

不同视角和表示形式下空间直线位置的判断

刘倩*, 郭从洲, 王耀革

信息工程大学基础部数学教研室, 河南 郑州

收稿日期: 2025年5月18日; 录用日期: 2025年6月19日; 发布日期: 2025年7月10日

摘要

文章从在几何和代数两种角度下建立的直线方程出发, 探讨两种视角和不同表示形式下的空间直线位置的判断方法, 展示利用代数工具解决复杂几何问题的便捷, 并依托具体示例呈现数形结合思想在解析几何中的应用及重要作用。

关键词

解析几何, 空间直线, 位置关系, 线性方程组, 矩阵的秩

Determination of Spatial Straight Line Position from Different Perspectives and Representations

Qian Liu*, Congzhou Guo, Yaoge Wang

Mathematics Teaching and Research Section, Basic Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: May 18th, 2025; accepted: Jun. 19th, 2025; published: Jul. 10th, 2025

Abstract

This article starts with the linear equations established from two perspectives: geometry and algebra, and explores the methods for determining the position of spatial lines from these two perspectives and different representations. Showcasing the convenience of using algebraic tools to solve complex geometric problems and presenting the application and important role of the combination of numbers and shapes in analytic geometry through specific examples.

*通讯作者。

文章引用: 刘倩, 郭从洲, 王耀革. 不同视角和表示形式下空间直线位置的判断[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 1-6.
DOI: 10.12677/pm.2025.157198

Keywords

Analytic Geometry, Spatial Line, Relationship of Position, Linear Equation System, Rank of Matrix

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

向量是数学的基本概念之一，它既有大小和方向，又有代数运算，因此其具有几何代数二重性。既可以利用向量描述几何对象的特征，建立几何对象的向量方程，利用此形式方程研究几何对象的几何性质，还能引入坐标系，利用向量的坐标表示给出几何对象的代数方程，然后利用线性代数中的理论和工具研究其几何性质。两种角度各具优势和特点，可以根据研究对象的表现形式选择对应方法。特别是在研究一些形式较为复杂的几何问题时，常采用二者结合的方式，能起到事半功倍的作用。本文以两空间直线位置的判断为例，进行问题分析和方法展示。

2. 几何视角下空间直线位置的判断方法

几何对象向量方程的建立是提取几何对象的几何结构特征，用向量进行表示的过程。此时未引入坐标系，得到的是纯粹几何意义下的向量方程。

2.1. 空间直线的向量式方程

设一条空间直线 l_0 的向量式方程为：

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\mathbf{s}_0, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

其中， P_0 为直线 l_0 上的一个定点， P 为 l_0 上的动点， $\mathbf{s}_0$ 为 l_0 的方向向量。向量式方程直观体现了欧几里得几何中“过直线外一点有且仅有一条直线与已知直线平行”的几何事实[1]。

2.2. 向量式方程表示下两空间直线位置的判定

若另有一过点 P_1 且以 $\mathbf{s}_1$ 为方向向量空间直线 l_1 ，其向量式方程为：

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = t'\mathbf{s}_1, t' \in \mathbb{R} \quad (2)$$

这一向量式方程几何意义明显，我们可以直接通过两直线方向向量之间的关系得到两直线的位置关系。显然，如果 $\mathbf{s}_0 \parallel \mathbf{s}_1$ ，则有 $l_0 \parallel l_1$ ，此时若再存在 t 和 t' 使得 $\overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{s}_0 = \overrightarrow{OP_1} + t'\mathbf{s}_1$ 成立，则 l_0 与 l_1 存在公共点，两直线重合；当 $\mathbf{s}_0 \not\parallel \mathbf{s}_1$ 时， l_0 和 l_1 有可能相交，有可能异面，若存在 t 和 t' 使得 $\overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{s}_0 = \overrightarrow{OP_1} + t'\mathbf{s}_1$ 成立，即 $\overrightarrow{P_0P_1} = t\mathbf{s}_0 - t'\mathbf{s}_1$ ，则 l_0 和 l_1 有交点，若不存在，则 l_0 和 l_1 异面。

向量式方程完全在几何视角下根据几何对象的特征建立。在上述判断两空间直线位置的过程中，实际也是利用了两向量 $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1$ 是否共线及 $\overrightarrow{P_0P_1}, \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1$ 是否共面来判断两直线 l_0 和 l_1 是平行、重合、相交还是异面。

3. 代数视角下空间直线位置的判断方法

3.1. 空间直线的标准式方程

我们引入空间直角坐标系，所有的点都被赋予坐标，向量也有了坐标表示。假设 $O(0,0,0)$ 、 $P(x,y,z)$ 、

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、 $s_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ ，将点的坐标和向量的坐标表示代入方程(1)中，消去参数 t ，得到

$$\frac{x-x_0}{X_0} = \frac{y-y_0}{Y_0} = \frac{z-z_0}{Z_0} \quad (3)$$

这就是直线的标准方程，也称为对称式方程或点向式方程[1]。

3.2. 空间直线的一般式方程

空间直线还可以通过两平面相交得到。设平面 Π_1 的方程为 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ，平面 Π_2 的方程为 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ，两平面相交得到一条直线 l ，则 l 的方程为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中， $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 、 $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 分别为 Π_1 和 Π_2 的法向量。直线 l 的方向向量 $s \perp n_1$ 、 $s \perp n_2$ ，由两向量外积的定义可得 s 可由 $n_1 \times n_2$ 表示。

空间直线的标准方程和一般方程之间可以相互转化。将方程(3)拆成两个方程并联立，就得到空间直线的一般方程；通过方程(4)解得一解作为交线 l 上一定点， $n_1 \times n_2$ 为 l 的方向向量，即可建立 l 的标准方程。

3.3. 代数方程表示下两空间直线位置的判定

空间直线的代数方程形式多，样式复杂，不像向量式方程那样简单直观，也通常需要探讨由直线方程组成的方程组的解的情况得到空间直线的位置关系，此时利用线性方程组解的一般理论中的线性方程组有解判定定理[2]较为合适和方便。我们讨论如下三种形式表示的两空间直线，分析它们的位置关系。

$$\text{情形 1: } l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \quad l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}.$$

l_1 和 l_2 都由标准式方程给出，而标准式方程与向量式方程密切相关，因此只需要将 2.2 中判断两直线平行、相交还是异面的过程代数化即可。由于要考察向量之间的共线和共面性质，此时我们可以借助以 $P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 、 $s_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ 、 $s_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ 为行向量构成的矩阵的秩及行列式来研究。记

$$A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

当 l_1 和 l_2 异面时，三向量 P_1P_2 、 s_1 、 s_2 不共面，此时 $r(P_1P_2, s_1, s_2) = 3$ ，即 $r(A) = 3$ ， $|A| \neq 0$ 。不管 l_1 和 l_2 是平行、重合还是相交都归结为两直线共面，此时三向量 P_1P_2 、 s_1 、 s_2 共面， A 不满秩，均有 $|A| = 0$ 。但三种情况如何区分？这时需要通过 A 的秩及行向量之间的关系来判断。

当 l_1 和 l_2 平行时，有 $s_1 \parallel s_2$ ，则 (X_1, Y_1, Z_1) 、 (X_2, Y_2, Z_2) 对应分量成比例，此时 $r(A) = 2$ ；

当 l_1 和 l_2 重合时，有 $P_1P_2 \parallel s_1 \parallel s_2$ ， A 的三个行向量对应分量成比例，此时 $r(A) = 1$ ；

当 l_1 和 l_2 相交时，有 $s_1 \nparallel s_2$ ，但是 P_1P_2 可表示为 s_1 和 s_2 的线性组合，此时 $r(A) = 2$ 。

这样我们就完全通过矩阵的秩及其行向量之间的关系[2]对两空间直线位置进行区分。

$$\text{情形 2 [3]: } l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}.$$

l_1 和 l_2 都由一般式方程给出，其中 l_1 由 Π_1 和 Π_2 相交所得， l_2 由 Π_3 和 Π_4 相交所得。我们需要利用两个方程组联立所得方程组解的情况说明两直线的位置关系。线性方程组有唯一解时，两直线相交；线性

方程组有无穷多解时，两直线重合；线性方程组无解时，两直线平行或异面，再结合线性方程组系数矩阵秩的信息，可区分两种情况。

记线性方程组、其系数矩阵、增广矩阵分别为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = (A|d) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

根据线性方程组解的一般理论[3]可知，当 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 时，方程组无解；当 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ 时，方程组有唯一解；当 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ 时，方程组有无穷解。

下面详细讨论 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 时的情况，具体可分为 $r(A) = 3, r(\bar{A}) = 4$ 、 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ 两种。由于 Π_1 与 Π_2 相交，两平面不可能平行， $n_1 = (A_1, B_1, C_1) \nparallel n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ，因此 A 的秩不可能小于2。可知 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ ，即为 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ 。

两直线 l_1 和 l_2 异面，意味着由 n_1, n_2 张成的平面与 n_3, n_4 张成的平面不平行，则 n_3, n_4 中至少有一个不能由 n_1, n_2 线性表出，不妨设 n_3 不能由 n_1, n_2 线性表出，则以 n_1, n_2, n_3 为基底张成三维向量空间，则 n_4 可由 n_1, n_2, n_3 线性表示，因此， $r(A) = 3, r(\bar{A}) = 4$ 。

两直线 l_1 和 l_2 平行，意味着 n_1, n_2 张成的平面与 n_3, n_4 张成的平面平行，则 n_1, n_2 均可由 n_3, n_4 线性表示，因此 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ 。

当 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ 时，方程组有无穷多组解，由于 $r(A) = 2$ ，可知所有解构成1维向量空间，因此位于一条线上，此时两直线重合。

当 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ 时，方程组有唯一解，此时两直线相交，解即为交点坐标。

在根据系数矩阵与增广矩阵的秩确认方程组有解的情况下，还可以利用矩阵的初等行变换将方程组的解求解出来。这样不仅通过秩的分析得到两直线位置关系，还利用线性方程组的解得知交点位置或交线方程。在这种形式下，我们就完全通过联立方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩对两空间直线位置进行区分。

$$\text{情形 3: } l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \quad l_2: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

由于代数方程的形式可以相互转化，虽然可以将第3种形式转化为第1或2两种形式，利用已知结论进行判别，但本着科学探究全面和深入的思想，我们仍然在这种形式下讨论 l_1 和 l_2 的位置关系。

令 $s = (X_1, Y_1, Z_1)$ 、 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 、 $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ，以及

$$\frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1} = t$$

则 $x = x_1 + tX_1, y = y_1 + tY_1, z = z_1 + tZ_1$ ，将其代入 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 中，当 $s \nparallel n_1 \times n_2$ 时，即

$(n_1 \times n_2) \times s \neq 0$ 时，由第一个方程解得 $t = \frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_1X_1 + B_1Y_1 + C_1Z_1}$ ，由第二个方程解得

$$t = \frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_2X_1 + B_2Y_1 + C_2Z_1}.$$

当

$$\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_1X_1 + B_1Y_1 + C_1Z_1} = \frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_2X_1 + B_2Y_1 + C_2Z_1}$$

方程组有唯一解，两直线有唯一交点。

当 $\mathbf{s} \nparallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ，即 $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 时，且 $\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_1X_1 + B_1Y_1 + C_1Z_1} \neq \frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_2X_1 + B_2Y_1 + C_2Z_1}$ 成立，此时两直线不平行，也没有公共交点，因此两直线异面。

当 $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ，即 $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{s} = \mathbf{0}$ 时，且 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 满足 l_2 的方程，使得 $\sum_{i=1}^2 (A_ix_1 + B_iy_1 + C_iz_1 + D_i)^2 = 0$ 成立，此时两直线重合。

当 $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ，即 $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{s} = \mathbf{0}$ 时，且 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 不在 Π_1 上，或不在 Π_2 上，即 $\sum_{i=1}^2 (A_ix_1 + B_iy_1 + C_iz_1 + D_i)^2 \neq 0$ 成立时，两直线平行。

三种不同形式都能表示空间直线 l_1 和 l_2 ，但不同形式下判断两直线位置的思想方法却不尽相同。但我们可以看出，每种方法所利用的工具并不是单一的，虽然以代数工具为主，仍然需要结合研究对象的几何信息才能完全解决问题。

类似的几何问题有如下三平面：

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \Pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

其位置关系的判断(情况如图 1 所示)，利用几何方法讨论则难度较大，而代数方法只需要考察三平面方程联立所得方程组的解的情况，便可得到相应的三平面位置关系。

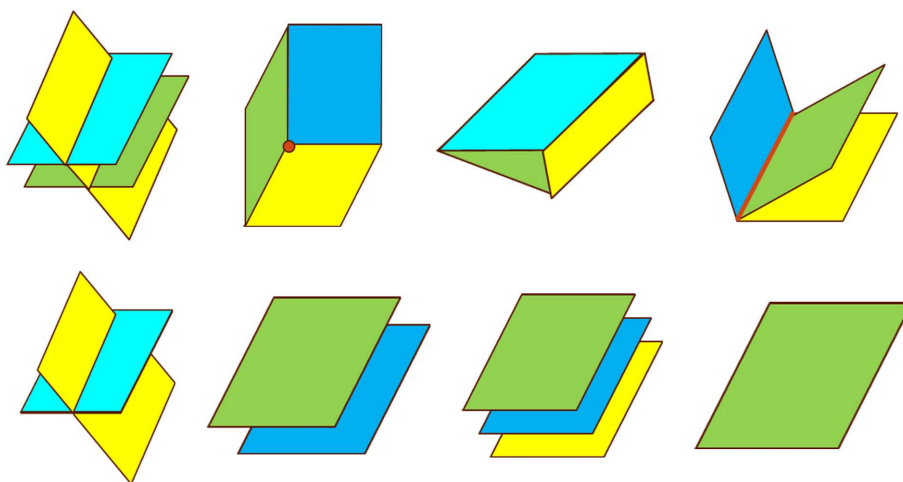


Figure 1. All of the possible positions of three planes in space

图 1. 空间三平面所有可能的位置情况

几何优于代数在于直观，而代数优于几何在于精确计算。对于一些突破几何直观的高维空间中的几何研究对象来说，利用几何方法难以直观想象，而代数方法则由于方法的体系性、普适性和推广性等优势而显得更为简捷、严谨。

4. 结语

利用代数方法解决几何问题，通过将几何问题转化为符号运算，提供了精确化、系统化、可计算、可扩展的研究框架。这不仅突破了传统几何在高维情形可视化上的直观限制，能直接将其推广到 n 维空间，如超平面 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 、超球面 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 等概念，再通过代数方程分析几何对象性质，还可通过与向量空间理论结合，将几何问题可抽象为向量问题，利用向量的运算，如内积、外积等，判

断几何对象之间的相对位置关系，也可利用向量组的线性相关性、极大线性无关组等研究高维空间中的几何对象之间的关系。这些优势使得几何问题的分析更为高效、精确且易于推广。

解析几何中利用代数工具解决几何问题实质是数形结合的直接体现。数形结合不仅是一种数学方法，更是一种数学思维，它打破了代数与几何的界限，让抽象与直观互补，既能提升解题效率，又能深化对几何对象及其代数表示的理解。

如：如何说明 $xy + yz + zx = 2$ 所代表的曲面是一张旋转曲面？从代数方程上看，这是一个非常困难的问题，但我们可以借助几何意义来实现解答。将 $xy + yz + zx = 2$ 变形为 $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 4$ ，令 $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ ，则 $x + y + z = \pm\sqrt{4 + k^2}$ ，则曲面 $xy + yz + zx = 2$ 可看作两张动曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ 和 $x + y + z = \pm\sqrt{4 + k^2}$ 交线形成的轨迹。 $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ 为球心在原点的同心球面族， $x + y + z = \pm\sqrt{4 + k^2}$ 为平行平面族，两曲面的交线为一族空间圆，且圆心都落在直线 $x = y = z$ 上，这族空间圆形成一张旋转曲面，便完成了说明。

正如数学家华罗庚所说，“数形结合百般好，隔离分家万事休”，无论是学习基础数学还是探索高阶领域，数形结合都是不可或缺的思维、方法和工具。

基金项目

本文获得信息工程大学教育教学研究课题支持(课题编号：JXYJ2025A002)。

参考文献

- [1] 高红铸, 王敬赓, 傅若男. 空间解析几何(第4版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2018: 45-48.
- [2] 丘维声. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2020: 93-95.
- [3] 吕林根, 许子道. 解析几何(第5版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 93-94.