

一类二阶非齐次线性递推数列通项公式的求法

聂会珍

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年5月8日; 录用日期: 2025年6月18日; 发布日期: 2025年6月27日

摘 要

二阶非齐次线性递推数列是高中数学竞赛的重要内容, 求解方法的方法有多种, 例如特征方程法、生成函数法等, 但是这类方法对于高中生来说有一定的难度, 因此本文用类比的方法来进行求解, 学生更容易理解, 也能让学生体会数学的奥妙。

关键词

递推数列, 类比, 通项公式

The Method for Finding the General Term Formula of a Class of Second-Order Non-Homogeneous Linear Recurrent Sequences

Huizhen Nie

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 8th, 2025; accepted: Jun. 18th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

Second-order non-homogeneous linear recurrent sequences are an important part of high school mathematics competitions. There are various methods for solving them, such as the characteristic equation method and the generating function method. However, these methods are somewhat difficult for high school students. Therefore, this paper uses the analogy method for solution, which makes it easier for students to understand and also enables them to appreciate the mysteries of mathematics.

Keywords

Recursive Sequence, Analogy, General Term Formula

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数列是高中数学五大主题之一，2024 年新课标 I 卷将数列内容结合新情境，安排在最后压轴题的位置，由此可见数列在高考中占据着举足轻重的地位。类比是人认识世界的一种重要方法，因此本文用类比的方法来探究一类二阶非齐次递推数列通项公式的求法。

2. $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n (B \neq 0)$ 型

我们知道对于 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n (B \neq 0)$ 型二阶齐次线性递推数列求通项公式可以通过构造两个等比数列将二阶齐次线性递推数列化为一阶非齐次线性递推数列，若一阶非齐次线性递推数列是

$a_{n+1} = Aa_n + f(n) (A \neq 1)$ 型用消元法即可求出通项公式，若是 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型用累加法即可求出通项公式[1]。

试题呈现：

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 5$ ，且 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析：(1) 构造等比数列 $a_{n+2} - c_1a_{n+1} = c_2(a_{n+1} - c_1a_n)$ ，

$$\text{化简得 } \begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ c_1c_2 = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{cases}.$$

因此数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列；数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列。根据等比数列的通项公式可得 $a_{n+1} - 2a_n = 3^n$ ， $a_{n+1} - 3a_n = 2^n$ 。

(2) 消元将 $a_{n+1} - 2a_n = 3^n$ ， $a_{n+1} - 3a_n = 2^n$ 相加消 a_{n+1} 得 $a_n = 3^n - 2^n$ 。

(3) 因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $3^n - 2^n$ 。

那么对于 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + f(n)$ 型(其中 $f(n)$ 是关于 n 的线性函数)怎么求其通项公式呢？

3. $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + f(n)$ 型(其中 $f(n)$ 是关于 n 的线性函数)

类比 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n (B \neq 0)$ 型求通项公式的思路，可以合情推理出 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + f(n)$ 型求通项公式的方法。

(一) $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + C$ 型

类比 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n (B \neq 0)$ 构造等比数列求通项公式的思路，可以合情推理出

$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + C$ 型可化成

$$a_{n+2} - c_1a_{n+1} - c_2(n+2) - c_3 = c_4(a_{n+1} - c_1a_n - c_2(n+1) - c_3),$$

根据

$$a_{n+2} = (c_1 + c_4)a_{n+1} - c_1c_4a_n + (c_2 - c_2c_4)n + 2c_2 + c_3 - c_4(c_2 + c_3) = Aa_{n+1} + Ba_n + C$$

$$\text{得} \begin{cases} c_1 + c_4 = A \\ -c_1 c_4 = B \\ c_2 - c_2 c_4 = 0 \\ 2c_2 + c_3 - c_4(c_2 + c_3) = C \end{cases},$$

当 $c_4 = 1$ 时;

$$\begin{cases} c_1 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \\ c_2 = c_2 \\ c_3 = \frac{2C - (4 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B})c_2}{2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B}} \\ c_4 = \frac{A \mp \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \end{cases}$$

当 $c_4 \neq 1$ 时;

$$\begin{cases} c_1 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{2C}{2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B}} \\ c_4 = \frac{A \mp \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \end{cases}。$$

这样就将二阶非齐次线性递推数列化为了一阶非齐次线性递推数列。即数列

$\{a_{n+1} - c_1 a_n - c_2(n+1) - c_3\}$ 是首项为 $a_2 - c_1 a_1 - 2c_2 - c_3$, 公比为 c_4 的等比数列。当 $c_4 \neq 1$ 时, 即化为了 $a_{n+1} = c_4 a_n + f(n)$ ($c_4 \neq 1$) 型, 利用消元法即可得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; 当 $c_4 = 1$ 时, 即化为了 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型, 用累加法即可得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例题展示:

例 2: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: (1) 构造等比数列

$$a_{n+2} - c_1 a_{n+1} - c_2(n+2) - c_3 = c_4(a_{n+1} - c_1 a_n - c_2(n+1) - c_3),$$

$$\text{化简得: } \begin{cases} c_1 + c_4 = 2 \\ -c_1 c_4 = -1 \\ c_2 - c_2 c_4 = 0 \\ 2c_2 + c_3 - c_4(c_2 + c_3) = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases},$$

因此数列 $\{a_{n+1} - a_n - 2(n+1)\}$ 是首项为 -3, 公比为 1 的等比数列; 根据等比数列的通项公式可得 $a_{n+1} - a_n - 2(n+1) = -3$ 。

(2) 是 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型, 利用累加法求和即可求出通项公式为 $a_n = n^2 - 2n + 2$ 。

(3) 因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 2n + 2$ 。

(二) $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + Cn + D$ 型

有了上面的经验, 很容易得出以下类比:

因为

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (c_1 + c_5)a_{n+1} - c_1c_5a_n + (c_2 - c_2c_5)n^2 + [4c_2 + c_3 - c_5(2c_2 + c_3)]n \\ &\quad + 4c_2 + 2c_3 + c_4 - c_5(2c_2 + c_3 + c_4) \\ &= Aa_{n+1} + Ba_n + Cn + D \end{aligned}$$

$$\text{所以} \begin{cases} c_1 + c_5 = A \\ -c_1c_5 = B \\ c_2 - c_2c_5 = 0 \\ 4c_2 + c_3 - c_5(2c_2 + c_3) = C \\ 4c_2 + 2c_3 + c_4 - c_5(2c_2 + c_3 + c_4) = D \end{cases},$$

当 $c_5 = 1$ 时;

$$\begin{cases} c_1 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \\ c_2 = c_2 \\ c_3 = \frac{2C + 2c_2(A \mp \sqrt{A^2 + 4B} - 4)}{2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}, \\ c_4 = \frac{-8c_2 + 4C}{(2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B})^2} \\ c_5 = \frac{A \mp \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \end{cases},$$

当 $c_5 \neq 1$ 时;

$$\begin{cases} c_1 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{2C}{2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B}} \\ c_4 = \frac{2D - 2(4 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B})}{(2 - A \pm \sqrt{A^2 + 4B})^2} \\ c_5 = \frac{A \mp \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \end{cases}.$$

数列 $\{a_{n+1} - c_1a_n - c_3(n+1) - c_4\}$ 是首项为 $a_2 - c_1a_1 - 2c_3 - c_4$, 公比为 c_5 的等比数列, 当 $c_5 \neq 1$ 时, 即 $a_{n+1} = c_4a_n + f(n)$ ($A \neq 1$) 型, 利用消元法即可得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; 当 $c_5 = 1$ 时, 即 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型, 用累加法即可得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例题展示:

例 3: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 1$, 且 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式[2]。

解析: (1) 构造等比数列

$$a_{n+2} - c_1a_{n+1} - c_2(n+2)^2 - c_3(n+2) + c_4 = c_5(a_{n+1} - c_1a_n - c_2(n+1)^2 - c_3(n+1) + c_4),$$

$$\text{化简得: } \begin{cases} c_1 + c_5 = 5 \\ -c_1 c_5 = -6 \\ c_2 - c_2 c_5 = 0 \\ 4c_2 + c_3 - c_5(2c_2 + c_3) = 1 \\ 4c_2 + 2c_3 + c_4 - c_5(2c_2 + c_3 + c_4) = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = -\frac{1}{2} \\ c_4 = \frac{1}{4} \\ c_5 = 3 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 2 \end{cases}.$$

因此数列 $\left\{a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{2}(n+2) - \frac{1}{4}\right\}$ 是首项为 $\frac{7}{4}$, 公比为 3 的等比数列; 数列 $\{a_{n+1} - 3a_n + n + 1\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列。根据等比数列的通项公式可得

$$a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{2}(n+2) - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1}, a_{n+1} - 3a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

(2) 消元将 $a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{2}(n+2) - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1}$, $a_{n+1} - 3a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$ 两式相减消 a_{n+1} 得

$$a_n = \frac{7}{4} 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}.$$

(3) 因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{7}{4} 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$ 。

从上述论述可以归纳得, 对于 $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + f(n)$ 型(其中 $f(n)$ 是关于 n 的线性函数)递推关系求通项问题, 我们可以构造一个 $g(n)$ 使数列 $\{a_{n+1} + Aa_n + g(n)\}$ 为等比数列, 然后用待定系数法确定 $g(n)$ 的表达式和 A , 然后求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

类比是发现数学问题、解决数学问题的一种重要方法。在数学学习的过程中我们可以通过类比去发现新的思路, 建立知识之间的联系[3]。

参考文献

- [1] 唐培文. 数列通项公式求解策略探究[J]. 中学教学参考, 2025(8): 30-32.
- [2] 沈国新. 一类线性非齐次递推数列通项的求法[J]. 黄冈师专学报, 1989(4): 54-57.
- [3] 俞新龙. 用类比学习求解数列递推关系求通项问题[J]. 广东教育(高中版), 2024(10): 27-29.