Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(5), 85-89
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.155156

欧氏空间子流形的一个微分球面定理

常小芳

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2025年4月24日；录用日期：2025年5月7日；发布日期：2025年5月20日

摘　要

球面定理是整体微分几何领域的重要问题。设M为欧氏空间中的紧致子流形，如果M的里奇曲率与平均曲率满足特定的拼挤条件，本文推导出子流形M的曲率张量满足里奇流收敛定理的条件，于是M的度量在正规化里奇流下会收敛到一个常曲率度量。由此可得M微分同胚于球面空间形式。如果M还是单连通的，则M微分同胚于标准球面。

关键词

子流形，微分球面定理，里奇曲率，里奇流

A Differentiable Sphere Theorem for Submanifolds in Euclidean Space

Xiaofang Chang

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Apr. 24th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 20th, 2025

Abstract

Sphere theorems are important problems in global Differential geometry. Let M be a compact submanifold in Euclidean space. If the Ricci curvature and mean curvature of M satisfy a certain pinching condition, it can be deduced that the curvature tensor of submanifold M satisfies the condition of the convergence theorem of Ricci flow. Thus, the metric of M will converge to a metric of constant curvature. Hence M is diffeomorphic to a spherical space form. In addition, if M is simply connected, then M is diffeomorphic to the standard sphere.

Keywords

Submanifold, Differentiable Sphere Theorem, Ricci Curvature, Ricci Flow

文章引用: 常小芳. 欧氏空间子流形的一个微分球面定理[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 85-89.
DOI: 10.12677/pm.2025.155156

1. 引言

研究流形上的曲率与拓扑是整体微分几何的核心课题之一。1982 年，R. Hamilton [1]引入了里奇流这一重要工具，证明了具有正里奇曲率的 3 维紧致黎曼流形微分同胚于球面空间形式。利用里奇流，S. Brendle 和 R. Schoen [2] [3]证明了著名的 1/4 微分球面定理。

2009 年，H. W. Xu 和 E. T. Zhao [4]首次运用里奇流的收敛性[5]及稳定流的不存在性证明了球面中子流形的微分球面定理。H. W. Xu 和 L. Tian [6]证明了里奇曲率条件下子流形的一个微分球面定理。在文献[7]中，Xu-Gu 证明了子流形在里奇曲率条件下的拓扑球面定理和微分球面定理。

本文研究了欧氏空间中子流形的微分球面定理，证明了

主要定理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+p}$ 中的 $n(\geq 4)$ 维紧致子流形。如果 M 的里奇曲率满足

$$Ric_M > \frac{n(3n^2-15n+20)}{3n^2-12n+16}H^2,$$

那么 M 的度量在正规化里奇流的演化下会收敛到一个常曲率度量。所以 M 微分同胚于球面空间形式。如果 M 还是单连通的，则 M 微分同胚于标准球面。

2. 预备知识和符号

设 M 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+p}$ 中的 n 维黎曼子流形。记 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 分别为 $\mathbb{R}^{n+p}$ 和 M 上的 Levi-Civita 联络。子流形 M 的第二基本形式 h 定义为

$$h(X,Y)=\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y.$$

设 $\{e_i\}$ 是切丛 TM 上的局部单位正交标架场。令 $h_{ij}=h(e_i,e_j)$。平均曲率向量的定义为 $\vec{H}=\frac{1}{n}\operatorname{tr}h=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}$。平均曲率为 $H=|\vec{H}|$。

设 R 为 M 的曲率张量。我们有下述高斯方程：

$$R_{ijkl}=\langle h_{ik},h_{jl}\rangle-\langle h_{il},h_{jk}\rangle. \quad (2.1)$$

记 UM 为 M 的单位切丛，设 $u\in U_xM$ 是 M 上点 x 处的单位切向量，记 $Ric(u)$ 为 M 的 u 方向的里奇曲率，则

$$Ric(u)=\sum_j R(u,e_j,u,e_j). \quad (2.2)$$

由高斯方程可得

$$Ric(e_i)=n\langle \vec{H},h_{ii}\rangle-\sum_j |h_{ij}|^2. \quad (2.3)$$

记 $\mathring{h}=h-\xi\otimes g$ 为无迹第二基本形式，则有 $\mathring{h}_{ii}=h_{ii}-\vec{H}$，以及当 $i\neq j$ 时有 $\mathring{h}_{ij}=h_{ij}$。从而 $\sum_{i=1}^{n}\mathring{h}_{ii}=0$。

然后(2.3)式可化为

$$Ric(e_i)=(n-1)H^2+(n-2)\langle \vec{H},\mathring{h}_{ii}\rangle-\sum_j |\mathring{h}_{ij}|^2. \quad (2.4)$$

令 $Ric_{\min} = \min_{u \in U_x M} Ric(u)$。由上式可得

$$Ric_{\min} \le (n-1)H^2 + (n-2)\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{ii} \right\rangle - \sum_j \left|\mathring{h}_{ij}\right|^2. \tag{2.5}$$

根据高斯方程，当 $i \ne j$ 时，M 在 $e_i \wedge e_j$ 上的截面曲率为

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= \left\langle h_{ii}, h_{jj} \right\rangle - \left|h_{ij}\right|^2 \\ &= H^2 + \left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{ii} + \mathring{h}_{jj} \right\rangle + \left\langle \mathring{h}_{ii}, \mathring{h}_{jj} \right\rangle - \left|\mathring{h}_{ij}\right|^2 \\ &\ge H^2 + \left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{ii} + \mathring{h}_{jj} \right\rangle - \left|\mathring{h}_{ii}\right|\left|\mathring{h}_{jj}\right| - \left|\mathring{h}_{ij}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

然后，我们有

$$\begin{aligned} \left|R_{1234}\right| &= \left|\left\langle \mathring{h}_{13}, \mathring{h}_{24} \right\rangle - \left\langle \mathring{h}_{14}, \mathring{h}_{23} \right\rangle\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left(\left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们需要下述里奇流的收敛定理。

定理 2 [7] 设 (M, g_0) 为 $n(\ge 4)$ 维的紧致黎曼流形。如果

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + R_{2323} + \lambda^2 R_{2424} - 2\lambda R_{1234} > 0$$

对所有的正交 4 标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 和所有的 $\lambda \in [-1, 1]$ 都成立。那么以 g_0 为初值的正规化里奇流的解一直存在并且当 $t \to \infty$ 时收敛到一个常曲率度量。

3. 主要结果的证明

我们先证明关于 M 的曲率张量 R 的几个不等式。

由(2.6)式与(2.7)式可得

$$\begin{aligned} & R_{1313} + R_{2323} - \left|R_{1234}\right| \\ & \ge H^2 + \left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{11} + \mathring{h}_{33} \right\rangle - \left|\mathring{h}_{11}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right| - \left|\mathring{h}_{13}\right|^2 \\ & \quad + H^2 + \left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{22} + \mathring{h}_{33} \right\rangle - \left|\mathring{h}_{22}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right| - \left|\mathring{h}_{23}\right|^2 \\ & \quad - \frac{1}{2}\left(\left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2\right) \\ & = 2H^2 + \left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{11} + \mathring{h}_{22} + 2\mathring{h}_{33} \right\rangle \\ & \quad - \left|\mathring{h}_{11}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right| - \left|\mathring{h}_{22}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right| - \frac{3}{2}\left|\mathring{h}_{13}\right|^2 - \frac{3}{2}\left|\mathring{h}_{23}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\mathring{h}_{14}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\mathring{h}_{24}\right|^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

由(2.5)式可得

$$\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{ii} \right\rangle \ge \frac{1}{n-2}\left[Ric_{\min} - (n-1)H^2 + \sum_j \left|\mathring{h}_{ij}\right|^2\right].$$

令

$$T = Ric_{\min} - (n-1)H^2.$$

然后，我们有

$$\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{11} \right\rangle \ge \frac{1}{n-2}\left(T + \left|\mathring{h}_{11}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2\right),$$

$$\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{22} \right\rangle \geq \frac{1}{n-2}\left(T + \left|\mathring{h}_{22}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right),$$

$$\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{33} \right\rangle \geq \frac{1}{n-2}\left(T + \left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{33}\right|^2\right),$$

及

$$\sum_{i=4}^{n}\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{ii} \right\rangle \geq \frac{1}{n-2}\left[(n-3)T + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right].$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \vec{H}, \mathring{h}_{11} + \mathring{h}_{22} + 2\mathring{h}_{33} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{H}, \left(\frac{3n}{4}-2\right)\left(\mathring{h}_{11}+\mathring{h}_{22}\right) + \left(\frac{3n}{4}-1\right)\mathring{h}_{33} + \left(\frac{3n}{4}-3\right)\sum_{i=4}^{n}\mathring{h}_{ii} \right\rangle \\
&\geq \frac{1}{n-2}\cdot \\
&\left[\left(\frac{3n}{4}-2\right)\left(T + \left|\mathring{h}_{11}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2\right) + \left(\frac{3n}{4}-2\right)\left(T + \left|\mathring{h}_{22}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{3n}{4}-1\right)\left(T + \left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{33}\right|^2\right) + \frac{3}{4}(n-4)\left((n-3)T + \left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{n-2}\times\left[\left(\frac{3n^2}{4}-3n+4\right)T + \left(\frac{3n}{4}-2\right)\left(\left|\mathring{h}_{11}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{22}\right|^2\right) + \left(\frac{3n}{4}-1\right)\left|\mathring{h}_{33}\right|^2\right. \\
&\left. + \frac{3(n-2)}{2}\left(\left|\mathring{h}_{13}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{23}\right|^2\right) + \frac{1}{2}(3n-10)\left(\left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

结合(3.1)式与(3.2)式，我们得到

$$\begin{aligned}
&R_{1313} + R_{2323} - \left|R_{1234}\right| \\
&\geq 2H^2 + \frac{3n^2-12n+16}{4(n-2)}T + \frac{3n-8}{4(n-2)}\left(\left|\mathring{h}_{11}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{22}\right|^2\right) \\
&+ \frac{3n-4}{4(n-2)}\left|\mathring{h}_{33}\right|^2 + \frac{n-4}{n-2}\left(\left|\mathring{h}_{14}\right|^2 + \left|\mathring{h}_{24}\right|^2\right) \\
&- \left|\mathring{h}_{11}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right| - \left|\mathring{h}_{22}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right|.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

因为

$$\begin{aligned}
\frac{3n-8}{4(n-2)}\left|\mathring{h}_{11}\right|^2 + \frac{3n-4}{8(n-2)}\left|\mathring{h}_{33}\right|^2 \geq \left|\mathring{h}_{11}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right|, \\
\frac{3n-8}{4(n-2)}\left|\mathring{h}_{22}\right|^2 + \frac{3n-4}{8(n-2)}\left|\mathring{h}_{33}\right|^2 \geq \left|\mathring{h}_{22}\right|\left|\mathring{h}_{33}\right|.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

将(3.2)、(3.3)与(3.4)式代入(3.1)式可得

$$\begin{aligned}
&R_{1313} + R_{2323} - \left|R_{1234}\right| \\
&\geq 2H^2 + \frac{3n^2-12n+16}{4(n-2)}\left[Ric_{\min} - (n-1)H^2\right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

现在我们完成主要定理的证明。

主要定理的证明 由定理的条件可得

$$\begin{aligned}&Ric_{\min}-(n-1)H^2\\&>\frac{n(3n^2-15n+20)}{3n^2-12n+16}H^2-(n-1)H^2\\&=-\frac{8(n-2)}{3n^2-12n+16}H^2.\end{aligned}\tag{3.6}$$

结合(3.5)与(3.6)式，得到

$$R_{1313}+R_{2323}-|R_{1234}|>0.$$

同理可得

$$R_{1414}+R_{2424}-|R_{1234}|>0.$$

然后，我们有

$$\begin{aligned}&R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2R_{2424}-2\lambda R_{1234}\\&\geq\left(R_{1313}+R_{2323}-|R_{1234}|\right)+\lambda^2\left(R_{1414}+R_{2424}-|R_{1234}|\right)>0.\end{aligned}$$

根据定理 2，M 的度量在正规化里奇流的演化下会收敛到一个常曲率度量。所以 M 微分同胚于一个球面空间形式。如果 M 还是单连通的，那么 M 微分同胚于标准球面。

证毕。

由此我们将文献[6]中的相关结论，以及相关的条件进一步进行了扩充，使在此条件下的子流形 M 是微分同胚于球面空间形式，并且同时我们也完成了证明。

参考文献

[1] Hamilton, R.S. (1982) Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **17**, 255-306. https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922

[2] Brendle, S. and Schoen, R. (2008) Manifolds with 1/4-Pinched Curvature Are Space Forms. *Journal of the American Mathematical Society*, **22**, 287-307. https://doi.org/10.1090/s0894-0347-08-00613-9

[3] Brendle, S. and Schoen, R.M. (2008) Classification of Manifolds with Weakly 1/4-Pinched Curvatures. *Acta Mathematica*, **200**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s11511-008-0022-7

[4] Xu, H. and Zhao, E. (2009) Topological and Differentiable Sphere Theorems for Complete Submanifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, **17**, 565-585. https://doi.org/10.4310/cag.2009.v17.n3.a6

[5] Brendle, S. (2008) A General Convergence Result for the Ricci Flow in Higher Dimensions. *Duke Mathematical Journal*, **145**, 585-601. https://doi.org/10.1215/00127094-2008-059

[6] Xu, H. and Tian, L. (2011) A Differentiable Sphere Theorem Inspired by Rigidity of Minimal Submanifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, **254**, 499-510. https://doi.org/10.2140/pjm.2011.254.499

[7] Xu, H. and Gu, J. (2013) Geometric, Topological and Differentiable Rigidity of Submanifolds in Space Forms. *Geometric and Functional Analysis*, **23**, 1684-1703. https://doi.org/10.1007/s00039-013-0231-x