

现代控制理论中线性代数与矩阵分析的融合路径研究

陈孟申¹, 梁琨²

¹上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海

²上海电力大学自动化工程学院, 上海

收稿日期: 2025年5月14日; 录用日期: 2025年6月16日; 发布日期: 2025年7月10日

摘要

现代控制理论作为控制科学的重要分支, 在工业自动化、航空航天、机器人技术等众多领域发挥着关键作用。它以状态空间法为核心, 突破了经典控制理论仅基于输入输出关系的局限性, 能够更深入地描述和分析系统的内部状态变化。而线性代数与矩阵分析作为重要的数学工具, 为现代控制理论的发展和应用提供了坚实的理论基础和强大的分析手段。文章首先对线性代数与矩阵分析的理论耦合基础进行了阐述, 然后分析了矩阵分析方法在控制理论中的融合路径, 以及融合方法在工程实现中的应用。

关键词

现代控制理论, 线性代数, 矩阵分析, 融合路径

Research on the Integration Path of Linear Algebra and Matrix Analysis in Modern Control Theory

Mengshen Chen¹, Kun Liang²

¹School of Optical-Electrical Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

²College of Automation Engineering, Shanghai University of Electric Power, Shanghai

Received: May 14th, 2025; accepted: Jun. 16th, 2025; published: Jul. 10th, 2025

Abstract

As an important branch of control science, modern control theory plays a crucial role in numerous

文章引用: 陈孟申, 梁琨. 现代控制理论中线性代数与矩阵分析的融合路径研究[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 15-20.
DOI: 10.12677/pm.2025.157200

fields such as industrial automation, aerospace, and robotics. Centered around the state-space method, it breaks through the limitations of classical control theory, which is solely based on input-output relationships, enabling a more in-depth description and analysis of the internal state changes of systems. Linear algebra and matrix analysis, as important mathematical tools, provide a solid theoretical foundation and powerful analytical means for the development and application of modern control theory. This paper first expounds on the theoretical coupling basis of linear algebra and matrix analysis, then analyzes the integration paths of matrix analysis methods in control theory, as well as the applications of these integrated methods in engineering implementation.

Keywords

Modern Control Theory, Linear Algebra, Matrix Analysis, Integration Path

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 现代控制理论与矩阵代数的理论耦合基础

1.1. 控制系统的矩阵表示范式

1.1.1. 状态空间模型的矩阵化表达(A、B、C、D 矩阵系)

状态空间模型是现代控制理论描述动态系统的重要方式, 它将系统的内部状态、输入和输出通过一组一阶微分方程或差分方程联系起来[1]。对于线性时不变连续系统, 其状态空间模型可表示为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

其中, $x(t)$ 是 n 维状态向量, $u(t)$ 是 m 维输入向量, $y(t)$ 是 p 维输出向量; A 是 $n \times n$ 维系统矩阵, 描述系统内部状态的动态特性; B 是 $n \times m$ 维输入矩阵, 反映输入对状态的影响; C 是 $p \times n$ 维输出矩阵, 确定状态对输出的作用; D 是 $p \times m$ 维直接传递矩阵, 体现输入对输出的直接影响。

这种矩阵化表达简洁且高效, 将复杂的系统动态行为转化为矩阵运算。通过对 A 、 B 、 C 、 D 矩阵的分析, 可以深入研究系统的各种特性, 如稳定性、能控性、能观性等。例如, 系统的稳定性与矩阵 A 的特征值密切相关, 若 A 的所有特征值实部均为负, 则系统是渐近稳定的。

1.1.2. 线性时不变系统的特征方程 $\det(sI - A) = 0$ 的代数本质

线性时不变系统的特征方程 $\det(sI - A) = 0$ 在系统分析中具有核心地位[2]。其中, s 是复变量, I 是 n 阶单位矩阵。该方程的解 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 即为矩阵 A 的特征值, 它们决定了系统的固有动态特性。

从代数角度看, 特征方程是一个 n 次多项式方程。根据代数基本定理, 它在复数域内有 n 个根(重根按重数计算)。这些特征值反映了系统在无外力作用下的自由运动模态。例如, 在一个二阶线性时不变系统中, 若特征值为 $s_1 = -1 + j$ 和 $s_2 = -1 - j$, 则系统的自由响应包含两个振荡模态, 其频率和衰减特性由特征值决定。

1.2. 线性空间的理论支撑

1.2.1. 状态空间与解空间的同构关系

在现代控制理论中, 状态空间是描述系统所有可能状态的向量空间, 而解空间则是系统状态方程解的集合所构成的向量空间[3]。状态空间与解空间之间存在着同构关系, 这种同构关系为系统分析提供了

有力的理论依据。

根据线性代数中的同构定理, 若两个向量空间之间存在一个双射线性变换, 则它们是同构的。对于线性时不变系统, 通过状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$, 可以建立状态空间与解空间之间的同构映射。给定初始状态 $x(t_0)$, 系统在时刻 t 的状态 $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$ 。这表明, 状态空间中的每个初始状态向量 $x(t_0)$ 都对应着解空间中一条解曲线 $x(t)$, 且这种对应关系保持线性运算。

利用状态空间与解空间的同构关系, 可以将解空间中的问题转化到状态空间中进行分析, 反之亦然。例如, 在研究系统的能控性和能观性时, 可以借助这种同构关系, 从状态空间的角度直观地理解系统状态的可控性和可观测性, 为相关判据的推导和应用提供便利。

1.2.2. 能控性矩阵 $[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$ 判据分析

能控性是现代控制理论中的重要概念, 它描述了系统的输入能否在有限时间内将系统从任意初始状态转移到指定状态。能控性矩阵 $[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$ 在能控性判据中起着核心作用[4]。

根据能控性的定义和线性代数理论, 对于一个 n 维线性时不变系统, 当且仅当能控性矩阵 $[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$ 为 n 时, 系统是完全能控的。这是因为能控性矩阵的列向量张成了系统的能控子空间, 若其秩为 n , 则能控子空间与状态空间相同, 意味着系统的任意状态都能被控制。

从线性代数秩的角度分析, 能控性矩阵的秩反映了其列向量之间的线性相关性。若秩小于 n , 则存在一些状态无法通过输入进行控制, 这些状态对应着能控性矩阵列向量的线性相关部分。通过对能控性矩阵秩的计算和分析, 可以快速判断系统的能控性, 为控制系统的设计和分析提供重要依据。

1.2.3. 观测子空间在卡尔曼滤波中的正交投影表示

卡尔曼滤波是一种在现代控制理论中广泛应用的最优估计方法, 用于在存在噪声的情况下对系统状态进行准确估计[5]。观测子空间在卡尔曼滤波中扮演着重要角色, 它可以通过正交投影的方式进行表示。

设系统的状态空间模型为 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 、 $y(t) = Cx(t) + v(t)$, 其中 $v(t)$ 是观测噪声。观测子空间是由观测向量 $y(t)$ 张成的向量空间。根据线性代数中的正交投影理论, 系统状态 $x(t)$ 在观测子空间上的正交投影 $\hat{x}(t)$ 可以通过卡尔曼滤波器进行计算。

卡尔曼滤波算法利用了观测子空间的正交投影特性, 通过不断更新估计值, 使得估计误差的协方差最小化。具体来说, 卡尔曼增益矩阵 $K(t)$ 的计算就是基于观测子空间的正交投影原理, 它调整了观测信息对状态估计的影响程度。这种基于正交投影的表示方法, 使得卡尔曼滤波在处理噪声干扰下的状态估计问题时具有高效性和准确性, 在许多实际工程领域, 如导航、通信等, 都有广泛应用。

1.3. 矩阵分解的物理意义

1.3.1. 舒尔分解在系统稳定性分析中的应用

舒尔分解是矩阵分析中的一种重要分解方法, 对于任意方阵 A , 存在酉矩阵 U , 使得 $A = URU^H$, 其中 R 是上三角矩阵, 其对角线元素即为 A 的特征值[6]。

在系统稳定性分析中, 舒尔分解具有重要应用。由于系统的稳定性与矩阵 A 的特征值密切相关, 通过舒尔分解将矩阵 A 转化为上三角形式, 可以更直观地观察和分析特征值的分布情况。例如, 若 R 的所有对角线元素(即 A 的特征值)实部均为负, 则系统是渐近稳定的。

此外, 舒尔分解还可以用于简化系统的计算和分析。在一些复杂的控制系统中, 通过对系统矩阵进行舒尔分解, 可以将系统分解为多个子系统, 分别对这些子系统进行分析和设计, 从而降低系统分析的复杂度, 提高设计效率。

1.3.2. QR 分解与最小二乘估计的数值稳定性

QR 分解是将矩阵分解为正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R 的乘积, 即 $A=QR$ 。在最小二乘估计问题中, QR 分解被广泛应用, 以提高计算的数值稳定性。

最小二乘估计常用于求解线性方程组 $Ax=b$ 在超定情况下(方程个数大于未知数个数)的最优解。传统的直接求解方法在矩阵 A 病态(条件数较大)时, 容易产生较大的计算误差。而利用 QR 分解, 将方程组 $Ax=b$ 转化为 $QRx=b$, 由于 Q 是正交矩阵, $|Q|_2=1$, 其数值稳定性好, 不会放大计算误差。

具体计算时, 先将 b 投影到 Q 的列空间上, 得到 $Q^H b$, 然后求解上三角方程组 $Rx=Q^H b$, 可以得到更准确的最小二乘解。QR 分解在信号处理、系统辨识等领域的最小二乘估计问题中, 有效提高了计算结果的精度和可靠性, 确保了相关算法的稳定性和有效性。

1.3.3. 奇异值分解(SVD)在模型降阶中的几何解释

奇异值分解是一种强大的矩阵分解方法, 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A , 存在酉矩阵 $U(m \times m)$ 、 $V(n \times n)$ 和非负对角矩阵 $\Sigma(m \times n)$, 使得 $A=U\Sigma V^H$, 其中 Σ 的对角元素 $\sigma_i (i=1, \dots, \min(m, n))$ 称为 A 的奇异值。

在模型降阶中, 奇异值分解具有直观的几何解释。从几何角度看, 矩阵 A 可以看作是从 n 维向量空间 R^n 到 m 维向量空间 R^m 的线性变换。奇异值 σ_i 反映了这个线性变换在不同方向上的“伸缩”程度。较大的奇异值对应着变换中能量较大的方向, 而较小的奇异值对应着能量较小的方向。

在模型降阶时, 可以通过保留较大的奇异值及其对应的奇异向量, 忽略较小的奇异值, 来实现对原模型的近似。这样得到的降阶模型能够在保留原模型主要特征的同时, 大大降低模型的复杂度。

2. 矩阵分析方法的控制理论融合路径

2.1. 特征结构分析法

2.1.1. 特征值配置与极点 Placement 的 Vandermonde 矩阵方法

特征值配置是现代控制理论中设计控制器的重要方法之一, 其目的是通过选择合适的反馈增益矩阵, 使闭环系统具有期望的动态性能, 而极点 placement (极点配置)是特征值配置的一种常用手段。Vandermonde 矩阵在特征值配置和极点 placement 中发挥着重要作用。

对于一个 n 维线性时不变系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, 通过状态反馈 $u(t)=-Kx(t)$, 闭环系统的状态方程变为 $\dot{x}(t)=(A-BK)x(t)$ 。希望通过选择反馈增益矩阵 K , 使闭环系统矩阵 $A-BK$ 具有期望的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

利用 Vandermonde 矩阵方法, 首先构造 Vandermonde 矩阵 V , 其第 i 列元素为 $[1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{n-1}]^T (i=1, \dots, n)$ 。根据线性代数理论, 存在唯一的矩阵 K 满足期望的特征值配置条件。通过求解相关的线性方程组, 可以得到反馈增益矩阵 K 的表达式。这种方法基于线性代数的原理, 为特征值配置和极点 placement 提供了一种系统的、可计算的方法, 在控制系统设计中具有重要应用。

此方法的局限性为: 1) Vandermonde 矩阵在特征值接近或阶数较高时易出现病态(条件数大), 导致求逆误差放大。实际应用中常采用鲁棒性更强的算法(如 Ackermann 公式或 QR 分解); 2) 适用系统类型: 单输入系统可直接使用, 但需特征值互异; 多输入系统: 需额外处理(如降维到单输入设计), 且解不唯一; 3) 仅适用于完全能控系统。若系统不完全能控, 需先分解能控/不能控子空间。

2.1.2. 模态矩阵在状态反馈线性化中的应用

模态矩阵是与系统特征值和特征向量密切相关的矩阵。对于一个线性时不变系统, 其特征值 λ_i 对应的特征向量 $v_i (i=1, \dots, n)$ 构成模态矩阵 $P=[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ 。在状态反馈线性化中, 模态矩阵起着关键作用。对于一些非线性系统, 可以通过适当的坐标变换, 将其转化为线性系统进行分析和控制。利用模态矩阵

进行坐标变换 $x=Pz$, 将原系统的状态方程 $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$ 转化为关于 z 的方程 $\dot{z}(t)=P^{-1}f(Pz(t),u(t))$ 。在一定条件下, 这种变换可以实现系统的线性化。

2.1.3. 广义特征向量在非对称系统解耦中的角色

在非对称系统中, 由于矩阵的非对称性, 传统的基于特征向量的解耦方法可能不再适用。广义特征向量在解决非对称系统解耦问题中发挥着重要作用。

对于矩阵 A 和 B , 若存在非零向量 x 和标量 λ , 满足 $(A-\lambda B)x=0$, 则 x 称为广义特征向量, λ 称为广义特征值。在非对称系统解耦中, 通过求解广义特征值问题, 可以得到一组广义特征向量, 利用这些广义特征向量构造变换矩阵, 对系统进行变换, 实现系统的解耦。

2.2. 矩阵微分方程理论

2.2.1. 状态转移矩阵 e^{At} 的解析计算(拉普拉斯变换法)

状态转移矩阵 e^{At} 在现代控制理论中至关重要, 它描述了线性时不变系统在无输入情况下, 从初始时刻 t_0 到任意时刻 t 状态的演变关系, 即 $x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ 。拉普拉斯变换法是求解 e^{At} 的常用解析方法。

根据拉普拉斯变换的定义和性质, 对 e^{At} 进行拉普拉斯变换可得: $\mathcal{L}\{e^{At}\}=(sI-A)^{-1}$, 其中 s 为拉普拉斯变量, I 为单位矩阵。这里利用了拉普拉斯变换的一个重要公式: 若 $F(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 则 $e^{at}F(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s-a)$, 对于 e^{At} , 将其看作是指数矩阵函数, 通过类比普通指数函数的拉普拉斯变换推导得到。

然后, 对 $(sI-A)^{-1}$ 进行拉普拉斯反变换, 即可得到 e^{At} 的表达式。在实际计算中, 通常需要先对 $(sI-A)^{-1}$ 进行化简, 比如利用矩阵的初等变换将其化为更便于求逆的形式, 再结合拉普拉斯反变换的性质和常用函数的拉普拉斯变换对来求解。

2.2.2. 时变系统 $\mathcal{O}(t, t_0)$ 的 Peano-Baker 级数展开

对于时变系统, 状态转移矩阵 $\mathcal{O}(t, t_0)$ 不能像线性时不变系统那样简单地表示为 $e^{A(t-t_0)}$, Peano-Baker 级数展开为求解时变系统的状态转移矩阵提供了一种有效的途径。

时变系统的状态方程一般表示为 $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$, 其状态转移矩阵 $\mathcal{O}(t, t_0)$ 满足

$\frac{d}{dt}\mathcal{O}(t, t_0)=A(t)\mathcal{O}(t, t_0)$, 且 $\mathcal{O}(t_0, t_0)=I$ 。Peano-Baker 级数展开式为:

$$\mathcal{O}(t, t_0)=I+\int_{t_0}^t A(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_0}^t\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1)A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\int_{t_0}^t\int_{t_0}^{\tau_1}\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1)A(\tau_2)A(\tau_3)d\tau_3d\tau_2d\tau_1+\cdots$$

该级数展开式从数学上精确地描述了时变系统状态转移矩阵的构成。其每一项都反映了系统矩阵 $A(t)$ 在不同时刻的积分作用对状态转移的影响。在实际应用中, 根据系统的复杂程度和计算精度要求, 可以截取级数的前几项来近似计算 $\mathcal{O}(t, t_0)$ 。

2.2.3. 李代数在非线性系统近似线性化中的矩阵表示

李代数是研究非线性系统的重要数学工具, 在非线性系统近似线性化中, 李代数通过矩阵表示发挥关键作用。

对于非线性系统 $\dot{x}(t)=f(x(t))$, 其中 $f(x)$ 是关于状态变量 x 的非线性向量函数。利用李代数的概念, 定义李导数: 若 $h(x)$ 是一个标量函数, $f(x)$ 是向量函数, 则 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 的李导数为

$$L_f h(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)。$$

进一步, 可以定义高阶李导数, 如 $L_f^2 h(x)=L_f(L_f h(x))$ 。通过李导数, 可以构建系统的线性化近似

模型。

3. 结束语

综上所述, 线性代数与矩阵分析深度融入现代控制理论, 从理论基础搭建到实际工程应用, 为控制理论的发展提供了关键动力。在理论层面, 二者构建起精确描述系统特性的数学框架; 在实践中, 针对数值稳定性与计算效率等挑战, 各类优化算法和技术不断涌现, 将向更高维度拓展——从确定性系统到随机系统、从集中式控制到分布式协同控制, 矩阵理论中的随机矩阵、张量分析等工具将发挥更关键的作用。

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金项目(C类)(项目编号: 62303323, 62403303); 上海市“科技创新行动计划”启明星培育扬帆专项(项目编号: 23YF1414600); 上海电力大学教学改革项目(项目编号: A-0201-24-302-084); 2025年“上海高校青年教师培养资助计划”。

参考文献

- [1] 唐扬斌, 陈挚, 戴清平. 关于线性代数课程引入的思考[J]. 湖南工业大学学报, 2010, 24(2): 77-79.
- [2] 方次军. 线性代数教学的两点思考[J]. 科技资讯, 2013(9): 209.
- [3] 孙黎, 杜清河. 基于工程视角的矩阵分析课程建设[J]. 电气电子教学学报, 2019, 41(5): 36-41.
- [4] 冯雪晴. Matlab 矩阵与数值线性代数函数库的 MSVL 实现[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2023.
- [5] 冯雅欣. 线性代数理论在金融数据分析中的运用[J]. 支点, 2023(S1): 106-108.
- [6] 田恪明, 苏勇. “互联网+”背景下线性代数混合式教学模式探究[J]. 现代商贸工业, 2025(12): 223-225.