

# 一类具有疫苗接种的随机SVIR传染病模型的平稳分布

高延延

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年4月23日; 录用日期: 2025年6月12日; 发布日期: 2025年6月24日

## 摘 要

在人类与传染病的长期斗争中, 疫苗接种已被证实是最成功的防控手段之一。疫苗通过激活机体的特异性免疫反应, 能够形成针对特定病原体的防护机制。大量实际案例表明, 疫苗不仅能显著降低疾病传播风险, 更是最终根除某些传染病的重要途径。当前, 这一技术已成为传染病防治研究和实践的核心组成部分。因此, 本文研究了一类具有疫苗接种的随机SVIR传染病模型的平稳分布。首先, 通过构建合适的Lyapunov函数证明了模型正解的存在唯一性。然后, 建立了参数 $\mathfrak{R}_0^S$ , 证明了当 $\mathfrak{R}_0^S > 1$ 时, 模型的解在 $\mathbb{R}_+^4$ 上存在唯一的平稳分布。最后, 对本文主要研究内容进行了总结, 发现随机扰动会影响 $\mathfrak{R}_0^S$ , 并且 $\mathfrak{R}_0^S$ 小于等于确定型SVIR模型的基本再生数 $\mathfrak{R}_0^C$ 。

## 关键词

随机SVIR传染病模型, 解的存在唯一性, 平稳分布

# The Stationary Distribution of a Stochastic SVIR Infectious Disease Model with Vaccination

Yanyan Gao

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 23<sup>rd</sup>, 2025; accepted: Jun. 12<sup>th</sup>, 2025; published: Jun. 24<sup>th</sup>, 2025

## Abstract

Vaccination has been proven to be one of the most successful prevention and control measures in the long-term struggle between humans and infectious diseases. Vaccines can form protective mechanisms against specific pathogens by activating the body's specific immune response. Numerous

practical cases have shown that vaccines not only significantly reduce the risk of disease transmission, but are also an important way to ultimately eradicate certain infectious diseases. Currently, this technology has become a core component of research and practice in infectious disease prevention and control. Therefore, this paper investigates the stationary distribution of a stochastic SVIR epidemic model incorporating vaccination. Firstly, we prove the existence and uniqueness of the positive solution of the model by constructing Lyapunov function. Then, we establish the parameter  $\mathcal{R}_0^S$  and proven that when  $\mathcal{R}_0^S > 1$ , the solution of the model has a unique stationary distribution in  $\mathbb{R}_+^4$ . Finally, we summarize the main results of this article and found that  $\mathcal{R}_0^S$  is affected by stochastic perturbations. Othermore,  $\mathcal{R}_0^S$  is less than or equal to the basic reproduction number  $\mathcal{R}_0^C$  of the deterministic SVIR model.

## Keywords

Stochastic SVIR Infectious Disease Model, The Existence and Uniqueness of Solutions, Stationary Distribution

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

传染病一直是威胁人类生存与发展的重大隐患，2019 年的新冠肺炎疫情再次印证了这一点。在此背景下，深入研究传染病传播规律的理论价值显得尤为重要。国内外学者已构建了多种数学模型，用以分析传染病的动态传播特征。例如，Li 等[1]研究了一类具有非线性发生率的 SIRS 传染病模型，并在研究中心给出了模型的基本再生数。Khan 等[2]建立了一类具有饱和发生率的乙肝传染病模型，通过计算系统平衡点与基本再生数，深入分析了该模型的局部稳定性特征及后向分岔现象。Cai 等[3]提出了一类空间异质环境中具有水平和垂直传输的宿主 - 寄生虫模型并研究了模型的复杂动力学。Li 等[4]研究了一个具有周期性发病率和饱和状态的 SIR 模型治疗功能。

在人类抗击传染病的长期实践中，免疫预防已被证实是最具成效的防控策略之一。这一方法通过将疫苗注入健康人体内，刺激机体产生特异性免疫反应，形成针对特定病原体的保护机制。流行病学数据显示，免疫接种能显著降低传染病流行风险。如今，这一技术已成为传染病防治研究的重要基础。例如，Hu 等[5]提出了一类具有非线性发生率、垂直传播、疫苗接种和治疗能力的 SIR 传染病模型并定义了模型的基本再生数。Bai 等[6]提出了一类具有一般周期接种策略的 SEIRS 传染病模型，利用线性积分算子的谱半径定义了模型的基本再生数。Cai 等[7]提出了一种带有疫苗接种的流行病动力学模型，探讨了疫苗接种策略对疫苗疗效的影响。并发现该模型在疫苗接种水平下表现出后向分叉和双稳性。Liu 等人[8]提出了如下具有疫苗接种的 SVIR 传染病模型：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S, \\ \frac{dV(t)}{dt} = \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 V + \gamma I - \mu R, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $S(t)$ 、 $V(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$  分别表示易感个体, 疫苗接种个体, 感染个体和恢复个体的数量,  $\mu$  表示招募率和自然死亡率,  $\gamma$  表示感染者的恢复率,  $\gamma_1$  表示获得免疫力后接种者的恢复率,  $1/\gamma_1$  表示获得免疫力, 进入康复人群的平均时间。  $\beta$  表示易感者与感染者之间的传播率,  $\beta_1$  表示在获得免疫前, 接种者和感染者之间疾病的传播率, 由于接种个体在接种过程中可能具有部分免疫力或者接种者认识到疾病传播特征, 从而减少与感染者的接触率, 因此, 假设  $\beta_1 < \beta$  成立。

对于模型系统(1.1), Liu 等确定了模型的无病平衡  $E_0 = (S_0, V_0, 0) = \left( \frac{\mu}{\mu + \alpha}, \frac{\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma_1)}, 0 \right)$  和地方病平衡点  $E_+ = (S_+, V_+, I_+)$ , 其中  $S_+ = \frac{\mu}{\mu + \alpha + \beta I_+}$ ,  $V_+ = \frac{\alpha S_+}{\mu + \gamma_1 + \beta_1 I_+} = \frac{\alpha\mu}{(\mu + \alpha + \beta_1 I_+)(\mu + \gamma_1 + \beta_1 I_+)}$ ,  $I_+$  是  $g(I) = A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - \mathfrak{R}_0^C)$  的正根, 其中  $A_1 = (\mu + \gamma)\beta\beta_1 > 0$ ,  $A_2 = (\mu + \gamma)[(\mu + \gamma_1)\beta + (\mu + \alpha)\beta_1] - \beta\beta_1\mu$ ,  $A_3 = (\mu + \gamma)(\mu + \gamma_1)(\mu + \alpha) > 0$ , 并且 Liu 等建立了模型的基本再生数  $\mathfrak{R}_0^C = \frac{\beta\mu}{(\alpha + \mu)(\mu + \gamma)} + \frac{\beta_1\alpha\mu}{(\mu + \gamma_1)(\alpha + \mu)(\mu + \gamma)}$ 。并且证明了当  $\mathfrak{R}_0^C \leq 1$  时, 系统(1.1)的无病平衡点  $E_0$  是全局渐进稳定的; 当  $\mathfrak{R}_0^C > 1$  时, 模型(1.1)的地方病平衡点  $E_+$  是全局渐进稳定的。

现实世界中, 环境噪声等随机因素会显著影响传染病的传播率和死亡率等关键参数。基于此, 近年来学术界涌现了大量关于随机传染病模型的研究成果[9]-[13]。例如: Nguyen 等[14]提出了一类随机 SIRS 传染病模型。Settati 等[15]提出了一类具有一般发生率的随机 SIRS 模型。Mehdaoui 等[16]分析了一种新提出的随机非自治 SVIR 模型的动力学。Lin 和 Jiang 等[17]提出了一类具有季节变化和双线性发生率的随机 SIR 传染病模型。

基于确定性系统(1.1), 通过引入与系统状态变量线性相关的 Gauss 白噪声干扰, 可构造如下随机微分方程模型:

$$\begin{cases} dS(t) = [\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S]dt + \sigma_1 S dB_1(t), \\ dV(t) = [\alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V]dt + \sigma_2 V dB_2(t), \\ dI(t) = [\beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I]dt + \sigma_3 I dB_3(t), \\ dR(t) = [\gamma_1 V + \gamma I - \mu R]dt + \sigma_4 R dB_4(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $B_i(t) (i=1, 2, 3, 4)$  表示相互独立的标准布朗运动,  $\sigma_i^2(t) (i=1, 2, 3, 4)$  表示随机干扰的强度系数。

本文剩余结构安排如下: 第二部分介绍随机微分方程的基本理论与相关公式。第三部分论证模型(1.2)在空间  $\mathbb{R}_+^4$  上全局正解的存在唯一性。第四部分通过构造 Lyapunov 函数, 定义阈值参数  $\mathfrak{R}_0^S$ , 证明当满足  $\mathfrak{R}_0^S > 1$  时, 模型(1.2)在空间  $\mathbb{R}_+^4$  上存在唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ , 疾病持续存在。第五部分总结研究成果并探讨未来研究方向。

## 2. 预备知识

本文假设  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  是一个完备概率空间, 其中  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  满足通常条件(即右连续的, 且  $\mathcal{F}_0$  包含所有  $\mathbb{P}$ -零测集)。记  $m \wedge n = \min\{m, n\}$  和  $m \vee n = \max\{m, n\}$ 。

### 定义 1 [18]

设  $x(t) (t \geq 0)$  是 Itô 过程, 并且满足随机微分  $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t)$ , 其中  $f \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n \times m})$ 。令  $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , 则  $V(x, t)$  仍是 Itô 过程, 其随机微分具有如下形式

$$dV(x(t), t) = \mathcal{L}V(x, t)dt + V_x(x, t)g(t)dB(t) \text{ a.s.}$$

其中

$$\mathcal{L}V(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(t) + \frac{1}{2}\text{trace}\left[g^T(x, t)V_{xx}g(x, t)\right]$$

称上式为 Itô 公式。

### 3. 全局正解的存在唯一性

在本节，通过构造合适的 Lyapunov 函数论证模型(1.2)正解的存在唯一性。首先，定义空间  $\mathbb{R}_+^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ 。下面证明模型(1.2)的解在  $\mathbb{R}_+^4$  中的概率为 1。

**定理 3.1.**

对任意给定的初值  $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ ，系统(1.2)在  $t \geq 0$  上存在唯一解  $(S(t), V(t), I(t), R(t))$ ，且解  $(S(t), V(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4$  的概率为 1，即对任意  $t \geq 0$ ，有  $(S(t), V(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4$  a.s.。

**证明** 由于模型(1.2)的系数是局部 Lipschitz 连续的，则对任意初值  $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$  和  $t \in [0, \tau_e)$ ，模型(1.2)存在唯一的局部解，其中  $\tau_e$  表示爆破时间。要证解是全局的，只需证明  $\tau_e = \infty$  a.s.。

令  $k_0 > 1$ ，使得  $(S(0), V(0), I(0), R(0))$  在区间  $\left[\frac{1}{k_0}, k_0\right]$ 。对于任意的整数  $k > k_0$ ，定义停时：

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : S(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ 或 } V(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ 或 } I(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ 或 } R(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \right\},$$

在本文，令  $\inf \emptyset = \infty$ 。显然，当  $k \rightarrow \infty$  时， $\tau_e$  是单增的。记  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ ，则  $\tau_\infty < \tau_e$  a.s.。如果  $\tau_\infty = \infty$  a.s.，那么  $\tau_e = \infty$  a.s.。下面，利用反证法证明  $\tau_\infty = \infty$ 。设  $\tau_\infty \neq \infty$ ，则存在  $T > 0$  和任意的  $\varepsilon \in (0, 1)$  使得  $\mathbb{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$ 。

因此存在整数  $k_1 > k_0$ ，使得  $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$  时，有  $\mathbb{P}\{\Omega_k\} \geq \varepsilon$ ， $k > k_1$ 。

考虑  $\mathbb{C}^2$ -函数  $W: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$W(S, V, I, R) = S - a - a \ln \frac{S}{a} + V - 1 - \ln V + I - 1 - \ln I + R - 1 - \ln R,$$

其中  $a$  是待定常数。由  $k \geq k_0$  和  $T$  的任意性。根据 Itô 公式，得到

$$dW(S, V, I, R) = \mathcal{L}W(S, V, I, R)dt + \sigma_1(S - a)dB_1(t) + \sigma_2(V - 1)dB_2(t) + \sigma_3(I - 1)dB_3(t) + \sigma_4(R - 1)dB_4(t)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(S, V, I, R) &= \mu - \mu S - \frac{a\mu}{S} + \mu a - \beta a I - \alpha a + \frac{a}{2}\sigma_1^2 - \mu V - \frac{\alpha S}{V} + \beta_1 I + \gamma_1 + \mu \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \mu I - \beta S - \beta_1 V + \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 - \mu R - \frac{\gamma_1 V}{R} - \frac{\gamma I}{R} + \mu + \frac{1}{2}\sigma_4^2 \\ &\leq \mu - (\mu + \beta)S + (\beta_1 - \beta a - \mu)I - (\mu + \beta_1)V - \mu R \\ &\quad + \mu a + \frac{a}{2}\sigma_1^2 + (\gamma_1 + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + (\gamma + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_3^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_4^2 \\ &\leq \mu + (\beta_1 - \beta a - \mu)I + \mu a + \frac{a}{2}\sigma_1^2 + (\gamma_1 + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + (\gamma + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_3^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_4^2 \end{aligned}$$

令  $a > \frac{\beta_1 - \mu}{\beta} > 0$ ，故  $\beta_1 - \beta a - \mu \leq 0$ 。因此

$$\mathcal{L}W(S, V, I, R) \leq \mu + \mu a + \frac{a}{2}\sigma_1^2 + (\gamma_1 + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + (\gamma + \mu) + \frac{1}{2}\sigma_3^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_4^2,$$

$$\begin{aligned} dW(S, V, I, R) &\leq \mu + \mu a + \frac{a}{2} \sigma_1^2 + (\gamma_1 + \mu) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 + (\gamma + \mu) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 + \mu + \frac{1}{2} \sigma_4^2 \\ &\quad + \sigma_1(S - a)dB_1(t) + \sigma_2(V - 1)dB_2(t) + \sigma_3(I - 1)dB_3(t) + \sigma_4(R - 1)dB_4(t) \\ &= D + \sigma_1(S - a)dB_1(t) + \sigma_2(V - 1)dB_2(t) + \sigma_3(I - 1)dB_3(t) + \sigma_4(R - 1)dB_4(t) \end{aligned}$$

其中  $D = \mu + \mu a + \frac{a}{2} \sigma_1^2 + (\gamma_1 + \mu) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 + (\gamma + \mu) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 + \mu + \frac{1}{2} \sigma_4^2$ 。因此对于任意  $k \geq k_1$ ，有

$$\begin{aligned} \int_0^{T \wedge \tau_k} dW &= \int_0^{T \wedge \tau_k} \mathcal{L}W(S, V, I, R) dt + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_1(S - a)dB_1(t) + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_2(V - 1)dB_2(t) \\ &\quad + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_3(I - 1)dB_3(t) + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_4(R - 1)dB_4(t) \\ &\leq D \int_0^{T \wedge \tau_k} dt + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_1(S - a)dB_1(t) + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_2(V - 1)dB_2(t) \\ &\quad + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_3(I - 1)dB_3(t) + \int_0^{T \wedge \tau_k} \sigma_4(R - 1)dB_4(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(S(T \wedge \tau_k), V(T \wedge \tau_k), I(T \wedge \tau_k), R(T \wedge \tau_k))] &\leq W(S(0), V(0), I(0), R(0)) + \mathbb{E}D \int_0^{T \wedge \tau_k} dt \\ &\leq W(S(0), V(0), I(0), R(0)) + DT. \end{aligned}$$

令  $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$ ，显然有  $\mathbb{P}\{\Omega_k\} \geq \varepsilon$ ，则  $\forall \omega \in \Omega_k$  可知  $S(\tau_k, \omega)$ ， $V(\tau_k, \omega)$ ， $I(\tau_k, \omega)$ ， $R(\tau_k, \omega)$  至少存在一个等于  $k$  或  $\frac{1}{k}$ ，使得

$$W(S(\tau_k, \omega), V(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)) \geq \min \left\{ k - 1 - a \ln \frac{k}{a}, \frac{1}{k} - a + \ln a k, k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - \ln \frac{1}{a} \right\} := g(k).$$

因此

$$\begin{aligned} W(S(0), V(0), I(0), R(0)) + DT &\geq \mathbb{E}W(S(\tau_k, \omega), V(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)) \\ &\geq \mathbb{E}[1_{\tau_k}(\delta)W(S(\tau_k, \omega), V(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega))] \geq \varepsilon g(k). \end{aligned}$$

令  $k \rightarrow \infty$ ，可知  $\infty > W(S(0), V(0), I(0), R(0)) + DT = \infty$ ，得到矛盾。因此  $\tau_\infty = \infty$ 。

#### 4. 平稳分布的存在性

在这一部分，将定义决定疾病灭绝或持续存在的阈值参数为  $\mathfrak{R}_0^S$ ，证明当阈值  $\mathfrak{R}_0^S > 1$  时，模型(1.2)在空间  $\mathbb{R}_+^4$  中存在唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ ，即疾病持续存在。首先给出如下引理。

##### 引理 4.1. [16]

如果存在一个具有正则边界的有界开域  $\Delta \in \mathbb{R}^l$ ，使得以下条件成立：

(i) 在定义域  $\Delta$  及其邻域内，扩散矩阵  $A(x)$  的最小特征值非零。

(ii) 对任意的  $x \in \mathbb{R}^l \setminus \Delta$  从  $x$  出发到达  $U$  的平均时间  $\tau$  是有限的，且对每个紧子集  $K \subset \mathbb{R}^l$  满足

$$\sup_{x \in K} E^x \tau < \infty.$$

那么马尔科夫过程  $X(t)$  有唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ 。

##### 定理 4.1.

假设

$$\mathfrak{R}_0^S := \frac{\mu}{\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2\right) \left(\mu + \alpha + \frac{1}{2} \sigma_1^2\right)} \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma_1 + \mu + \frac{1}{2} \sigma_2^2} \right) > 1$$

则对于任意初值  $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ , 系统(1.2)在  $\mathbb{R}_+^4$  上存在一个唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ , 即疾病持续存在。

**证明** 证明定理 4.1, 仅需要证明引理 4.1 的条件(i)和(ii)均成立即可。首先, 证明条件(i)。由模型(1.2)得到其扩散矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 S^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 V^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 I^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 R^2 \end{bmatrix}.$$

显然, 矩阵  $M$  对于  $\mathbb{R}_+^4$  的任意紧子集都是正定的, 因此引理 4.1 的条件(i)成立。

下面, 将证明引理 4.1 的条件(ii)。定义

$$W_1(S, V, I) = -\ln I(t) - b_1 \ln V(t) - b_2 \ln S(t) - b_3 \ln R(t)$$

其中  $b_1, b_2, b_3$  为待定正常数。根据 Itô 公式, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W_1(S, V, I) &= -\beta S - \beta_1 V + \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 - \frac{\alpha S}{V} + b_1 \beta_1 I + b_1 \gamma_1 + b_1 \mu + \frac{b_1}{2}\sigma_2^2 \\ &\quad - (b_2 + b_3) \left[ \frac{\mu}{S} - \left( \mu + \beta I + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) \right] \\ &\leq -2\sqrt{b_2 \mu \beta} - 3\sqrt{b_1 b_3 \beta_1 \alpha \mu} + \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right) + b_1 \left( \gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) \\ &\quad + (b_2 + b_3) \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) + (b_2 + b_3) \beta I + b_1 \beta_1 I \end{aligned} \quad (4.1)$$

令

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\beta_1 \alpha \mu}{\left( \gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right)^2 \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right)}, \\ b_2 &= \frac{\beta \mu}{\left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right)^2}, \\ b_3 &= \frac{\beta_1 \alpha \mu}{\left( \gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right)^2}, \end{aligned}$$

接着, 将  $b_1, b_2, b_3$  代入到(4.1), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W_1(S, V, I) &\leq \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right) - \frac{\beta \mu}{\mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2} - \frac{\beta_1 \alpha \mu}{\left( \gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right)} + (b_2 + b_3) \beta I + b_1 \beta_1 I \\ &= - \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right) (\mathfrak{R}_0^S - 1) + (b_2 + b_3) \beta I + b_1 \beta_1 I \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{其中 } \mathfrak{R}_0^S = \frac{\mu}{\left( \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right) \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right)} \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2} \right).$$

接下来, 定义  $W_2(S, V, I) = W_1(S, V, I) + (b_2 + b_3) \frac{\beta}{\mu} I + \frac{b_1 \beta_1}{\gamma + \mu} I$ , 根据(4.2)式, 得到

$$\mathcal{L}W_2(S, E, I) \leq -\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)(\Re_0^s - 1) + (b_1 + b_2 + b_3) \left(\beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma_1 + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right) I \quad (4.3)$$

定义  $W_3(S, I, R) = -\ln S - \ln I - \ln R$ ,  $W_4(S, V, I, R) = \frac{1}{\theta + 1}(S + V + I + R)^{\theta + 1}$ , 其中  $\theta$  充分

且  $0 < \theta < \frac{2(\mu \wedge \alpha)}{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2} \text{Itô}$ 。根据公式, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_3(S, I, R) &= -\frac{1}{S}[\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S] - \frac{1}{I}[\beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I] \\ &\quad - \frac{1}{R}[\gamma_1 V + \gamma I - \mu R] + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\ &= -\frac{\mu}{S} + \beta I - \beta S - \beta_1 V - \frac{\gamma_1 V}{R} - \frac{\gamma I}{R} + \left[3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)\right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W_4(S, V, I, R) &= (S + V + I + R)^\theta [\mu - \mu S - \alpha S - \mu V - \mu I - \mu R] \\ &\quad + \frac{\theta}{2}(S + V + I + R)^{\theta-1} [\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 V^2 + \sigma_3^2 I^2 + \sigma_4^2 R^2] \\ &\leq (S + V + I + R)^\theta [\mu - (\mu \wedge \alpha)(S + V + I + R)] \\ &\quad + \frac{\theta}{2}(S + V + I + R)^{\theta+1} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \\ &\leq (S + V + I + R)^\theta \mu - \left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right] (S + V + I + R)^{\theta+1} \\ &\leq H - \frac{1}{2} \left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right] (S + V + I + R)^{\theta+1} \\ &\leq H - \frac{1}{2} \left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right] (S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中  $H = \sup_{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4} \left\{ (S + V + I + R)^\theta \mu - \frac{1}{2} \left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right] (S + V + I + R)^{\theta+1} \right\} < \infty$ 。

考虑  $\mathbb{C}^2$ -函数  $\tilde{W}: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{W}(S, V, I, R) = KW_2(S, V, I) + W_3(S, I, R) + W_4(S, V, I, R)$  其中  $K$  是足够大的一个正常数且满足

$$-K \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2 \right) (\Re_0^s - 1) + C \leq -2 \quad (4.6)$$

其中

$$\begin{aligned} C = \sup_{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4} &\left\{ -\frac{1}{4} \left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) + \beta I + \beta_1 I + H \right. \\ &\left. + \left[3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

此外, 由于  $\tilde{W}(S, V, I, R)$  在  $\mathbb{R}_+^4$  上连续性, 并且当  $(S, V, I, R) \rightarrow 0$  或  $(S, V, I, R) \rightarrow +\infty$  时, 均可得  $\tilde{W}(S, V, I, R) = +\infty$ 。因此  $\tilde{W}(S, V, I, R)$  在  $\mathbb{R}_+^4$  内部可以取到最小值, 设最小值点为  $(S_*, V_*, I_*, R_*)$ 。

定义  $\mathbb{C}^2$ -函数  $V: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $W(S, V, I, R) = \tilde{W}(S, V, I, R) - \tilde{W}(S_*, V_*, I_*, R_*)$ 。根据(4.3), (4.4)和(4.5), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(S, V, I, R) &\leq -K\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)(\Re_0^S - 1) + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I \\ &\quad - \frac{\mu}{S} + \beta I - \beta S - \beta_1 V - \frac{\gamma_1 V}{R} - \frac{\gamma I}{R} + \left[3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)\right] \\ &\quad + H - \frac{1}{2}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\leq -K\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)(\Re_0^S - 1) + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I \\ &\quad + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) - \frac{\mu}{S} - \frac{\gamma_1 V}{R} - \frac{\gamma I}{R} \\ &\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

下面, 证明引理 4.1 中的条件(ii)成立, 首先, 定义有界开域

$$\Delta_\varepsilon = \left\{ \varepsilon < S < \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon < I < \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon^2 < V < \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon^2 < R < \frac{1}{\varepsilon^2} \right\},$$

其中  $0 < \varepsilon < 1$  且足够小。在集合  $\mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta_\varepsilon$  中, 为验证引理 4.1 中的条件(ii), 因此, 选择足够小的  $\varepsilon$  使得

$$-\frac{\mu}{\varepsilon} + M \leq -\frac{1}{2}, \quad (4.9)$$

$$K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)\varepsilon \leq -\frac{1}{2}, \quad (4.10)$$

$$-\frac{\gamma_1}{\varepsilon} + M \leq -\frac{1}{2}, \quad (4.11)$$

$$-\frac{\gamma}{\varepsilon} + M \leq -1, \quad (4.12)$$

$$-\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}} + M \leq -\frac{1}{2}, \quad (4.13)$$

$$-\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right]\frac{1}{\varepsilon^{2\theta+2}} + M \leq -\frac{1}{2}, \quad (4.14)$$

其中



$$M = \sup_{(S,V,I,R) \in \mathbb{R}_+^4} \left\{ -\frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \right. \\ \left. + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \right\}.$$

将  $\mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta_\varepsilon$  划分成以下 8 个区域,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : S \leq \varepsilon\}, & \Delta_2 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : I \leq \varepsilon\}, \\ \Delta_3 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : I > \varepsilon, V \leq \varepsilon^2\}, & \Delta_4 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : I > \varepsilon, R \leq \varepsilon^2\}, \\ \Delta_5 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : S \geq \frac{1}{\varepsilon}\}, & \Delta_6 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : I \geq \frac{1}{\varepsilon}\}, \\ \Delta_7 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : V \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\}, & \Delta_8 &= \{(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : R \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\}, \end{aligned}$$

则  $\mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta_\varepsilon = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5 \cup \Delta_6 \cup \Delta_7 \cup \Delta_8$ 。下面证明对任意  $(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta_\varepsilon$  有  $\mathcal{LW}(S, V, I, R) \leq -1$  成立, 这表明只需证明在这 8 个区域中, 均有  $\mathcal{LW}(S, V, I, R) \leq -1$  成立。

(1) 对任意  $(S, V, I, R) \in \Delta_1$ , 根据(4.8)和(4.9), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{\mu}{S} - K \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2 \right) (\mathfrak{R}_0^S - 1) + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) I \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\ &\leq -\frac{\mu}{\varepsilon} + M \leq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

(2) 对任意  $(S, V, I, R) \in \Delta_2$ , 根据(4.6), (4.7), (4.8)和(4.10), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -K \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2 \right) (\mathfrak{R}_0^S - 1) + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) I + \beta I + H + 3\mu \\ &\quad + \alpha + \gamma - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\ &\leq -K \left( \gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2 \right) (\mathfrak{R}_0^S - 1) + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) \varepsilon + C \leq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

(3) 对任意的  $(S, V, I, R) \in \Delta_3$ , 根据(4.8)和(4.11), 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{\gamma I}{R} - K\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)\left(\mathfrak{R}_0^S - 1\right) + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} \\
&\leq -\frac{\gamma}{\varepsilon} + M \leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4) 对任意  $(S, V, I, R) \in \Delta_4$ , 根据(4.8)和(4.12), 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{\gamma_1 V}{R} - K\left(\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)\left(\mathfrak{R}_0^S - 1\right) + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) + \beta I + H + 3\mu \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} + \alpha + \gamma \\
&\leq -\frac{\gamma_1}{\varepsilon} + M \leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

(5) 对任意的  $(S, V, I, R) \in \Delta_5$ , 根据(4.8)和(4.13), 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\
&\leq -\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}} + M \leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

(6) 对任意的  $(S, V, I, R) \in \Delta_6$ , 根据(4.8)和(4.13), 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right](V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\
&\quad + K(b_1 + b_2 + b_3)\left(\beta + \frac{\beta_1\alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2}\sigma_3^2}\right)I + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\
&\leq -\frac{1}{4}\left[(\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2}(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2)\right]\frac{1}{\varepsilon^{\theta+1}} + M \leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

(7) 对任意的  $(S, V, I, R) \in \Delta_7$ , 根据(4.8)和(4.14), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) + \beta I + H \\ &\quad + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) I \\ &\leq -\frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] \frac{1}{\varepsilon^{2\theta+2}} + M \leq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

(8) 对任意的  $(S, V, I, R) \in \Delta_8$ , 根据(4.8)和(4.14), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{LW}(S, V, I, R) &\leq -\frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (S^{\theta+1} + V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] (V^{\theta+1} + I^{\theta+1} + R^{\theta+1}) \\ &\quad + K(b_1 + b_2 + b_3) \left( \beta + \frac{\beta_1 \alpha}{\gamma + \mu + \frac{1}{2} \sigma_3^2} \right) I + \beta I + H + 3\mu + \alpha + \gamma + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \\ &\leq -\frac{1}{4} \left[ (\mu \wedge \alpha) - \frac{\theta}{2} (\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2 \vee \sigma_3^2 \vee \sigma_4^2) \right] \frac{1}{\varepsilon^{2\theta+2}} + M \leq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

因此, 根据(4.15)~(4.22), 对足够小的  $\varepsilon$  使得当  $(S, V, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta_\varepsilon$  时, 均有

$$\mathcal{LW}(S, V, I, R) \leq -1.$$

所以, 引理 4.1 的条件(ii)成立. 根据引理 4.1, 系统(1.2)在  $\mathbb{R}_+^4$  上存在唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ 。

## 5. 结论与展望

本文研究了一类具有疫苗接种的随机 SVIR 传染病模型的平稳分布。首先, 对于任意给定的初值, 证明系统正解的存在唯一性。其次, 证明了当  $\mathfrak{R}_0^s > 1$  时, 模型的解在  $\mathbb{R}_+^4$  上存在唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ 。最后, 将确定性模型的  $\mathfrak{R}_0^c$  和随机性模型的  $\mathfrak{R}_0^s$  进行对比, 能够发现  $\mathfrak{R}_0^s < \mathfrak{R}_0^c$ , 且当  $\sigma_i \rightarrow 0 (i=1, 2, 3, 4)$  时,  $\mathfrak{R}_0^s \rightarrow \mathfrak{R}_0^c$ , 即表明当随机扰动较小时, 随机 SVIR 模型在  $\mathbb{R}_+^4$  上存在唯一的平稳分布  $\pi(\cdot)$ , 这一研究成果进一步拓展了 Liu 等[8]在确定型 SVIR 模型中的相关结论。最后, 本文研究重点探讨了受白噪声干扰的具有疫苗接种的随机 SVIR 传染病动力学模型。此外, 我们还可以考虑脉冲扰动对系统的影响。

## 参考文献

- [1] Li, T., Zhang, F., Liu, H. and Chen, Y. (2017) Threshold Dynamics of an SIRS Model with Nonlinear Incidence Rate and Transfer from Infectious to Susceptible. *Applied Mathematics Letters*, **70**, 52-57. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.03.005>
- [2] Khan, T., Ullah, Z., Ali, N. and Zaman, G. (2019) Modeling and Control of the Hepatitis B Virus Spreading Using an Epidemic Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **124**, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.033>
- [3] Cai, Y., Kang, Y., Banerjee, M. and Wang, W. (2018) Complex Dynamics of a Host-Parasite Model with Both Horizontal and Vertical Transmissions in a Spatial Heterogeneous Environment. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **40**, 444-465. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.10.001>

- [4] Li, L., Bai, Y. and Jin, Z. (2014) Periodic Solutions of an Epidemic Model with Saturated Treatment. *Nonlinear Dynamics*, **76**, 1099-1108. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-1193-0>
- [5] Hu, Z., Ma, W. and Ruan, S. (2012) Analysis of SIR Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rate and Treatment. *Mathematical Biosciences*, **238**, 12-20. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.03.010>
- [6] Bai, Z. and Zhou, Y. (2012) Global Dynamics of an SEIRS Epidemic Model with Periodic Vaccination and Seasonal Contact Rate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 1060-1068. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.008>
- [7] Cai, L., Li, Z. and Song, X. (2018) Global Analysis of an Epidemic Model with Vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **57**, 605-628. <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1124-1>
- [8] Liu, X., Takeuchi, Y. and Iwami, S. (2008) SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies. *Journal of Theoretical Biology*, **253**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.10.014>
- [9] Dieu, N.T., Nguyen, D.H., Du, N.H. and Yin, G. (2016) Classification of Asymptotic Behavior in a Stochastic SIR Model. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **15**, 1062-1084. <https://doi.org/10.1137/15m1043315>
- [10] Cai, S., Cai, Y. and Mao, X. (2019) A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model with Two Correlated Brownian Motions. *Nonlinear Dynamics*, **97**, 2175-2187. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05114-2>
- [11] Cao, Z., Feng, W., Wen, X., Zu, L. and Gao, J. (2020) Nontrivial Periodic Solution of a Stochastic Seasonal Rabies Epidemic Model. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **545**, Article 123361. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123361>
- [12] Du, N.H. and Nhu, N.N. (2020) Permanence and Extinction for the Stochastic SIR Epidemic Model. *Journal of Differential Equations*, **269**, 9619-9652. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.049>
- [13] Shi, X., Cao, Y. and Zhou, X. (2020) Dynamics for a Stochastic Delayed SIRS Epidemic Model. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **25**, 705-725. <https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.17804>
- [14] Nguyen, D.H., Yin, G. and Zhu, C. (2020) Long-Term Analysis of a Stochastic SIRS Model with General Incidence Rates. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **80**, 814-838. <https://doi.org/10.1137/19m1246973>
- [15] Settati, A., Lahrouz, A., Zahri, M., Tridane, A., El Fatini, M., El Mahjour, H., *et al.* (2021) A Stochastic Threshold to Predict Extinction and Persistence of an Epidemic SIRS System with a General Incidence Rate. *Chaos, Solitons & Fractals*, **144**, Article 110690. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110690>
- [16] Mehdaoui, M., Alaoui, A.L. and Tilioua, M. (2023) Dynamical Analysis of a Stochastic Non-Autonomous SVIR Model with Multiple Stages of Vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 2177-2206. <https://doi.org/10.1007/s12190-022-01828-6>
- [17] Lin, Y., Jiang, D. and Liu, T. (2015) Nontrivial Periodic Solution of a Stochastic Epidemic Model with Seasonal Variation. *Applied Mathematics Letters*, **45**, 103-107. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.01.021>
- [18] Mao, X. (2008) Stochastic Differential Equations and Applications. Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099402>