

D_5 型电子李代数的单Quasi-Whittaker模

李志凌, 申 冉*

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2025年5月17日; 录用日期: 2025年6月13日; 发布日期: 2025年6月25日

摘 要

本文主要对 D_5 型电子李代数的单Quasi-Whittaker模进行了分类, 通过讨论Quasi-Whittaker模的极大真子模给出了Quasi-Whittaker模是单模的充要条件。

关键词

电子李代数, Quasi-Whittaker模, 单模

The Simple Quasi-Whittaker Modules for Electrical Lie Algebra of Type D_5

Zhiling Li, Ran Shen*

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: May 17th, 2025; accepted: Jun. 13th, 2025; published: Jun. 25th, 2025

Abstract

In this paper, we mainly investigate the simple Quasi-Whittaker modules for electrical Lie algebra of Type D_5 . We discuss the maximum proper submodules of electrical Lie algebra of type D_5 and obtain the classification of simple Quasi-Whittaker modules.

Keywords

Electrical Lie Algebra, Quasi-Whittaker Modules, Simple Submodules

*通讯作者。



Open Access

1. 引言

李代数的表示理论因其在理论物理中的重要应用而得到广泛关注。对于李代数的权表示,例如 Harish-Chandar 模、最高权模、Verma 模等的分类,已有大量的研究成果。对于非权模的研究,如 Whittaker 模、 $\mathfrak{h}$ -自由模、Quasi-Whittaker 模等的分类,也有一些结果。例如,文献[1]-[4]研究了 Virasoro 代数、Heisenberg-Virasoro 代数、Weyl 代数等,无限维李代数的 Whittaker 模的分类。

Quasi-Whittaker 模可以看作是 Whittaker 模的一种推广,它在构造和性质上更加灵活,能够适应更广泛的代数结构和表示理论研究。这是因为 Quasi-Whittaker 模的构造不依赖于三角分解,这使得它在处理某些非半单李代数时更具优势。2014 年, Y. Cai 等人提出了 Quasi-Whittaker 模的概念,并给出了 Schrödinger 代数的单 Quasi-Whittaker 模的分类[5]。2015 年, X. Zhang 和 Y. Cheng 证明了一个上局部分有限模或是一个最高权模,或是一个 Whittaker 模,或是一个 Quasi-Whittaker 模。同时,他们还对 Schrödinger 代数的 Whittaker 模进行了分类[6]。之后, Quasi-Whittaker 模的表示引起了一些研究者的兴趣,相关研究可参考文献[7]。但对于电子李代数的 Quasi-Whittaker 模的分类,目前尚未有相关研究。

本文主要研究 D_5 型电子李代数单 Quasi-Whittaker 模的分类,通过计算极大真子模给出了 Quasi-Whittaker 模为单模的充分必要条件。

2. 预备知识

本节主要介绍一些相关的基本概念。

在文献[8]中给出了 D_5 型电子李代数 $\mathfrak{e}_{D_5}$ 的结构,即 $\mathfrak{e}_{D_5}$ 有一组基

$$\{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f, v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1, w_1^-, w_2^-, z\},$$

其对应李括积见表 1。

Table 1. Lie bracket of $\mathfrak{e}_{D_5}$

表 1. $\mathfrak{e}_{D_5}$ 的李括积

$[\cdot, \cdot]$	e	p_2^+	p_1^+	h	p_1	p_2	p_3	p_1^-	p_2^-	f	v^+	v_1	v_2	v^-	w_2^+	w_1^+	w_1	w_1^-	w_2^-	z
e	0	0	0	$-2e$	0	0	0	$-p_1^+$	p_2^+	h	0	0	0	$-v^+$	0	0	0	w_1^+	$-w_2^+$	0
p_2^+	0	0	$2e$	$-p_2^+$	p_2^+	0	p_1^+	$h - p_1$	$-2p_2$	$-p_2^-$	0	v^+	0	$-v_2$	0	0	$2w_1^+$	0	w_1	0
p_1^+	0	$2e$	0	$-p_1^+$	$-p_1^+$	p_2^+	0	$-2p_3$	$h + p_1$	p_1^-	0	0	$-v^+$	$-v_1$	0	0	$2w_2^+$	w_1	0	0
h	$2e$	p_2^+	p_1^+	0	0	0	0	$-p_1^-$	$-p_2^-$	$-2f$	v^+	0	0	$-v^-$	w_2^+	w_1^+	0	$-w_1^-$	$-w_2^-$	0
p_1	0	$-p_2^+$	p_1^+	0	0	$-2p_2$	$2p_3$	p_1^-	$-p_2^-$	0	0	v_1	$-v_2$	0	w_2^+	$-w_1^+$	0	$-w_1^-$	w_2^-	0
p_2	0	0	$-p_2^+$	0	$2p_2$	0	$-p_1$	p_2^-	0	0	0	$-v_2$	0	0	$-w_1^+$	0	0	0	w_1^-	0
p_3	0	$-p_1^+$	0	0	$-2p_3$	p_1	0	0	p_1^-	0	0	0	$-v_1$	0	0	$-w_2^+$	0	w_2^-	0	0
p_1^-	p_1^+	$-h + p_1$	$3p_3$	p_1^-	$-p_1^-$	$-p_2^-$	0	0	$-2f$	0	v_1	0	$-v^-$	0	0	w_1	$2w_2^-$	0	0	0
p_2^-	p_2^+	$2p_2$	$-h - p_1$	p_2^-	p_2^-	0	$-p_1^-$	$2f$	0	0	$-v_2$	$-v^-$	0	0	w_1	0	$2w_1^-$	0	0	0

续表

f	$-2h$	p_2^-	$-p_1^-$	$2f$	0	0	0	0	0	0	$-v^-$	0	0	0	$-w_2^+$	w_1^-	0	0	0	0
v^+	0	0	0	$-v^+$	0	0	0	$-v_1$	v_2	v^-	0	$2w_2^+$	$2w_1^+$	$-w_1-z$	0	0	0	0	0	0
v_1	0	$-v^+$	0	0	$-v_1$	v_2	0	0	v^-	0	$-2w_2^+$	0	w_1-z	$-2w_2^-$	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	v^+	0	v_2	0	v_1	v^-	0	0	$-2w_1^+$	$-w_1+z$	0	$2w_1^-$	0	0	0	0	0	0
v^-	v^+	v_2	v_1	v^-	0	0	0	0	0	0	w_1+z	$2w_2^-$	$-2w_1^-$	0	0	0	0	0	0	0
w_2^+	0	0	0	$-w_2^-$	$-w_2^+$	w_1^+	0	0	$-w_1$	w_2^-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1^+	0	0	0	$-w_1^+$	w_1^+	0	w_2^+	$-w_1$	0	$-w_1^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1	0	$-2w_1^+$	$-2w_2^+$	0	0	0	0	$-2w_2^-$	$-2w_1^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w_1^-	$-w_1^+$	0	$-w_1$	w_1^-	w_1^-	0	$-w_2^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w_2^-	w_2^+	$-w_1$	0	w_2^-	$-w_2^-$	$-w_1^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

令 $\mathcal{L} = \epsilon_{D_5}$, $\mathcal{S} = \text{span}\{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, $\mathcal{G} = \text{span}\{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1^-, w_2^-, z\}$ 。易知 $\mathcal{G}, \mathcal{R}$ 是 $\mathcal{L}$ 的理想, 且 $\mathcal{G}$ 是一个极大理想, $\mathcal{L}$ 的中心 $Z(\mathcal{L}) = \mathbb{C}z$ 。文献[9]中, 证明了 $\mathcal{S} \cong \mathfrak{sp}_4$, $\mathcal{G} \cong \mathfrak{g}(T_4, c)$, 其中 $\mathfrak{sp}_4$ 为辛李代数, $\mathfrak{g}(T_4, c)$ 为二步幂零李代数。故有

引理 2.1. [9] D_5 型电子李代数

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \ltimes \mathcal{G} \cong \mathfrak{sp}_4 \ltimes \mathfrak{g}(T_4, c).$$

定义 2.1 [6] 设任意的 $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个李代数同态, 我们将其称为 Quasi-Whittaker 函数。令 V 是一个 $\mathcal{L}$ 模。

(i) 若存在一个非零向量 $v \in V$ 满足 $xv = \phi(x)v$, 对于 $\forall x \in \mathcal{G}$ 均成立, 则称 v 是一个 Quasi-Whittaker 向量。

(ii) 若 V 包含一个循环 Quasi-Whittaker 向量 v , 则称 V 是 $\mathcal{L}$ 的一个 Quasi-Whittaker 模。

注 2.1 由定义很容易得出, $\phi(z) = 0$ 。

引理 2.2 若 ϕ 是一个零同态。则 V 是一个单 Quasi-Whittaker 模当且仅当他是一个单 $\mathcal{S}$ -模。也就是说, $\mathcal{G}V = 0$ 。

证明. 因为 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个理想, 所以 $\{v | \mathcal{G}v = 0\}$ 是一个 $\mathcal{L}$ -子模。□

定义 $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非零李代数同态, 定义一个一维 $\mathcal{G}$ -模 $\mathbb{C}_\phi = \mathbb{C}w$, 其中 $xw = \phi(x)w$, $zw = 0$, $\forall x \in \mathcal{G}$ 。则

$$M_\phi = u(\mathcal{L}) \otimes_{u(\mathcal{G})} \mathbb{C}_\phi.$$

叫做 ϕ 的泛 Quasi-Whittaker 模。

对于 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, 则 M_ϕ 有如下基

$$\left\{ h^{k_1} (p_1)^{k_2} (p_2)^{k_3} (p_3)^{k_4} e^{k_5} f^{k_6} (p_2^+)^{k_7} (p_2^-)^{k_8} (p_1^+)^{k_9} (p_1^-)^{k_{10}} w \mid k_i \in \mathbb{N}, w \in V \right\}.$$

若 $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个零同态, 由引理 1.2 知, M_ϕ 为单 Quasi-Whittaker 模当且仅当 M_ϕ 为单 $\mathcal{S}$ -模。

引理 2.3 对于 $\forall x, y \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$, $[x, y^n]$ 由换位运算表 2 给出。

证明. 经过基础运算便可以得出。□

Table 2. Multiplication table of $[x, y^n]$ **表 2.** $[x, y^n]$ 换位运算表

$[x, y^n]$	e^n	$(p_2^+)^n$	$(p_1^+)^n$	h^n	$(p_1)^n$
v^+	0	0	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i h^{n-i} v^+$	0
v_1	0	$-n(p_2^+)^{n-1}$	0	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i (p_1)^{n-i} v_1$
v_2	0	0	$-n(p_1^+)^{n-1} v^+$	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (p_1)^{n-i} v_2$
v^-	$-ne^{n-1} v^+$	$-n(p_2^+)^{n-1} v_2$	$-n(p_1^+)^{n-1} v_1$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} h^{n-i} v^-$	0
w_2^+	0	0	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i h^{n-i} w_2^+$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i (p_1)^{n-i} w_2^+$
w_1^+	0	0	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i h^{n-i} w_1^+$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (p_1)^{n-i} w_1^+$
w_1	0	$-2n(p_2^+)^{n-1} w_1^+$	$-2n(p_1^+)^{n-1} w_2^+$	0	0
w_1^-	$-ne^{n-1} w_1^+$	0	$-n(p_1^+)^{n-1} w_1$ $+n(n-1)(p_1^+)^{n-2} w_1$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i h^{n-i} w_1^-$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i (p_1)^{n-i} w_1^-$
w_2^-	$ne^{n-1} w_2^+$	$-n(p_2^+)^{n-1} w_1$ $+n(n-1)(p_2^+)^{n-2} w_1$	0	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i h^{n-i} w_2^-$	$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (p_1)^{n-i} w_2^-$
z	0	0	0	0	0
$[x, y^n]$	$(p_2)^n$	$(p_3)^n$	$(p_1^-)^n$	$(p_2^-)^n$	f^n
v^+	0	0	$-n(p_1^-)^{n-1} v_1$	$-n(p_2^-)^{n-1} v_2$	$-nf^{n-1} v^-$
v_1	$-n(p_2)^{n-1} v_2$	0	0	$-n(p_2^-)^{n-1} v^-$	0
v_2	0	$-n(p_3)^{n-1} v_1$	$-n(p_1^-)^{n-1} v^-$	0	0
v^-	0	0	0	0	0
w_2^+	$n(p_2)^{n-1} w_1^+$	0	0	$n(p_2^-)^{n-1} w_1$ $+n(n-1)(p_2^-)^{n-2} w_1$	$nf^{n-1} w_2^-$
w_1^+	0	$n(p_3)^{n-1} w_2^+$	$-n(p_1^-)^{n-1} w_1$ $+n(n-1)(p_1^-)^{n-2} w_1$	0	$-nf^{n-1} w_1^-$
w_1	0	0	$-2n(p_1^-)^{n-1} w_2^-$	$-2n(p_2^-)^{n-1} w_1^-$	0

续表

w_1^-	0	$-n(p_3)^{n-1} w_2^-$	0	0	0
w_2^-	$-n(p_2)^{n-1} w_1^-$	0	0	0	0
z	0	0	0	0	0

引理 2.4 令 w 是一个 Quasi-Whittaker 向量, 对于 $w' = uw, u \in u(\mathcal{L})$, 则对 $\forall x \in y$,

$$(x - \phi(x))w' = [x, u]w.$$

证明. 由定义可得 $xw = \phi(x)w, \forall x \in \mathcal{G}$. 所以

$$(x - \phi(x))w' = (x - \phi(x))uw = xuw - u\phi(x)w = xuw - uxw = [x, u]w. \quad \square$$

3. $\mathcal{L}$ 的单 Quasi-Whittaker 模的分类

本节将通过讨论 $\mathcal{L}$ 的单 Quasi-Whittaker 模的极大真子模来对单 Quasi-Whittaker 模进行分类。

定义 $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非零李代数同态, $y \in \{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, 构造集合

$$\Phi(y) = \{x \in \{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1^-, w_2^-, z\} \mid [x, y] \neq 0\},$$

$$Y = \{y \in \{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\} \mid \phi(x) = 0, \forall x \in \Phi(y)\}.$$

定理 3.1 设 w 为一个循环 Quasi-Whittaker 向量, 则

(i) 当 $Y = \emptyset$ 时, 则 M_ϕ 是不可约的;

(ii) 当 $Y \neq \emptyset$ 时, 则 $V = C[Y]w$ 是 M_ϕ 的极大真子模。

证明. 设 $u = \sum u_i w$ 为 Quasi-Whittaker 向量, 其中 $u_i \in u(\mathcal{S})$ 且

$$u_i = a(k_i) (p_2^+)^{k_1^i} (p_2^-)^{k_2^i} (p_1^+)^{k_3^i} (p_1^-)^{k_4^i} h^{k_5^i} (p_1)^{k_6^i} (p_2)^{k_7^i} (p_3)^{k_8^i} e^{k_9^i} f^{k_{10}^i}, \quad a(k_i) \in \mathbb{C}; \quad i, k_j^i \in \mathbb{N}.$$

令 $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非零李代数同态, 则对 $\forall x \in \mathcal{G}$, 有

$$xu = \phi(x)u.$$

即

$$(x - \phi(x))u = 0, \quad x \in \mathcal{G},$$

另一方面, 由引理 2.4

$$(x - \phi(x))u = [x, \sum u_i]w, \quad x \in \mathcal{G},$$

所以

$$[x, \sum u_i]w = 0.$$

记 D_ϕ 为 $\{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1^-, w_2^-, z\}$ 中使得 $\phi(x) = 0$ 的 x 的个数, 则 $0 \leq D_\phi \leq 8$. 记 V_{D_ϕ} 表示该条件下的极大真子模。

(1) 当 $D_\phi = 0$ 时,

将 $\sum u_i$ 按字典序 $(p_2^+, p_2^-, p_1^+, p_1^-, h, p_1, p_2, p_3, e, f)$ 排列, 设 $\sum u_i$ 的最高次项

$$u_0 = a(k_0) (p_2^+)^{k_1^0} (p_2^-)^{k_2^0} (p_1^+)^{k_3^0} (p_1^-)^{k_4^0} h^{k_5^0} (p_1)^{k_6^0} (p_2)^{k_7^0} (p_3)^{k_8^0} e^{k_9^0} f^{k_{10}^0}, \quad \text{令 } x = w_1, \text{ 则}$$

$$[w_1, \sum u_i]w = \left[w_1, \sum a(k_i)(p_2^+)^{k_1^i}(p_2^-)^{k_2^i}(p_1^+)^{k_3^i}(p_1^-)^{k_4^i}h^{k_5^i}(p_1)^{k_6^i}(p_2)^{k_7^i}(p_3)^{k_8^i}e^{k_9^i}f^{k_{10}^i} \right]w = 0.$$

由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} & \left[w_1, a(k_0)(p_2^+)^{k_1^0}(p_2^-)^{k_2^0}(p_1^+)^{k_3^0}(p_1^-)^{k_4^0}h^{k_5^0}(p_1)^{k_6^0}(p_2)^{k_7^0}(p_3)^{k_8^0}e^{k_9^0}f^{k_{10}^0} \right]w \\ &= -2a(k_0)k_1^0(p_2^+)^{k_1^0-1}w_1^+(p_2^-)^{k_2^0}(p_1^+)^{k_3^0}(p_1^-)^{k_4^0}h^{k_5^0}(p_1)^{k_6^0}(p_2)^{k_7^0}(p_3)^{k_8^0}e^{k_9^0}f^{k_{10}^0}w \\ &= 0. \end{aligned}$$

由 $\phi(w_1^+) \neq 0$, 所以 $k_1^0 = 0$ 。同理可得 $k_2^0 = k_3^0 = k_4^0 = 0$ 。由 u_0 是最高次项, 任意 u_i 有形式

$$u = \sum u_i w, u_i = a(k_i)h^{k_5^i}(p_1)^{k_6^i}(p_2)^{k_7^i}(p_3)^{k_8^i}e^{k_9^i}f^{k_{10}^i}.$$

再将 $\sum u_i$ 按新字典序 (h, p_1, p_2, f, e, p_3) 排列, 设 $\sum u_i$ 的最高次项

$$u_1 = a(k_1)h^{k_5^1}(p_1)^{k_6^1}(p_2)^{k_7^1}f^{k_{10}^1}e^{k_9^1}(p_3)^{k_8^1}。令 x = w_2^+, 则$$

$$[w_2^+, \sum u_i]w = \left[w_2^+, \sum a(k_i)h^{k_5^i}(p_1)^{k_6^i}(p_2)^{k_7^i}f^{k_{10}^i}e^{k_9^i}(p_3)^{k_8^i} \right]w = 0.$$

由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} & \left[w_2^+, a(k_1)h^{k_5^1}(p_1)^{k_6^1}(p_2)^{k_7^1}f^{k_{10}^1}e^{k_9^1}(p_3)^{k_8^1} \right]w \\ &= a(k_1)\sum_{i=1}^{k_5^1} \binom{k_5^1}{i} (-1)^i h^{k_5^1-i} w_2^+(p_1)^{k_6^1}(p_2)^{k_7^1}f^{k_{10}^1}e^{k_9^1}(p_3)^{k_8^1}w = 0. \end{aligned}$$

故

$$\binom{k_5^1}{i} = 0, k_1^1 \geq i \geq 1.$$

由 $\phi(w_2^+) \neq 0$, 所以 $k_5^1 = 0$ 。同理可得 $k_6^1 = k_7^1 = k_{10}^1 = 0$ 。所以

$$u = \sum u_i w, u_i = a(k_i)(p_3)^{k_8^i}e^{k_9^i}.$$

将 u_i 按新字典序 (p_3, e) 排列, $\sum u_i$ 的最高次项 $u_2 = a(k_2)(p_3)^{k_8^2}e^{k_9^2}$ 。令 $x = w_1^-$, 则

$$[w_2^+, \sum u_i]w = \left[w_2^+, \sum a(k_i)(p_3)^{k_8^i}e^{k_9^i} \right]w = 0.$$

由引理 2.3 得

$$\left[w_2^+, a(k_2)(p_3)^{k_8^2}e^{k_9^2} \right]w = -a(k_2)k_8^1(p_3)^{k_8^1-1}w_2^-e^{k_9^2} = 0.$$

由 $\phi(w_2^-) \neq 0$, 所以 $k_8^2 = 0$ 。同理可得 $k_9^2 = 0$ 。

所以, 当 $\forall x \in \mathcal{G}$, $\phi(x) \neq 0$ 时, $k_j^i = 0$ 。则 $V = a(k_i)w = \mathbb{C}w$, 即 M_ϕ 不可约, 此时 $Y = \emptyset$ 。

(2) 当 $1 \leq D_\phi \leq 2$ 时, 计算方法同(1), 则 $V_{1,2} = V_0 = \mathbb{C}w$, 此时 $Y = \emptyset$ 。

(3) 当 $D_\phi = 3$ 时,

(i) 若 $\phi(w_2^+) = \phi(w_1^+) = \phi(v^+) = 0$, 则 $V_3 = C[f]w$;

(ii) 若 $\phi(w_2^-) = \phi(w_1^-) = \phi(v^-) = 0$, 则 $V_3 = C[e]w$;

(iii) 若 $\phi(w_2^+) = \phi(w_2^-) = \phi(v_1) = 0$, 则 $V_3 = C[p_2]w$;

(iv) 若 $\phi(w_2^-) = \phi(w_1^-) = \phi(v^-) = 0$, 则 $V_3 = C[p_3]w$;

在上述条件下, $V_3 \subseteq V = C[Y]w$ 。

(v) 其余情况 $V_3 = \mathbb{C}w$, 此时 $Y = \emptyset$ 。

(4) 当 $D_\phi = 4$ 时,

(i) $V_3 \subseteq V_4$ 。而当 V_4 满足 V_3 的条件时, 可以证得 $V_4 \cong V_3$;

(ii) 若 $\phi(w_2^-) = \phi(w_1) = \phi(v_1) = \phi(v^-) = 0$, 则 $V_4 = C[p_2^+]w$;

(iii) 若 $\phi(w_1^-) = \phi(w_1) = \phi(v_2) = \phi(v^-) = 0$, 则 $V_4 = C[p_1^+]w$;

(iv) 若 $\phi(w_2^+) = \phi(w_1) = \phi(v_1) = \phi(v^+) = 0$, 则 $V_4 = C[p_2^-]w$;

(v) 若 $\phi(w_1^+) = \phi(w_1) = \phi(v_2) = \phi(v^-) = 0$, 则 $V_4 = C[p_1^-]w$;

在上述条件下, $V_4 \subseteq V = C[Y]w$ 。

(vi) 其余情况 $V_4 = \mathbb{C}w$, 此时 $Y = \emptyset$ 。

(5) 当 $D_\phi = 5$ 时,

(i) 若 $\exists y \in \{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, 使得 $\phi(x)$ 满足对使得 $[x, y] \neq 0$ 的所有 $x \in \{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1, w_1^-, w_2^-, z\}$, 均有 $\phi(x) = 0$, 此时可以构造出唯一极大真子模 $V = C[Y]w$, 且 $Y \neq \emptyset$ 。

(ii) 若 $\forall y \in \{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, 使得 $\phi(x)$ 满足对使得 $[x, y] \neq 0$ 的所有 $x \in \{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1, w_1^-, w_2^-, z\}$, 存在 $\phi(x) \neq 0$ 。则 $Y = \emptyset$ 。

(6) 当 $6 \leq D_\phi \leq 8$ 时,

此时我们可以发现, 当 $D_\phi = 6$ 时, 一共有 $C_4^2 C_5^4 + C_4^3 C_5^3 = 70$ 种情况满足存在唯一极大真子模 $V = C[Y]w$, 且 $Y \neq \emptyset$ 。同理, $D_\phi = 7, 8$ 时, 也必定存在唯一极大真子模 $V = C[Y]w$, 且 $Y \neq \emptyset$ 。所以当 $6 \leq D_\phi \leq 8$ 时, 一定存在至少一个 $y \in \{e, p_2^+, p_1^+, h, p_1, p_2, p_3, p_1^-, p_2^-, f\}$, 使得 $\phi(x)$ 满足对使得 $[x, y] \neq 0$ 的所有 $x \in \{v^+, v_1, v_2, v^-, w_2^+, w_1^+, w_1, w_1^-, w_2^-, z\}$, 均有 $\phi(x) = 0$ (其中所涉及的计算方法与(1)相同)。所以, 我们至少可以取一个这样的 y 构造出当 $6 \leq D_\phi \leq 8$ 时的唯一极大真子模 $V = C[Y]w$, 同时这样的 y 保证了 $Y \neq \emptyset$ 。

综上所述, 在情形(1), (2), (3)(v), (4)(vi), (5)(ii)中, $Y = \emptyset$, 则 M_ϕ 是不可约的。反之, $Y \neq \emptyset$, 则 $V = C[Y]w$ 是 M_ϕ 的极大真子模。□

由定理 3.1, $\mathcal{L}$ 的不可约 Quasi-Whittaker 模有如下分类定理:

定理 3.2 设 L 是 $\mathcal{L}$ 的不可约 Quasi-Whittaker 模, 则

(i) 若 $Y = \emptyset$, 则 $L \cong M_\phi$ 。

(ii) 若 $Y \neq \emptyset$, 则 $L \cong M_\phi / V$, 其中 $V = C[Y]w$ 。

参考文献

- [1] Kostant, B. (1978) On Whittaker Vectors and Representation Theory. *Inventiones Mathematicae*, **48**, 101-184. <https://doi.org/10.1007/bf01390249>
- [2] Benkart, G. and Ondrus, M. (2009) Whittaker Modules for Generalized Weyl Algebras. *Representation Theory of the American Mathematical Society*, **13**, 141-164. <https://doi.org/10.1090/s1088-4165-09-00347-1>
- [3] Guo, X. and Liu, X. (2011) Whittaker Modules over Generalized Virasoro Algebras. *Communications in Algebra*, **39**, 3222-3231. <https://doi.org/10.1080/00927872.2010.499119>
- [4] Chen, H. and Guo, X. (2013) New Simple Modules for the Heisenberg-Virasoro Algebra. *Journal of Algebra*, **390**, 77-86. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.04.039>
- [5] Cai, Y., Cheng, Y. and Shen, R. (2014) Quasi-Whittaker Modules for the Schrödinger Algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, **463**, 16-32. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.001>
- [6] Zhang, X. and Cheng, Y. (2015) Simple Schrödinger Modules Which Are Locally Finite over the Positive Part. *Journal*

- of Pure and Applied Algebra*, **219**, 2799-2815. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.09.029>
- [7] Cai, Y., Shen, R. and Zhang, J. (2016) Whittaker Modules and Quasi-Whittaker Modules for the Euclidean Lie Algebra $e(3)$. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **220**, 1419-1433. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.09.009>
- [8] Chen, Y. and Shen, R. (2024) Structure and Representations for Electrical Lie Algebra of Type D_5 . *Algebra Colloquium*, **31**, 271-284. <https://doi.org/10.1142/s100538672400021x>
- [9] Chen, Y., Shen, R. and Zhang, J. (2023) A Class of Simple Modules for Electrical Lie Algebra of Type D_5 . *Journal of Donghua University*, **40**, 232-236.