

积分变换法在物理静电场研究中的应用

张 哲, 高皓然, 张琼芬*

桂林理工大学数学与统计学院, 广西 桂林

收稿日期: 2025年5月2日; 录用日期: 2025年6月20日; 发布日期: 2025年6月27日

摘 要

数学方法在物理学中占据着关键地位, 对理论研究、现实教学以及实际应用有着重大意义。本文聚焦积分变换法在静电场问题中的应用, 详细阐述其原理及过程。在点电荷静电势求解中, 通过泊松方程结合傅里叶变换, 得出不同位置点电荷的电势表达式, 加深对静电场理论的理解; 针对静电场边值问题, 以接地金属槽为例, 充分展现积分变换法简化计算的卓越效能, 凸显其在解决静电场问题方面的独特价值以及数学方法在物理学科中的重要性, 有助于相关领域研究与学习, 推动电磁学理论与技术的发展。

关键词

数学方法, 积分变换法, 静电场, 泊松方程

The Application of Integral Transform Method in the Study of Physical Electrostatic Field

Zhe Zhang, Haoran Gao, Qiongfen Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi

Received: May 2nd, 2025; accepted: Jun. 20th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

Mathematical methods play a crucial role in physics and are of great significance to theoretical research, practical teaching, and real-world applications. This paper focuses on the application of integral transformation methods in electrostatic field problems, elaborating on its principles and processes in detail. In the solution of electrostatic potential of point charges, by combining Poisson's

*通讯作者。

文章引用: 张哲, 高皓然, 张琼芬. 积分变换法在物理静电场研究中的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 117-124.
DOI: 10.12677/pm.2025.156196

equation with Fourier transform, the potential expressions of point charges at different positions are obtained, deepening the understanding of electrostatic field theory. For electrostatic boundary value problems, taking the grounded metal slot as an example, the outstanding efficiency of integral transformation methods in simplifying calculations is fully demonstrated, highlighting its unique value in solving electrostatic field problems and the importance of mathematical methods in the physical discipline. This is conducive to research and learning in related fields and promotes the development of electromagnetic theory and technology.

Keywords

Mathematical Methods, Integral Transformation Method, Electrostatic Field, Poisson's Equation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 研究背景

在物理学研究中，数学方法起着至关重要的作用[1]。例如在电磁学领域，静电场问题的求解就是一个比较重要的研究问题。针对点电荷静电势的求解问题，传统电磁学教材多基于静电场保守场特性通过场强对路径积分获取，但在后续电动力学中发现静电势满足泊松方程[2]，而通过求解泊松方程得到点电荷静电势的实例在教材中较为少见。此外，静电场边值问题的常规解法如直接积分法、分离变量法、镜像法等在某些情况下存在局限性[3]，如直接积分法和分离变量法在处理复杂问题时过程繁琐，而积分变换法可以更好地处理复杂静电场边值问题，给出了更为有效的求解方法。

1.2. 研究意义

深入研究数学方法在物理学科中的应用具有深远且多维度的重要意义。从理论层面，它对于解释物理现象背后的数学本质有着重要作用。如以积分变换法求解静电场相关问题时，它使得泊松方程等抽象数学表达式与静电势等物理概念紧密相连，通过精确推导深入剖析电场分布规律、电荷与电势相互作用机理，从而不断夯实与拓展电磁学理论体系，助力物理学理论发展[4]。戴世坤等[5]利用傅里叶变换将地磁场三维空间问题转为一维问题。从实际应用角度看，在电磁学相关工程领域，如电子电路设计、电磁场工程等，精确求解静电场问题对优化设计、提升性能极为关键。沈艳微等[6]使用傅里叶变换将频域电磁场信号转换为时域信号，以求解复杂问题。侯毅然等[7]通过积分变换将电磁问题降维处理，降低计算复杂度、提高问题求解效率。因此，积分变换法也能大幅度提高问题求解效率与准确性，降低计算复杂度、成本和时间等。

2. 方法介绍

积分变换法是通过积分运算将复杂函数转换为另一函数，来简化方程求解的数学方法，主要包括傅里叶变换和拉普拉斯变换。傅里叶变换针对空间变量，依其变化区间分正弦、余弦(半无界)及有限正弦和余弦(有界)变换。拉普拉斯变换常用于含时偏微分方程定解，适合时变场边值问题，能将相关偏微分方程化为常微分方程后反演求原函数[8]。运用积分变换法解物理问题时，需要注意自变量变化区间要与变换要求一致；未知函数积分变换需存在；函数及其导数在变换下要有简单代数关系；未知函数及其低阶导

数特殊值要由定解条件给出，如此才能有效应用该法解决物理问题[9]。

2.1. 傅里叶变换

在讨论傅里叶变换之前，我们先回忆傅里叶级数的相关概念。

定理 1 [10]: 设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数，并且在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足以下条件：

- (1) 连续或只有有限个第一类间断点；
- (2) 只有有限个极值点。

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

其中有

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt, n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

正弦函数与余弦函数可以由指数函数统一表出，因此我们利用欧拉公式将傅里叶级数三角形式进行简化得到其指数形式，在工程上一般用的就是指数形式[10]。

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

接下来我们用周期函数的傅里叶级数形式推导一下非周期函数的傅里叶积分公式[11]，非周期函数可看成周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \rightarrow +\infty$ 时得来，由上面两式可得到

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (3)$$

最终在一定条件下，上式可写为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

最后我们从上式出发，令

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

因此，我们称公式(5)为傅里叶变换，而公式(6)为傅里叶逆变换，如此一来， $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 就构成了一个傅氏变换对。

此外傅里叶变换要求函数 $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 Dirichlet 条件，且需要满足绝对可积性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dx < \infty.$$

对于电场问题中常见的无界域电势分布,当电荷分布具有局部特征时,可以通过引入收敛因子或极限的方式来满足该条件。

然而在工程实际问题中,许多物理现象具有一种脉冲特征,就如我们要研究的物理静电场中就会有此现象,因此我们引入单位冲激函数 $\delta(t)$ [11],且满足以下条件

$$\begin{cases} \text{当 } t \neq 0 \text{ 时, } \delta(t) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

接下来,我们给出 δ 函数的傅里叶变换为:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7)$$

2.2. 拉普拉斯变换

傅里叶变换必须在整个实轴上有定义,然而在工程实际问题中,有时是不需要考虑小于 0 的那一部分,因此类似的,我们给出拉普拉斯变换的定义。

定理 2 [12]: 设函数 $f(t)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的实值函数,对于复参数 $s = \beta + j\omega$, 则有:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (8)$$

公式(8)在复平面某一区域内收敛,则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 拉普拉斯变换,称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换[12],其反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds, t > 0 \quad (9)$$

同时,拉普拉斯变换要求在函数无穷远处不超过指数增长,这一性质可以确保静电场中电势的物理约束(如能量有限性)该条件成立。

3. 具体应用实例

3.1. 积分变换法求解点电荷的静电势

3.1.1. 位于坐标原点的点电荷电势求解

设点电荷 q 位于直角坐标系的原点处,其激发的电势 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 满足泊松方程,即有:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad (10)$$

$$(-\infty < x_1, x_2, x_3 < +\infty)$$

由于其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 接下来对此方程进行关于 x_1, x_2, x_3 的三重傅里叶变换,即设 $\varphi(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 变换之后,方程左边与方程右边分别为:

$$-(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$-\frac{q}{\varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) e^{-i\omega_1 x_1 - i\omega_2 x_2 - i\omega_3 x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

因此可以得到:

$$\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \quad (11)$$

再对 $\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 进行关于 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的三重傅里叶反变换。在球坐标系中, 我们令

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{l}_1 + x_2 \mathbf{l}_2 + x_3 \mathbf{l}_3, \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{l}_1 + \omega_2 \mathbf{l}_2 + \omega_3 \mathbf{l}_3$$

其中, $\mathbf{r}$ 沿着极轴方向, $\boldsymbol{\omega}$ 为球半径矢量, φ 为方位角, $\mathbf{r}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 夹角为极角 θ , 体积元为 $d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \omega^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\omega$ 。

最终我们可以得到:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) &= F^{-1} \{ \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \} \\ &= \frac{q}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= \frac{q}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}} d\theta d\varphi d\omega \\ &= \frac{q}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}} \sin \theta d\theta d\varphi \right) d\omega \\ &= \frac{q}{(2\pi)^2 \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \left[-\int_0^\pi e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}} d(\cos \theta) \right] d\omega \\ &= \frac{q}{(2\pi)^2 \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}} e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} \cos \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\omega \\ &= \frac{q}{(2\pi)^2 \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{2}{r\omega} \left(\frac{e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}} - e^{-i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}}}{2i} \right) d\omega \\ &= \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r} \int_0^{+\infty} \frac{\sin r\omega}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

再进一步查积分表, 又有 $r > 0$, 最终我们得到位于原点处点电荷 q 激发的电势为:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 r} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (12)$$

3.1.2. 位于任意位置的点电荷电势求解

点电荷位于一般位置时, 我们设点电荷 q 的位矢为 $\mathbf{r}'(x'_1, x'_2, x'_3)$, 场点位矢为 $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, 其满足泊松方程, 可以得到:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) \quad (13)$$

对方程进行三重傅里叶变换, 设 $\varphi(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 并且应用:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0),$$

类似前面的情况, 我们可以得到:

$$\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'}}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \quad (14)$$

继续对 $\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 进行关于 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的三重傅里叶反变换, 可得位于 $\mathbf{r}'$ 处点电荷 q 激发的电势:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, x_3) &= F^{-1} \{ \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \} \\
&= \frac{q}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'}}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\
&= \frac{q}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3
\end{aligned}$$

若设电荷分布体密度为 $\rho(\mathbf{r}')$, $d\Omega'$ 为电荷分布的体积元, 则最终场点 $\mathbf{r}$ 静电势为:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega'} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15)$$

3.2. 积分变换法在求解静电场边值问题中的应用

3.2.1. 经典电磁场问题(接地金属槽内电势分布)

对于一无限长接地金属槽(见 图 1), 其三壁电势为零, 顶盖电势为 $V_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$, 其中, $V_0 = 100 \text{ V}$, 截面长宽分别为: $a = 10 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}$ 。

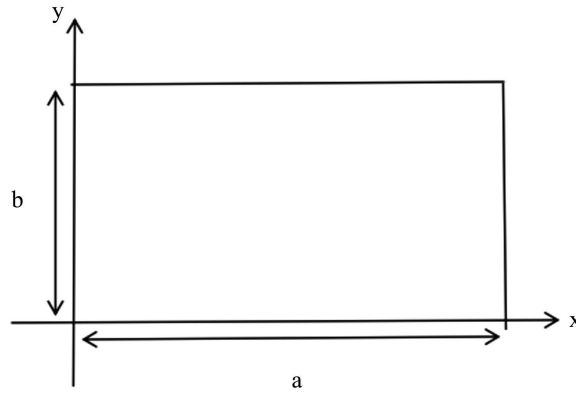


Figure 1. Cross-sectional diagram of a grounded metal tank
图 1. 接地金属槽的截面图

金属槽内的电势满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

其具有第一类边界条件:

$$\begin{cases}
\varphi(x, y)|_{x=0} = 0 \\
\varphi(x, y)|_{x=a} = 0 \\
\varphi(x, y)|_{y=0} = 0 \\
\varphi(x, y)|_{y=b} = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)
\end{cases}$$

接下来, 对边值问题的变量 x 进行有限正弦变换, 设 $\varphi(x, y) \rightarrow \Phi(n, y)$, 进一步将边值条件代入化简可得:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi(n, y)}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \Phi(n, y) = 0 \\ \Phi(n, 0) = 0 \\ \Phi(n, b) = \frac{2}{a} \int_0^a V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} V_0, n=1 \\ 0, n=2, 3, \dots \end{cases} \end{cases}$$

解此二阶常微分方程得:

$$\Phi(n, y) = C_1 e^{-\frac{n\pi y}{a}} + C_2 e^{\frac{n\pi y}{a}}$$

再利用待定系数法, 最终得到电势的表达式为:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (17)$$

3.2.2. 均匀外电场中的介质圆柱体电位分布问题

在均匀外电场 E_0 中, 有一半径为 a 、介电常数 ε_2 为的无限长均匀介质圆柱体(见图 2), 其轴与 E_0 垂直, 柱外充满介电常数为 ε_1 的均匀介质。

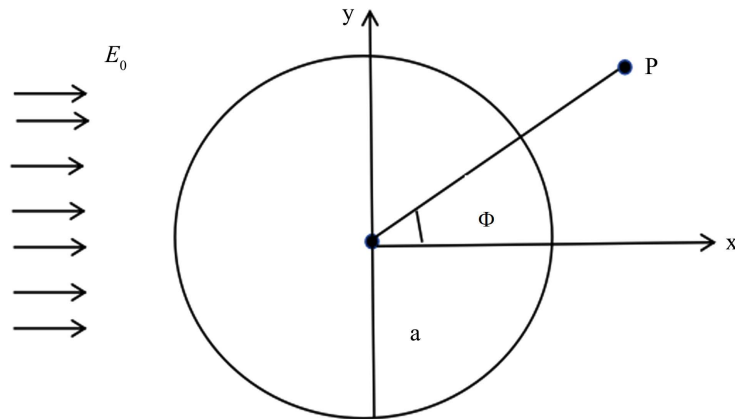


Figure 2. A dielectric cylinder in a uniform external electric field
图 2. 均匀外电场中的介质圆柱体

我们利用解决经典电磁场问题同样的思路, 写出边值问题的方程组, 然后经过简化, 最终可以得到:

$$\begin{cases} \Phi_1(\rho, w) = C_1 \rho^{-|w|} + C_2 \rho^{|w|} \\ \Phi_1(\rho, w)|_{\rho \rightarrow \infty} = -E_0 \pi [\delta(w+1) + \delta(w-1)] \\ \Phi_2(\rho, w) = A_1 \rho^{-|w|} + A_2 \rho^{|w|} \\ \Phi_2(\rho, w)|_{\rho=a} = \Phi_1(\rho, w)|_{\rho=a} \\ \varepsilon_1 \frac{d\Phi_1(\rho, w)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = \varepsilon_2 \frac{d\Phi_2(\rho, w)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, A_1, A_2 为待定常数, 由于边值条件带有三角函数, 其像函数出现广义函数, 导致常数求解困难, 甚至无法求解。在这种情况下, 我们可借助计算机辅助或采用数值计算方法进行最终的计算。

4. 结论

积分变换法在物理学科应用中优势显著且价值非凡。在本文中,分析其在点电荷静电势和静电场边值问题求解中的表现可知,它为复杂静电场问题提供了有效解决途径。求解点电荷静电势时,无论点电荷处于原点、任意位置,积分变换法均能经严谨推导得到准确结果,加深对静电势本质理解,验证静电场理论,对理论研究意义重大,为电磁学发展筑牢数学根基。求解静电场边值问题时,如接地金属槽和介质圆柱体电位分布问题,积分变换法在某些情况下比分离变量法更能简化计算、提高效率,但边值条件含三角函数其像函数有广义函数时,求解常数会遇困难,需计算机辅助或数值计算。总之,数学方法在物理学科应用广泛且关键,有助于理解物理现象背后原理,更好地解决实际问题。

基金项目

国家自然科学基金(11961014)。

参考文献

- [1] 朱满座. 数值保角变换及其在电磁理论中的应用[D]: [博士学位论文]. 西安: 电子科技大学, 2008.
- [2] 李书民. 电动力学概论[M]. 合肥: 中国科学技术出版社, 2010: 35.
- [3] 彭丽, 张玲玲, 任淑青, 等. 积分变换与场论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2015.
- [4] 冯慈璋, 马西奎. 工程电磁场导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [5] 戴世坤, 陈轻蕊, 凌嘉宣, 等. 空间-波数域三维大地电磁场积分方程法数值模拟[J]. 地球物理学报, 2022, 65(6): 2294-2310.
- [6] 沈艳微, 邵俊倩, 孙威, 等. 基于留数定理的时域电磁场数值积分计算系统设计[J]. 现代电子技术, 2020, 43(24): 42-44+48.
- [7] 侯毅然, 王玉恒, 王向晖, 等. 电磁场 2.5 维时域间断有限元方法[J]. 强激光与粒子束, 2021, 33(7): 97-103.
- [8] 董姗姗, 宫原野. 拉普拉斯变换在广义积分及微分方程求解中的应用[J]. 江汉大学学报(自然科学版), 2019, 47(3): 227-230.
- [9] 万召侗, 姚运生. 地震动力分析的经典方法与现代计算技术[J]. 大地测量与地球动力学, 2004(1): 111-116.
- [10] 张高民, 崔俭春, 吕锋, 等. 复变函数与积分变换[M]. 青岛: 中国石油大学出版社, 2022: 32-38.
- [11] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003.
- [12] 王元明. 数学物理方程与特殊函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 76-99.