S-(\alpha+\delta_A+\mu)A,\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha A-(\delta_I+\mu)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\delta_A A+\delta_I I+vS-(\gamma+\mu)R,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中$S(t)$表示易感者，$A(t)$表示无症状感染者，$I(t)$表示有症状感染者，$R(t)$表示恢复者，μ表示出生率和死亡率，β_A表示易感者与无症状感染者的感染率，β_I表示易感者与有症状感染者之间疾病的传播率，v表示疫苗接种率，γ表示恢复者丧失免疫力又重新回到易感人群的速率，$\dfrac{1}{\alpha}$表示无症状感染者出现症状的平均时间，δ_A表示无症状感染者的恢复率，δ_I表示有症状感染者的恢复率。

模型(1.1)的初值$(S(0),A(0),I(0),R(0))$属于集合$\Gamma=\left\{(S,A,I,R)\in\mathbb{R}_+^4 \,\middle|\, S+A+I+R=1\right\}$，其中$\mathbb{R}_+^4$是$\mathbb{R}^4$的非负象限。由于$S(t)+A(t)+I(t)+R(t)=1$，故模型(1.1)等价于下列三维模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\mu-(\beta_A A+\beta_I I)S-(\mu+\nu+\gamma)S+\gamma(1-A-I),\\
\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=(\beta_A A+\beta_I I)S-(\alpha+\delta_A+\mu)A,\\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha A-(\delta_I+\mu)I,
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

其中模型(1.2)的初值 $(S(0),A(0),I(0))$ 属于集合 $\Gamma_1=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3\,\middle|\,S+A+I\le 1\right\}$。

此外，Ottaviano 等[3]确定了模型(1.2)的无病平衡点 $x_0=(S_0,A_0,I_0)=\left(\dfrac{\mu+\gamma}{\mu+\nu+\gamma},0,0\right)$ 以及地方病平衡点 $x_1=(S^*,A^*,I^*)$，其中 $S^*=\dfrac{(\alpha+\delta_A+\mu)(\delta_I+\mu)}{\beta_A(\delta_I+\mu)+\beta_I\alpha}$，$A^*=\dfrac{(\delta_I+\mu)}{\alpha}I^*$，$I^*=\dfrac{\alpha(\delta_I+\mu)(\mu+\nu+\gamma)(\alpha+\delta_A+\mu)}{(\beta_A(\delta_I+\mu)+\beta_I\alpha)((\alpha+\delta_A+\mu+\gamma)(\delta_I+\mu)+\gamma\alpha)}(\mathcal{R}_0-1)$，且利用下一代矩阵方法[4]，通过 $\mathcal{R}_0=\rho(FV^{-1})$ 建立了模型的基本再生数

$$
\mathcal{R}_0=\left(\beta_A+\frac{\alpha\beta_I}{\delta_I+u}\right)\frac{\gamma+\mu}{(\alpha+\delta_A+\mu)(\nu+\gamma+\mu)},
$$

并证明了当 $\mathcal{R}_0<1$ 时，模型(1.2)的无病平衡点是全局渐进稳定的；当 $\mathcal{R}_0>1$ 时，模型(1.2)的无病平衡点是不稳定的，存在一个唯一的地方病平衡点。

一方面，在现实世界中，疾病传播受众多随机因素的影响。因此学者们广泛关注随机模型的阈值问题[5]-[10]。研究发现随机扰动能够抑制疾病的传播[11]-[16]。例如，Zhao 和 Tan 等[17] [18]研究了媒体报道对随机 SIS 传染病模型阈值动力学的影响。Nguyen 等[19]提出了一类具有一般发病率的随机 SIRS 模型。Du [20]等研究了一类随机 SIR 传染病模型的持久与灭绝。Zhang 和 Zhang [21]给出了具有不同总人口规模的确定性和随机性 SIQS 传染病模型的阈值。

综上，在模型(1.2)的基础上，本文假设随机扰动的类型为白噪声，且与变量 S,A,I 成正比。因此得到模型(1.2)的随机模型：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}S(t)=\left[\mu-(\beta_A A+\beta_I I)S-(\mu+\nu+\gamma)S+\gamma(1-A-I)\right]\mathrm{d}t+\sigma_1 S\mathrm{d}B_1(t),\\
\mathrm{d}A(t)=\left[(\beta_A A+\beta_I I)S-(\alpha+\delta_A+\mu)A\right]\mathrm{d}t+\sigma_2 A\mathrm{d}B_2(t),\\
\mathrm{d}I(t)=\left[\alpha A-(\delta_I+\mu)I\right]\mathrm{d}t+\sigma_3 I\mathrm{d}B_3(t),
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

其中 $B_i(t)(i=1,2,3)$ 表示相互独立的标准布朗运动，$\sigma_i^2(t)(i=1,2,3)$ 表示随机扰动的强度。

文章剩余结构如下。在第二部分给出本文将会用到的定义和公式。第三部分，将证明模型(1.3)在状态空间 $\mathbb{R}_+^4$ 上存在唯一的全局正解。第四部分，首先构造随机模型(1.3)的阈值参数 $\mathcal{R}_0^s$，其次通过构造合适的 Lyapunov 函数将证明当 $\mathcal{R}_0^s>1$ 时，模型(1.3)在状态空间 $\mathbb{R}_+^4$ 上存在一个唯一的平稳分布 $\pi(\cdot)$。第五部分，总结本文主要结论，并展望了将来的研究。

2. 预备知识

在本文中，设 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间，其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 满足右连续，且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有 $\mathbb{P}$-null 集。并记 $a\wedge b=\min\{a,b\}$ 和 $a\vee b=\max\{a,b\}$。

定义 1 [22]

设 $x(t)(t\geq 0)$ 是 Itô 过程，并且满足下面的随机微分

$$\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B(t)$$

其中 $f\in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$，$g\in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times m})$。令 $V(x,t)\in C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，则 $V(x,t)$ 仍是 Itô 过程，其随机微分具有如下形式

$$\mathrm{d}V(x(t),t)=\mathcal{L}V(x,t)\mathrm{d}t+V_x(x,t)g(t)\mathrm{d}B(t)\ \ a.s.$$

其中

$$\mathcal{L}V(x,t)=V_t(x,t)+V_x(x,t)f(t)+\frac{1}{2}trace\left[g^T(x,t)V_{xx}g(x,t)\right]$$

称上式为 Itô 公式。

3. 全局正解的存在唯一性

在这一节中，将通过构造合适的 Lyapunov 函数 V 来证明模型(1.3)正解的存在唯一性。首先，定义状态空间 $\mathbb{R}_+^3=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_i>0,i=1,2,3\right\}$。下面证明模型(1.3)解的正不变集是 $\mathbb{R}_+^3$。

定理 3.1.

对任意的初始值 $(S(0),A(0),I(0))\in\mathbb{R}_+^3$，模型(1.3)在 $t\geq 0$ 上存在唯一的解 $(S(t),A(t),I(t))$，且解 $(S(t),A(t),I(t))\in\mathbb{R}_+^3$ 的概率为 1，即对任意的 $t\geq 0$，有 $(S(t),A(t),I(t))\in\mathbb{R}_+^3$ a.s.。

证明 由于模型(1.3)的系数是局部 Lipschitz 连续的，则对任意的初值 $(S(0),A(0),I(0))\in\mathbb{R}_+^3$ 和 $t\in[0,\tau_e)$，模型(1.3)存在唯一的局部解，其中 τ_e 表示爆破时间。要想证得解是全局的，则只需证明 $\tau_e=\infty$ a.s.因此，令 $k_0>1$，使得 $(S(0),A(0),I(0))$ 在区间 $\left[\frac{1}{k_0},k_0\right]$。对于任意的整数 $k>k_0$，定义停时：

$$t\in[0,\tau_e):S(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\text{或}A(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\text{或}I(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right),$$

在本文中，令 $\inf\varnothing=\infty$。显然，当 $k\to\infty$ 时，τ_e 是单调递增的。记 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，则 $\tau_\infty<\tau_e$ a.s.。如果 $\tau_\infty=\infty$ a.s.，那么 $\tau_e=\infty$ a.s.。下面用反证法证明 $\tau_\infty=\infty$。设 $\tau_\infty\neq\infty$，则存在 $T>0$ 和任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得

$$\mathbb{P}\left\{\tau_\infty\leq T\right\}>\varepsilon.$$

因此存在整数 $k_1>k_0$ 使得

$$\mathbb{P}\left\{\Omega_k\right\}\geq\varepsilon,\quad k>k_1,$$

其中 $\Omega_k=\left\{\tau_k\leq T\right\}$。

考虑 $\mathbb{C}^2$-函数 $V:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}$，

$$V(S,A,I)=S-a-a\ln\frac{S}{a}+A-1-\ln A+I-1-\ln I,$$

其中 a 是待定得常数。令 $k\geq k_0$ 和 T 是任意的。根据 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}V(S,A,I)=\mathcal{L}V(S,A,I)\mathrm{d}t+\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(A-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(I-1)\mathrm{d}B_3(t),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(S,A,I)=&\mu-(\beta_A A+\beta_I I)S-(\mu+\nu+\gamma)S+\gamma(1-A-I)\\&-\frac{a\mu}{S}+a(\beta_A A+\beta_I I)+a(\mu+\nu+\gamma)-a\gamma(1-A-I)+\frac{1}{2}a\sigma_1^2\\&+(\beta_A A+\beta_I I)S-(\alpha+\delta_A+\mu)A-(\beta_A A+\beta_I I)\frac{S}{A}+(\alpha+\delta_A+\mu)+\frac{1}{2}\sigma_2^2\\&+\alpha A-(\delta_I+\mu)I-\alpha\frac{A}{I}+(\delta_I+\mu)+\frac{1}{2}\sigma_3^2\\&\le\mu+\gamma+\left[a(\beta_A+\gamma)-\gamma-\delta_A-\mu\right]A+\left[a(\beta_I+\gamma)-\gamma-\delta_I-\mu\right]I\\&+a(\mu+\nu+\gamma)+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+(\alpha+\delta_A+\mu)+\frac{1}{2}\sigma_2^2+(\delta_I+\mu)+\frac{1}{2}\sigma_3^2.\end{aligned}$$

令 $a=\min\left\{\frac{\gamma+\delta_A+\mu}{\beta_A+\gamma},\frac{\gamma+\delta_I+\mu}{\beta_I+\gamma}\right\}>0$，故

$$a(\beta_A+\gamma)-\gamma-\delta_A-\mu\le 0,\quad a(\beta_I+\gamma)-\gamma-\delta_I-\mu\le 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(S,A,I)\le&\mu+\gamma+a(\mu+\nu+\gamma)+(\alpha+\delta_A+\mu)+(\delta_I+\mu)\\&+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(S,A,I)\le&\mu+\gamma+a(\mu+\nu+\gamma)+(\alpha+\delta_A+\mu)+(\delta_I+\mu)\\&+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2+\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)\\&+\sigma_2(A-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(I-1)\mathrm{d}B_3(t)\\&=C++\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(A-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(I-1)\mathrm{d}B_3(t).\end{aligned}$$

其中 $C=\mu+\gamma+a(\mu+\nu+\gamma)+(\alpha+\delta_A+\mu)+(\delta_I+\mu)+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2$。因此对于任意的 $k\ge k_1$，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{T\wedge\tau_k}\mathrm{d}V=&\int_0^{T\wedge\tau_k}\mathcal{L}V(S,A,I)\mathrm{d}t+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_2(A-1)\mathrm{d}B_2(t)\\&+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_3(I-1)\mathrm{d}B_3(t)\\&\le C\int_0^{T\wedge\tau_k}\mathrm{d}t+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_2(A-1)\mathrm{d}B_2(t)\\&+\int_0^{T\wedge\tau_k}\sigma_3(I-1)\mathrm{d}B_3(t).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S(T\wedge\tau_k),A(T\wedge\tau_k),I(T\wedge\tau_k)\right]&\le V(S(0),A(0),I(0))+\mathbb{E}C\int_0^{T\wedge\tau_k}\mathrm{d}t\\&\le V(S(0),A(0),I(0))+CT.\end{aligned}$$

令 $\Omega_k=\{\tau_k\le T\}$，显然有 $\mathbb{P}\{\Omega_k\}\ge\varepsilon$，则 $\forall\omega\in\Omega_k$ 可知 $S(\tau_k,\omega),A(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega)$ 至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$。则

$$\begin{aligned}V(S(\tau_k,\omega),A(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega))&\ge\min\left\{k-1-a\ln\frac{k}{a},\frac{1}{k}-a+\ln ak,k-1-\ln k\right\}\\&:=g(k).\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
V\left(S(0),A(0),I(0)\right)+CT &\geq \mathbb{E}V\left(S(\tau_k,\omega),A(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega)\right)\\
&\geq \mathbb{E}\left[1_{\tau_k}(\delta)V\left(S(\tau_k,\omega),A(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega)\right)\right]\\
&\geq \varepsilon g(k).
\end{aligned}
$$

令 $k\to\infty$，可知 $\infty > V\left(S(0),A(0),I(0)\right)+CT=\infty$，显然矛盾。因此 $\tau_\infty=\infty$。

4. 平稳分布的存在性

这一节，首先确定了阈值参数 $\mathcal{R}_0^s$，其次证明了当参数 $\mathcal{R}_0^s>1$时，模型(1.3)在空间 $\mathbb{R}_+^3$ 中存在一个唯一的平稳分布 $\pi(\cdot)$。

引理 4.1. [23]

如果存在一个具有正则边界的有界开域 $U\in\mathbb{R}^l$，使得以下条件成立：

(i) 在定义域 U 及其邻域内，扩散矩阵 $D(x)$ 的最小特征值非零。

(ii) 对任意的 $x\in\mathbb{R}^l\setminus U$ 从 x 出发到达 U 的平均时间 τ 是有限的，且对每个紧子集 $K\subset\mathbb{R}^l$ 满足 $\sup_{x\in K}E^x\tau<\infty$。

那么马尔科夫过程 $X(t)$ 有唯一的平稳分布 $\pi(\cdot)$。

定理 4.1.

假设随机模型(1.3)中决定疾病是否灭绝的阈值为：

$$
\mathcal{R}_0^s:=\frac{\mu}{\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)}\left(\beta_A+\frac{\beta_I\alpha}{\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2}\right).
$$

则对于任意的初值 $\left(S(0),A(0),I(0)\right)\in\mathbb{R}_+^3$，当 $\mathcal{R}_0^s>1$时。疾病将持续存在，且模型(1.3)在 $\mathbb{R}_+^3$ 上存在一个唯一的平稳分布 $\pi(\cdot)$。

证明 要证明定理 4.1，则仅需要证明引理 4.1 的条件(i)和(ii)均成立即可。首先证明条件(i)。由模型(1.3)可知其扩散矩阵为

$$
D=\begin{bmatrix}\sigma_1^2S^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2^2A^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3^2I^2\end{bmatrix}.
$$

显然，矩阵 D 对于 $\mathbb{R}_+^3$ 中的任意紧子集都是正定的，因此条件(i)成立。

其次证明引理 4.1 的条件(ii)。定义

$$
V_1(S,A,I)=-\ln A(t)-a_1\ln I(t)-a_2\ln S(t)-a_3\ln S(t).
$$

其中 a_1,a_2,a_3 为待定正常数。根据 Itô 公式可得，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V_1(S,A,I)&=-\beta_AS-\beta_I\frac{SI}{A}-a_1\alpha\frac{A}{I}+\left(\alpha+\delta_A+\mu\right)+\frac{1}{2}\sigma_2^2+a_1\left(\delta_I+\mu\right)+a_1\frac{1}{2}\sigma_3^2\\
&\quad-\left(a_2+a_3\right)\left[\frac{\mu}{S}-\left(\beta_AA+\beta_II\right)-\left(\mu+\nu+\gamma\right)+\frac{\gamma(1-A-I)}{S}-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right]\\
&\leq-2\sqrt{a_2\mu\beta_A}-3\sqrt[3]{a_1a_3\beta_I\alpha\mu}+\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)+a_1\left(\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2\right)\\
&\quad+\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_AA+\beta_II\right)+\left(a_2+a_3\right)\left(\mu+\nu+\gamma+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right).
\end{aligned}\tag{4.1}
$$

令

$$a_1=\frac{\beta_I\alpha\mu}{\left(\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2\right)^2\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)},$$

$$a_2=\frac{\beta_A\mu}{\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)^2},$$

$$a_3=\frac{\beta_I\alpha\mu}{\left(\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)^2},$$

将 a_1,a_2,a_3 代入到(4.1)得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_1(S,A,I)\le&-\frac{\beta_A\mu}{\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2}-\frac{\beta_I\alpha\mu}{\left(\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)}+\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\\&+(a_2+a_3)(\beta_AA+\beta_II)\\=&-\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+(a_2+a_3)(\beta_AA+\beta_II).\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中

$$\mathcal{R}_0^s=\frac{\mu}{\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)}\left(\beta_A+\frac{\beta_I\alpha}{\delta_I+\mu+\frac{1}{2}\sigma_3^2}\right).$$

接下来，定义 $V_2(S,A,I)=V_1(S,A,I)+\frac{\beta_A(a_2+a_3)I}{\mu+\delta_I}$，根据(4.2)式，得到

$$\mathcal{L}V_2(S,A,I)\le-\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+(a_2+a_3)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A.\tag{4.3}$$

再定义 $V_3(S,I)=-\ln S-\ln I$，$V_4(S,A,I)=\frac{1}{\theta+1}(S+E+I)^{\theta+1}$ 其中 θ 充分小且 $0<\theta<\frac{2\mu}{\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2}$。根据 Itô 公式得到

$$\mathcal{L}V_3(S,I)=-\frac{\mu}{S}+(\beta_AA+\beta_II)-\frac{\gamma(1-A-I)}{S}-\alpha\frac{A}{I}+(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\tag{4.4}$$

且

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_4(S,A,I)=&(S+A+I)^\theta\left[\mu-(\mu+\nu+\gamma)S-\gamma(1-A-I)-(\delta_A+\mu)A-(\delta_I+\mu)I\right]\\&+\frac{\theta}{2}(S+A+I)^{\theta-1}\left[\sigma_1^2S^2+\sigma_2^2A^2+\sigma_3^2I^2\right]\\\le&(S+A+I)^\theta\mu-\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right](S+A+I)^{\theta+1}\\\le&L-\frac{1}{2}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right](S+A+I)^{\theta+1}\\\le&L-\frac{1}{2}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right),\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $L=\sup_{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{(S+A+I)^\theta\mu-\frac{1}{2}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right](S+A+I)^{\theta+1}\right\}<\infty.$

考虑 $\mathbb{C}^2$-函数 $\overline{V}:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}$，$\overline{V}(S,A,I)=kV_2(S,A,I)+V_3(S,I)+V_4(S,A,I)$，其中 k 是充分大的一个正常数且满足

$$-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+C\le -2. \tag{4.6}$$

其中

$$\begin{aligned}C=\sup_{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3}&\left\{-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)+\beta_AA+\beta_II+L\right.\\&\left.+(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\right\}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

此外，由于 $\overline{V}(S,A,I)$ 在 $\mathbb{R}_+^3$ 上是连续的，且当 (S,A,I) 趋于 0 或 $+\infty$ 时，均有 $\overline{V}(S,A,I)=+\infty$。因此 $\overline{V}(S,A,I)$ 在 $\mathbb{R}_+^4$ 内部可以取到最小值，设最小值点为 $\left(S^*,A^*,I^*\right)$。

定义 $\mathbb{C}^2$-函数 $V:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}^+$，$V(S,A,I)=\overline{V}(S,A,I)-\overline{V}\left(S^*,A^*,I^*\right)$。根据(4.3)，(4.4)和(4.5)，可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(S,A,I)\le&-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k(a_2+a_3)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A\\&-\frac{\mu}{S}+(\beta_AA+\beta_II)-\frac{\gamma(1-A-I)}{S}-\alpha\frac{A}{I}+(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\\&L-\frac{1}{2}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\\\le&-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k(a_2+a_3)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A\\&-\frac{\mu}{S}-\frac{\gamma(1-A-I)}{S}-\alpha\frac{A}{I}\\&-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\\&-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\\&+L+(\beta_AA+\beta_II)+(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

下面，证明引理 4.1 中的条件(ii)成立，首先定义一个有界开域

$$U_\varepsilon=\left\{\varepsilon<S<\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon<A<\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon^2<I<\frac{1}{\varepsilon^2}\right\},$$

其中 $0<\varepsilon<1$ 且充分小。在集合 $\mathbb{R}_+^3\setminus U_\varepsilon$ 中，在证明引理 4.1 中的条件(ii)成立时需选择充分小的 ε 使得以下各式成立：

$$-\frac{\mu}{\varepsilon}+D\le -1, \tag{4.9}$$

$$k(a_2+a_3)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)\varepsilon\le -1, \tag{4.10}$$

$$-\frac{\alpha}{\varepsilon}+D\le -1, \tag{4.11}$$

$$-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}}+D\le -1, \tag{4.12}$$

$$-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\frac{1}{\varepsilon^{2\theta+2}}+D\le -1, \tag{4.13}$$

其中

$$D=\sup_{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)+k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A\right.$$
$$\left.+L+\left(\beta_A A+\beta_I I\right)+\left(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\right\}.$$

下面将把 $\mathbb{R}_+^3\setminus U_\varepsilon$ 划分为 6 个区域：

$$U_1=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:S\le\varepsilon\right\},\qquad U_2=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:A\le\varepsilon\right\},$$
$$U_3=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:A>\varepsilon,I\le\varepsilon^2\right\},\quad U_4=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:S\ge\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$
$$U_5=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:A\ge\frac{1}{\varepsilon}\right\},\qquad U_6=\left\{(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3:S\ge\frac{1}{\varepsilon^2}\right\}.$$

则 $\mathbb{R}_+^3\setminus U_\varepsilon=U_1\cup U_2\cup U_3\cup U_4\cup U_5\cup U_6$。下面证明对任意 $(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3\setminus U_\varepsilon$ 有 $\mathcal{L}V(S,A,I)\le -1$ 成立，即证明在上述 6 个区域中，均有 $\mathcal{L}V(S,A,I)\le -1$ 成立。

(1) 对任意的 $(S,A,I)\in U_1$，根据(4.8)和(4.9)，有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(S,A,I)\le&-\frac{\mu}{S}-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A\\&-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\\&+L+\left(\beta_A A+\beta_I I\right)+\left(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\\\le&-\frac{\mu}{\varepsilon}+D\\\le&-1.\end{aligned}\tag{4.15}$$

(2) 对任意的 $(S,A,I)\in U_2$，根据(4.6)，(4.7)，(4.8)和(4.10)，有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(S,A,I)\le&-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A\\&-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\\&+L+\left(\beta_A A+\beta_I I\right)+\left(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\\\le&-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A+C\\\le&-1.\end{aligned}\tag{4.16}$$

(3) 对任意的$(S,A,I)\in U_3$，根据(4.8)和(4.11)，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V(S,A,I) \le & -\alpha\frac{A}{I}-k\left(\alpha+\delta_A+\mu+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\left(\mathcal{R}_0^s-1\right)+k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A \\
& -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)-\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& +L+\left(\beta_A A+\beta_I I\right)+\left(2\mu+\nu+\gamma+\delta_I\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right) \\
\le & -\frac{\alpha}{\varepsilon}+D \\
\le & -1.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

(4) 对任意的$(S,A,I)\in U_4$，根据(4.8)和(4.12)，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V(S,E,I,R) \le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& +k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A+L+\beta_A A+\beta_I I+2\mu+\nu+\gamma+\delta_I+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right) \\
\le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}}+D \\
\le & -1.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

(5) 对任意的$(S,A,I)\in U_5$，根据(4.8)和(4.12)，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V(S,A,I) \le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& +k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A+L+\beta_A A+\beta_I I+2\mu+\nu+\gamma+\delta_I+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right) \\
\le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}}+D \\
\le & -1.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

(6) 对任意的$(S,A,I)\in U_6$，根据(4.8)和(4.13)，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V(S,A,I) \le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\left(A^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \\
& +k\left(a_2+a_3\right)\left(\beta_A+\frac{\beta_I}{\mu+\delta_I}\right)A+L+\beta_A A+\beta_I I+2\mu+\nu+\gamma+\delta_I+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right) \\
\le & -\frac{1}{4}\left[\mu-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\vee\sigma_3^2\right)\right]\frac{1}{\varepsilon^{2\theta+2}}+D \\
\le & -1.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

因此，根据(4.15)~(4.20)，对充分小的ε使得当$(S,A,I)\in\mathbb{R}_+^3\setminus U_\varepsilon$时，均有

$$\mathcal{L}V(S,A,I)\le -1.$$

故引理4.1的条件(ii)成立。则由引理4.1得到，模型(1.3)在$\mathbb{R}_+^3$上存在唯一的平稳分布$\pi(\cdot)$。定理4.1证明完成。

5. 结论与展望

本文研究了一类综合无症状感染，有症状感染，以及接种疫苗的随机SAIRS传染病模型的平稳分布并证明了模型正解的存在唯一性。然后，利用构造Lyapunov函数的方法建立了参数$\mathcal{R}_0^s$，并且证明了当$\mathcal{R}_0^s>1$时，模型的解在$\mathbb{R}_+^3$上存在唯一一个的平稳分布。另外，由确定性模型(1.2)的基本再生数和随机模型(1.3)的阈值可知：$\mathcal{R}_0^s\le\mathcal{R}_0$，且当$\sigma_1\to 0\,(i=1,2,3)$，有$\mathcal{R}_0^s\to\mathcal{R}_0$。这意味着当白噪声的随机扰动较小时，随机模型在$\mathbb{R}_+^3$上存在唯一的一个平稳分布，这一结果也是对确定型SAIRS模型的一个扩展。

最后，本文的研究内容并不全面，仍有诸多问题亟待深入探讨，并具有广阔的应用前景。未来的研究可以从以下几个方面展开：一是考虑构建更复杂的模型，例如将年龄结构、空间扩散以及脉冲控制等因素纳入模型框架，从而更准确全面地预测疾病灭绝的可能性。二是探索非连续性随机扰动对疾病传播的影响，本文主要关注的是连续的白噪声对疾病传播的影响，然而现实世界中，许多随机因素表现出非连续性，例如电报噪声或Levy噪声。未来研究可以探索非连续性随机扰动对疾病动力学行为的影响，例如，研究Levy噪声的跳跃幅度和频率如何影响疾病的爆发规模和传播速度。此外，还可以探索将随机模型应用于特定传染病(如COVID-19、流感等)的传播预测，为公共卫生决策提供依据。

参考文献

[1] Robinson, M. and Stilianakis, N.I. (2013) A Model for the Emergence of Drug Resistance in the Presence of Asymptomatic Infections. *Mathematical Biosciences*, **243**, 163-177. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.03.003

[2] Ansumali, S., Kaushal, S., Kumar, A., Prakash, M.K. and Vidyasagar, M. (2020) Modelling a Pandemic with Asymptomatic Patients, Impact of Lockdown and Herd Immunity, with Applications to SARS-CoV-2. *Annual Reviews in Control*, **50**, 432-447. https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.10.003

[3] Ottaviano, S., Sensi, M. and Sottile, S. (2022) Global Stability of SAIRS Epidemic Models. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **65**, Article ID: 103501. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103501

[4] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6

[5] Lahrouz, A., Settati, A. and Akharif, A. (2016) Effects of Stochastic Perturbation on the SIS Epidemic System. *Journal of Mathematical Biology*, **74**, 469-498. https://doi.org/10.1007/s00285-016-1033-1

[6] Shi, X. and Cao, Y. (2020) Dynamics of a Stochastic Periodic SIRS Model with Time Delay. *International Journal of Biomathematics*, **13**, Article ID: 2050072. https://doi.org/10.1142/s1793524520500722

[7] Rajasekar, S.P., Pitchaimani, M. and Zhu, Q. (2020) Progressive Dynamics of a Stochastic Epidemic Model with Logistic Growth and Saturated Treatment. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **538**, Article ID: 122649. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122649

[8] Guo, X.X. and Sun, W. (2021) Periodic Solutions of Stochastic Differential Equations Driven by Lévy Noises. *Journal of Nonlinear Science*, **31**, Article No. 32.

[9] Yang, H., Wu, F. and Kloeden, P.E. (2022) Stationary Distribution of Stochastic Population Dynamics with Infinite Delay. *Journal of Differential Equations*, **340**, 205-226. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.08.035

[10] Mehdaoui, M., Alaoui, A.L. and Tilioua, M. (2022) Dynamical Analysis of a Stochastic Non-Autonomous SVIR Model with Multiple Stages of Vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 2177-2206. https://doi.org/10.1007/s12190-022-01828-6

[11] Zhao, Y. and Jiang, D. (2014) The Threshold of a Stochastic SIRS Epidemic Model with Saturated Incidence. *Applied Mathematics Letters*, **34**, 90-93. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.11.002

[12] Ji, C. and Jiang, D. (2014) Threshold Behaviour of a Stochastic SIR Model. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 5067-5079. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.037

[13] Cai, Y., Kang, Y., Banerjee, M. and Wang, W. (2015) A Stochastic SIRS Epidemic Model with Infectious Force under Intervention Strategies. *Journal of Differential Equations*, **259**, 7463-7502. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.08.024

[14] Xu, C. and Li, X. (2018) The Threshold of a Stochastic Delayed SIRS Epidemic Model with Temporary Immunity and Vaccination. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **111**, 227-234. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.12.027

[15] Cai, S., Cai, Y. and Mao, X. (2019) A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model with Two Independent Brownian Motions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **474**, 1536-1550. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.02.039

[16] Nguyen, D.T., Du, N.H. and Nguyen, S.L. (2024) Asymptotic Behavior for a Stochastic Behavioral Change SIR Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **538**, Article ID: 128361. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128361

[17] Zhao, Y., Zhang, L. and Yuan, S. (2018) The Effect of Media Coverage on Threshold Dynamics for a Stochastic SIS Epidemic Model. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*, **512**, 248-260. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.113

[18] Tan, Y., Cai, Y., Wang, X., Peng, Z., Wang, K., Yao, R., *et al.* (2023) Stochastic Dynamics of an SIS Epidemiological Model with Media Coverage. *Mathematics and Computers in Simulation*, **204**, 1-27. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.08.001

[19] Nguyen, D.H., Yin, G. and Zhu, C. (2020) Long-Term Analysis of a Stochastic SIRS Model with General Incidence Rates. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **80**, 814-838. https://doi.org/10.1137/19m1246973

[20] Du, N.H. and Nhu, N.N. (2020) Permanence and Extinction for the Stochastic SIR Epidemic Model. *Journal of Differential Equations*, **269**, 9619-9652. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.049

[21] Zhang, X. and Zhang, X. (2021) The Threshold of a Deterministic and a Stochastic SIQS Epidemic Model with Varying Total Population Size. *Applied Mathematical Modelling*, **91**, 749-767. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.050

[22] Mao, X. (2008) Stochastic Differential Equations and Applications. Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099402

[23] Khasminskii, R. (1980) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff & Noordhoff.