Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(6), 9-16
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.156184

时间分数阶BBM-Burger方程的新精确解

冯　源，吴克晴[*]，刘　洋

江西理工大学理学院，江西　赣州

收稿日期：2025年4月27日；录用日期：2025年5月27日；发布日期：2025年6月16日

摘　要

基于保形分数阶微积分的定义及性质，通过分数阶行波变换，将分数阶BBM-Burger方程简化为一个非线性常微分方程。然后利用三次多项式的完全判别系统法得到了该方程的三角函数解、有理函数解、雅可比椭圆函数解和双曲函数解等四种形式的精确解，其中雅可比椭圆函数解为新解。

关键词

精确解，保形分数阶微积分，完全判别系统法，分数阶BBM-Burger方程

A New Exact Solution of Time Fractional Order BBM-Burger Equation

Yuan Feng, Keqing Wu[*], Yang Liu

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: Apr. 27th, 2025; accepted: May 27th, 2025; published: Jun. 16th, 2025

Abstract

Based on the definition and properties of conformal fractional calculus, the fractional BBM-Burger equation is simplified to a nonlinear ordinary differential equation by fractional travelling wave transformation. Then by using the complete discriminant system method of cubic polynomials, the exact solutions of trigonometric function, rational function, Jacobi elliptic function and hyperbolic function are obtained, among which the Jacobi elliptic function is a new solution.

Keywords

Exact Solution, Conformal Fractional Calculus, Complete Discriminant System Method, Fractional

[*]通讯作者。

文章引用: 冯源, 吴克晴, 刘洋. 时间分数阶 BBM-Burger 方程的新精确解[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 9-16.
DOI: 10.12677/pm.2025.156184

Order BBM-Burger Equation

1. 引言

随着分数阶偏微分方程的理论的发展与应用，人们有了可以模拟自然科学或工程技术中一些具有遗传和记忆性质的复杂系统的工具[1]-[3]，非线性分数阶偏微分方程精确解的求解工作早在二十一世纪初就已经陆续开始了。随着科学技术的发展，工程领域总结出的各类数学模型，其中很多结果都可以转化为分数阶非线性偏微分方程。随着计算机技术的迭代升级，人们开始尝试利用计算机来探求一些非线性分数阶偏微分方程的数值解，即无限逼近拟合各类方程的解析解。近些年来，尤其是从 2014 年开始，对于分数阶偏微分方程的精确解的研究突飞猛进，这是因为在 2014 年，R. Khalil 等人首次提出了保形分数阶微积分的定义[4]，该定义也被称为修正的黎曼－刘维尔型分数阶微积分，其较完美的弥补了 Caputo 型等经典的分数阶微积分定义不满足链式法则的缺陷，从而为各类分数阶微分方程的精确解的求解工作做了关键的理论铺垫，保形分数阶微积分近几年在分数阶偏微分方程的研究中得到了广泛的应用，它以极限的方式进行定义，形式相对其他分数阶微积分的定义更加简洁且延续了整数阶微积分中许多比较不错的数学性质。而且保形分数阶微积分目前已经有了一定的应用背景，例如在文献[5]中，林鸿夸利用保形分数阶微积分讨论了时空分数阶双 Sine-Gordon 方程的精确解。因此，本文采用保形分数阶微积分进行定义，为后续的运算转化做铺垫。即可以使分数阶偏微分方程通过恰当的行波变换转化为一个非线性常微分方程，然后运用相应的求解非线性常微分方程的方法，求得该方程的各种解后，最终构建原方程不同类型的精确解。

分数阶 BBM-Burger 方程精确解的构造面临两大挑战：一是分数阶导数与传统解析方法(如行波约化)的兼容性问题；二是非线性项与分数阶算子的耦合导致方程解析结构的强复杂性。针对前者，本文引入保形分数阶微积分的定义与性质，然后通过其局部性与运算兼容性，将原方程转化为具有明确物理意义的行波方程；针对后者，结合三阶多项式判别法，对约化后的常微分方程进行系统性分类。该方法通过分析四阶多项式系数的符号与组合关系，严格区分方程解的分支类型(如有理解、周期解、孤子解等)，从而避免传统试探法的不完备性，为分数阶非线性偏微分方程的解析研究提供严格的数学基础。

尽管针对分数阶 BBM-Burger 方程的精确解已经有了一些成果，但无人尝试过运用多项式判别法求解。传统展开法(如双曲函数法)在分数阶框架中常因导数算子的非局部性失效，而四阶多项式完全判别法的引入，使得分数阶行波方程的解结构可通过多项式根的性质直接解析刻画，显著降低了非线性约束条件的分析难度。此外，保形分数阶微积分的参数灵活性为调控解的动力学行为(如孤子衰减速率、对称性破缺等)提供了理论工具，从而更精确地揭示了分数阶参数对波传播机制的影响。

本文所采用的求解方法为多项式完全判别系统法[6]-[9]，也叫试探方程法，该方法最早由刘成仕[10]提出，目前该方法已经被广泛应用于求解非线性常微分方程的精确解。而本文所考虑的分数阶偏微分方程为如下的保形分数阶修正的 BBM-Burger 方程：

$$D_t^{\alpha} u - u_{xxt} + u_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, t > 0, 0 < \alpha \le 1 \tag{1}$$

其中 $D_t^\alpha u$ 表示未知函数 u 关于时间变量 t 的分数阶导数，u_{xxt} 为 u 对 t 和 x 的整数阶偏导数。该方程描述的是黏性流体现象的一种模型，张练等人运用改进的辅助方程映射法[11]已经求得了该方程大量的双曲函数解；而更早的 Muhammad Shakeel 等人运用改进的 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 展开法[12]求得了该方程大量的有理函数解，双曲函数解和三角函数解；但这些文献均未构建出该方程的雅可比椭圆函数形式的解。

2. 保形分数阶导数的定义及性质

定义[4]

设 $f:[0,+\infty)\to R$，若极限 $D_x^\alpha f(x)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x^{1-\alpha}\right)-f(x)}{\Delta},\forall x\in(0,+\infty),\alpha\in(0,1]$ 存在，则称该极限为 f 在 x 点处的 α 阶保形分数阶导数。

根据上述定义，假设 $\alpha\in(0,1]$，且 $f(x),g(x)$ 在点 $x>0$ 处 α 阶保形分数阶可导，则有下列性质成立：

(1) $D_x^\alpha\left(x^m\right)=mx^{m-\alpha},\forall m\in R$；

(2) $D_x^\alpha\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)=\lambda D_x^\alpha f(x)+\mu D_x^\alpha g(x),\forall\lambda,\mu\in R$；

(3) $D_x^\alpha\left[f(x)g(x)\right]=g(x)D_x^\alpha f(x)+f(x)D_x^\alpha g(x)$；

(4) $D_x^\alpha\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)D_x^\alpha f(x)-f(x)D_x^\alpha g(x)}{g^2(x)}$；

(5) 若 $f(x)$ 可导，则 $D_x^\alpha\left[f(x)\right]=x^{1-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$；

(6) 设 g 为定义在 f 的定义域内的可导函数，那么 $D_x^\alpha f\left[g(x)\right]=f'\left[g(x)\right]g'(x)x^{1-\alpha}$。

3. 时间分数阶 BBM-Burger 方程的精确解

引入如下的分数阶行波变换：

$$u(x,t)=u(\omega),\omega=kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{2}$$

其中 k 和 b 为待定的常系数。将行波变换(2)带入方程(1)并关于 ω 积分一次，那么方程(1)被简化为：

$$-bk^2u''+\frac{k}{2}u^2+(k+b)u+c_1=0 \tag{3}$$

其中 c_1 为积分常数。在方程(3)的两端同时乘 u'，并关于 ω 积分一次，得：

$$(u')^2=\frac{1}{3bk}u^3+\frac{k+b}{bk^2}u^2+\frac{2c_1}{bk^2}u+\frac{2c_2}{bk^2} \tag{4}$$

其中 c_2 为积分常数。

继续做代换：$\begin{cases}v(\theta)=\left(\dfrac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}u(\omega)\\ \theta=\left(\dfrac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\omega\end{cases}$，则 $v'(\theta)=u'(\omega)$.

将上述内容代入方程(4)得：

$$(v')^2=f(v)=v^3+a_2v^2+a_1v+a_0 \tag{5}$$

其中：$a_2=\dfrac{k+b}{bk^2}\left(\dfrac{1}{3bk}\right)^{-\frac{2}{3}}$，$a_1=\dfrac{2c_1}{bk^2}\left(\dfrac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}$，$a_0=\dfrac{2c_2}{bk^2}$。

由于反函数的导数为原函数导数的倒数，故多项式(5)的积分形式为：

$$\pm\left(\theta-\theta_0\right)=\int\frac{1}{f\left(v\right)}\mathrm{d}v=\int\frac{1}{\sqrt{v^3+a_2v^2+a_1v+a_0}}\mathrm{d}v \tag{6}$$

又有 $f\left(v\right)$ 的完全判别系统为：

$$\begin{cases}D_1=a_1-\dfrac{a_2^2}{3}\\ \Delta=-27\left(\dfrac{2a_2^3}{27}+a_0-\dfrac{a_2a_1}{3}\right)^2-4\left(a_1-\dfrac{a_2^2}{3}\right)^3\end{cases}$$

则根据上述系统，可分为以下几类情况讨论：

类型 1 $\Delta=-27\left(\dfrac{2a_2^3}{27}+a_0-\dfrac{a_2a_1}{3}\right)^2-4\left(a_1-\dfrac{a_2^2}{3}\right)^3<0$

此时，$f\left(v\right)=0$ 有且仅有一个实根，故可令 $f\left(v\right)=\left(v-\rho\right)\left(v^2+mv+n\right)$，其中 $m^2-4n<0$。那么，只有 $v>\rho$ 时，积分式(6)才有意义。所以当 $v>\rho$ 时，令 $v=\rho+\sqrt{\rho^2+m\rho+n}\tan^2\dfrac{\varphi}{2}$ (可变形化为：$\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}{v-\rho+\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}-1$)，则由式(6)得：

$$\theta-\theta_0=\int\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\left(v-\rho\right)\left(v^2+mv+n\right)}}=\int\frac{\sqrt{\rho^2+m\rho+n}\,\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\left(\rho^2+m\rho+n\right)^{\frac{3}{4}}\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

$$=\frac{1}{\left(\rho^2+m\rho+n\right)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}$$

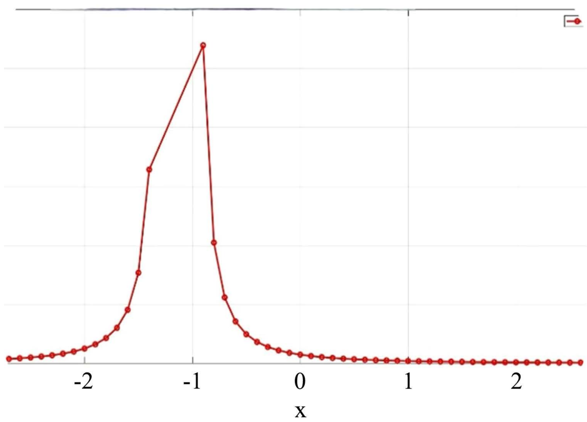
式中 $\sigma^2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\rho+\frac{m}{2}}{\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}\right)$。

根据式(6)和椭圆余弦函数的定义，得：$cn\left[\left(\rho^2+m\rho+n\right)^{\frac{1}{4}}\left(\theta-\theta_0\right),\sigma\right]=\cos\varphi$，而又因为 $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}{v-\rho+\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}-1$，即当 $v>\rho$ 时，有：

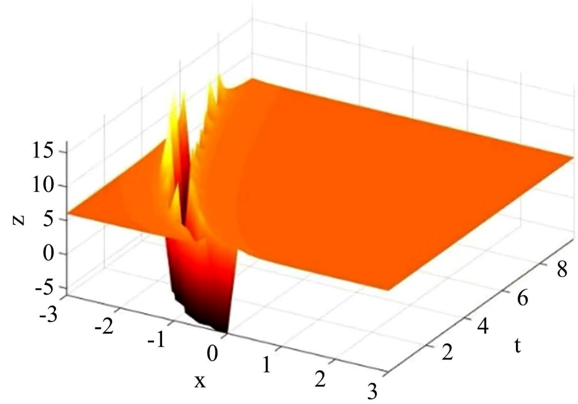
$v=\rho+\dfrac{2\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}{1+cn\left[\left(\rho^2+m\rho+n\right)^{\frac{1}{4}}\left(\theta-\theta_0\right),\sigma\right]}-\sqrt{\rho^2+m\rho+n}$，故可得：

$$u_1(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{\rho+\frac{2\sqrt{\rho^2+m\rho+n}}{1+cn\left[\left(\rho^2+m\rho+n\right)^{\frac{1}{4}}\left[\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right],\sigma\right]}-\sqrt{\rho^2+m\rho+n}\right\} \quad (8)$$

当 $m=2$，$n=8$，$\rho=2$，$b=3$，$k=3$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\theta_0=0$ 时，$u_1(t,x)$ 的二维图和三维图如下：



二维图



三维图

类型 2 $\Delta=-27\left(\frac{2a_2^3}{27}+a_0-\frac{a_2a_1}{3}\right)^2-4\left(a_1-\frac{a_2^2}{3}\right)^3=0, D_1=a_1-\frac{a_2^2}{3}<0$

此时 $f(v)=0$ 有 1 个单重实根和 1 个二重实根，所以可以设 $f(v)=(v-\rho_1)^2(v-\rho_2)$，其中 $\rho_1\neq\rho_2$，那么当 $v>\rho_2$ 时，代入式(6)，得：

$$\pm(\theta-\theta_0)=\int\frac{\mathrm{d}v}{(v-\rho_1)\sqrt{v-\rho_2}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\rho_1-\rho_2}}\ln\frac{\sqrt{v-\rho_2}-\sqrt{\rho_1-\rho_2}}{\sqrt{v-\rho_2}+\sqrt{\rho_1-\rho_2}},\rho_2<\rho_1<v\\ \frac{1}{\sqrt{\rho_1-\rho_2}}\ln\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}-\sqrt{v-\rho_2}}{\sqrt{v-\rho_2}+\sqrt{\rho_1-\rho_2}},\rho_2<v<\rho_1\\ \frac{2}{\sqrt{\rho_2-\rho_1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{v-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}},\rho_1<\rho_2<v\end{cases} \quad (9)$$

令 $\begin{cases}z=\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}(\theta-\theta_0)}{2}\\ \complement=\sqrt{\frac{v-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}}\end{cases}$，则根据式(9)及双曲函数的定义，得：$\begin{cases}\complement=\mp\coth\pm z,\rho_2<\rho_1<v\\ \complement=\mp\tanh\pm z,\rho_2<v<\rho_1\end{cases}$，故：

$$\begin{cases}v=(\rho_1-\rho_2)\coth^2\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}(\theta-\theta_0)}{2}+\rho_2,\rho_2<\rho_1<v\\ v=(\rho_1-\rho_2)\tanh^2\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}(\theta-\theta_0)}{2}+\rho_2,\rho_2<v<\rho_1\\ v=(\rho_2-\rho_1)\tan^2\frac{\sqrt{\rho_2-\rho_1}(\theta-\theta_0)}{2}+\rho_2,\rho_1<\rho_2<v\end{cases} \quad (10)$$

即：

$$u_2(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\rho_1-\rho_2)\coth^2\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}\left[\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right]}{2}+\rho_2\right\},\rho_2<\rho_1<v \tag{11}$$

$$u_3(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\rho_1-\rho_2)\tanh^2\frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}\left[\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right]}{2}+\rho_2\right\},\rho_2<v<\rho_1 \tag{12}$$

$$u_4(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\rho_2-\rho_1)\tanh^2\frac{\sqrt{\rho_2-\rho_1}\left[\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right]}{2}+\rho_2\right\},\rho_1<\rho_2<v \tag{13}$$

类型 3 $\Delta=-27\left(\frac{2a_2^3}{27}+a_0-\frac{a_2a_1}{3}\right)^2-4\left(a_1-\frac{a_2^2}{3}\right)^3=0,D_1=a_1-\frac{a_2^2}{3}=0$

此时 $f(v)=0$ 有 1 个三重实根，故设 $f(v)=(v-\rho)^3$，将其带入积分式(6)，解得：$v=4(\theta-\theta_0)^{-2}+\rho$，即：

$$u_5(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{4\left[\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right]^{-2}+\rho\right\} \tag{14}$$

类型 4 $\Delta=-27\left(\frac{2a_2^3}{27}+a_0-\frac{a_2a_1}{3}\right)^2-4\left(a_1-\frac{a_2^2}{3}\right)^3>0,D_1=a_1-\frac{a_2^2}{3}<0$

在该类型下，$f(v)=0$ 有 3 个互不相同的实根，所以可以设 $f(v)=(v-\rho_1)(v-\rho_2)(v-\rho_3)$，并且不妨令 $\rho_1<\rho_2<\rho_3$。那么，只有当 $\rho_1<v<\rho_2$ 或 $v>\rho_3$ 时，积分式(6)才有意义。

当 $\rho_1<v<\rho_2$ 时，令 $v=\rho_1+(\rho_2-\rho_1)\sin^2\varphi$，则积分式(6)可化为：

$$\begin{aligned}\pm(\theta-\theta_0)&=\int\frac{1}{\sqrt{(v-\rho_1)(v-\rho_2)(v-\rho_3)}}\mathrm{d}v\\&=\int\frac{2(\rho_2-\rho_1)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\rho_3-\rho_1}(\rho_2-\rho_1)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\sigma^2=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_3-\rho_1}$。

根据式(15)和椭圆正弦函数的定义可知：$v=\rho_1+(\rho_2-\rho_1)sn^2\left[\frac{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}{2}(\theta-\theta_0),\sigma\right]$，转化得：

$$u_6(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{\rho_1+(\rho_2-\rho_1)sn^2\left[\frac{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}{2}\left(\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right),\sigma\right]\right\} \tag{16}$$

当 $v>\rho_3$ 时，令 $v=\rho_2+\frac{\rho_3-\rho_2}{1-\sin^2\varphi}$，代入(6)可得：

$$\begin{aligned}\pm(\theta-\theta_0)&=\int\frac{1}{\sqrt{(v-\rho_1)(v-\rho_2)(v-\rho_3)}}\mathrm{d}v\\&=\int\frac{2(\rho_3-\rho_2)\sin\varphi\cos^{-3}\varphi}{(\rho_3-\rho_2)\sin\varphi\cos^{-2}\varphi\sqrt{\rho_2-\rho_1+\frac{\rho_3-\rho_2}{\cos^2\varphi}}}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\varphi}}\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\sigma^2=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_3-\rho_1}$。

根据上式及椭圆正弦函数的定义，得：$v=\rho_2+\frac{\rho_3-\rho_2}{1-sn^2\left(\frac{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}{2}(\theta-\theta_0),\sigma\right)}$，转化得：

$$u_7(t,x)=\left(\frac{1}{3bk}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{\rho_2+\frac{\rho_3-\rho_2}{1-sn^2\left[\frac{\sqrt{\rho_3-\rho_1}}{2}\left(\left(\frac{1}{3bk}\right)^{\frac{1}{3}}\left(kx+b\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)-\theta_0\right),\sigma\right]}\right\} \tag{18}$$

4. 结论

本文利用分数阶行波变换将分数阶偏微分方程转化为非线性常微分方程，然后借助三阶多项式判别法构建了分数阶 BBM-Burger 方程的有理函数解、双曲函数解、三角函数解和雅可比椭圆函数解，与文献[11]和文献[12]所求得的方程的精确解结果做对比，$u_1(x,t)$、$u_6(x,t)$ 和 $u_7(x,t)$ 均为新解，这些新解为该方程所描述的流体模型做了进一步的理论支撑，本文还绘制了部分新解的二维图与三维图，有助于更好地理解其精确解的物理意义，从而更生动具体地描述该流体模型，更好地彰显研究成果的实际应用价值。并且，本文所求结果也进一步表明了多项式判别法对于求解一些分数阶偏微分方程的精确解有奇效，可以相对简洁高效地构建出一些用其他方法构建不出的精确解类型。

基金项目

国家自然科学基金(61364015)。

参考文献

[1] 周千. 基于分数阶偏微分方程和 CB 模型的彩色图像去噪方法[J]. 计算机与数字工程, 2016, 44(8): 1571-1575.

[2] 高冉, 顾聪, 李胜宏. 分数阶偏微分方程的图像放大模型[J]. 浙江大学学报(理学版), 2016, 43(5): 550-553.

[3] 周尚波, 王李平, 尹学辉. 分数阶偏微分方程在图像处理中的应用[J]. 计算机应用, 2017, 37(2): 546-552.

[4] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M. (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002

[5] 林鸿夸. 时空分数阶双 Sine-Gordon 方程的显式精确解[J]. 应用数学进展, 2021, 10(3): 689-693.

[6] 胡艳, 孙峪怀. 应用多项式完全判别系统方法求解时空分数阶复 Ginzburg-Landau 方程[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(8): 874-880.

[7] 刘杨秀, 胡彦霞. 带参数时空分数阶 Fokas-Lenells 方程的精确解[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(11): 1288-1302.

[8] 何黎霞, 孙峪怀. 分数阶 Schrödinger-Hirota 方程的显示解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2022, 39(2): 155-159.

[9] 韩天勇, 李钊, 文家金, 黄春. (2 + 1)维时空分数阶 Nizhnik-Novikov-Veslov 方程组的精确单行波解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2022, 39(1): 36-41.

[10] Liu, C. (2005) Exact Travelling Wave Solutions for (1 + 1)-Dimensional Dispersive Long Wave Equation. *Chinese Physics*, **14**, 1710-1715. https://doi.org/10.1088/1009-1963/14/9/005

[11] 张练, 刘小华, 吴念, 曾职云. 时间分数阶 Burger 方程的精确表达式[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2021, 27(3): 72-80.

[12] Shakeel, M., Ul-Hassan, Q.M., Ahmad, J. and Naqvi, T. (2014) Exact Solutions of the Time Fractional BBM-Burger Equation by Novel(G'/G)-Expansion Method. *Advances in Mathematical Physics*, **2014**, Article 181594. https://doi.org/10.1155/2014/181594