Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(6), 78-85
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.156191

Hans汉斯

一类杨辉矩阵的逆矩阵

张小凤

厦门工学院人工智能学院，福建 厦门

收稿日期：2025年5月20日；录用日期：2025年6月16日；发布日期：2025年6月26日

摘　要

通过将对称杨辉矩阵分解为下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积，得到其行列式为1的简单证明；推导下三角杨辉矩阵的逆矩阵公式，由此快速求解对称杨辉矩阵的逆矩阵；揭示对称杨辉矩阵的逆矩阵与上、下三角杨辉矩阵乘积之间的关系。

关键词

杨辉矩阵，逆矩阵，行列式，线性空间

The Inverse of a Class of Yang Hui Matrix

Xiaofeng Zhang

School of Artificial Intelligence, Xiamen Institute of Technology, Xiamen Fujian

Received: May 20th, 2025; accepted: Jun. 16th, 2025; published: Jun. 26th, 2025

Abstract

By decomposing the symmetric Yang Hui matrix to the product of lower/upper triangular Yang Hui matrices, a simple proof is given for the fact that its determinant equals to 1; an explicit formula of the inverse of the lower triangular Yang Hui matrix is provided, which yields a rapid method to calculate the inverse of the symmetric Yang Hui matrix; the relations between the inverse of the symmetric Yang Hui matrix and the upper/lower triangular Yang Hui matrices are uncovered.

Keywords

Yang Hui Matrix, Inverse Matrix, Determinant, Linear Space

文章引用: 张小凤. 一类杨辉矩阵的逆矩阵[J]. 理论数学, 2025, 15(6): 78-85.
DOI: 10.12677/pm.2025.156191

1. 引言

杨辉三角如下图所示，它最早是由南宋数学家杨辉在他的《详解九章算法》一书中给出，它在中国数学文化史中有着特殊的重要地位，许多学者对其进行研究[1]。杨辉三角与斐波那契数列、卢卡斯数列之间有着密切的联系，详见[2]-[5]等。

第0行						1						
第1行					1		1					
第2行				1		2		1				
第3行			1		3		3		1			
第4行		1		4		6		4		1		
第5行	1		5		10		10		5		1	
…	…		…				…		…			

与杨辉三角有关的矩阵主要包括对称杨辉矩阵、上三角杨辉矩阵与下三角杨辉矩阵三类，它们的严格定义我们将在第 1 节给出阐述。文献[6]中，作者考虑了上三角杨辉矩阵的性质，定义了 n 维向量与 n 阶上三角杨辉矩阵的斜乘运算，构造了一类有趣的交换环，并讨论了上三角杨辉矩阵在微分运算方面的应用。文献[7]研究了与对称杨辉矩阵相关的两种类型的行列式，证明了两类行列式都等于 1；此外，作者还研究了与下三角杨辉矩阵相关的行列式问题，提出了一些猜想。与杨辉三角相关的行列式问题还有一些研究成果，详见[8]-[11]等。

文献[12]考虑了对称杨辉矩阵的逆矩阵问题，作者提供了一种算法来计算 n 阶对称杨辉矩阵的逆，其方法虽然比直接按照初等变换的方法求逆矩阵简便许多，但是操作起来仍然比较复杂。本文的一个动机是找到对称杨辉矩阵快速求逆的方法。经过研究我们发现，对称杨辉矩阵可以分解为下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积，而上、下三角杨辉矩阵的逆矩阵具有很好的描述，从而我们可以快速求出对称杨辉矩阵的逆。

2. 杨辉矩阵的定义

在相关文献中，与杨辉三角相关的 n 阶矩阵主要有如下三类(n 是一个自然数)：

(1) n 阶下三角杨辉矩阵 $A_n=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases}0, & i=1, j\ge 2\\ 1, & i\ge 2, j=1\\ a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}, & i\ge 2, j\ge 2\end{cases}$；

(2) n 阶上三角杨辉矩阵 A_n^{T}，它是 n 阶下三角杨辉矩阵 A_n 的转置；

(3) n 阶对称杨辉矩阵 $B_n=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，其中 $b_{ij}=\begin{cases}1, & i=1\text{或} j=1\\ b_{i-1,j}+b_{i,j-1}, & i\ge 2,\ j\ge 2\end{cases}$。

以 5 阶矩阵为例，上述三类矩阵分别具有如下的形式：

$$A_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{pmatrix},A_5^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},B_5=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&6&10&15\\1&4&10&20&35\\1&5&15&35&70\end{pmatrix}。$$

为了利用线性空间的知识来研究上述矩阵，本文将 n 阶下三角杨辉矩阵的定义进行推广，只保留递推关系式，得到如下杨辉矩阵的定义。

定义 1： 设 n 是一个自然数，一个 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 称为**杨辉矩阵**，如果对任意的 $i\ge 2$，都有 $a_{ij}=a_{i-1,j}+a_{i-1,j-1}$ 成立(我们规定 $a_{i0}=0$)。

根据定义，一个 n 阶杨辉矩阵由它的第一行元素唯一确定。记 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 为 n 维单位行向量，其中 1 在第 i 个位置。我们把第一行元素为 e_i 的 n 阶杨辉矩阵记为 A_n^{1i}。显然，A_n^{11} 与下三角杨辉矩阵 A_n 一致。

例 1： 4 阶杨辉矩阵 $A_4^{1i}\left(i=1,2,3,4\right)$ 具有如下形式：

$$A_4^{11}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix},A_4^{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\\0&1&3&3\end{pmatrix},A_4^{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&1&3\end{pmatrix},A_4^{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

对于任意自然数 n，令 Y_n 表示所有 n 阶杨辉矩阵全体构成的集合。容易验证，在矩阵线性运算下，Y_n 构成一个 n 维实线性空间，并且 $A_n^{11},A_n^{12},\cdots,A_n^{1n}$ 是 $\mathbb{Y}_n$ 的一组基。

3. 杨辉矩阵的性质

本文中我们用 I_n 表示 n 阶单位矩阵，用 $J_n=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}$ 表示 n 阶若当(Jordan)矩阵。

3.1. 杨辉矩阵 A_n^{1i} 之间的关系

命题 1： 对于任意的 $1\le i\le n-1$，都有 $A_n^{1,i+1}=A_n^{1i}\cdot J_n$，进而 $A_n^{1,i+1}=A_n^{11}\cdot J_n^i$。

证明： 令 $B=A_n^{1i}\cdot J_n$，并设 $A_n^{1i}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，$J_n=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$。由矩阵乘法可知，$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=a_{i,j-1}$。因此 $b_{ij}=a_{i,j-1}=a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j-2}=b_{i-1,j}+b_{i-1,j-1}$，从而 $B\in\mathbb{Y}_n$。又因为 B 的第一行元素为 e_{i+1}，从而 $B=A_n^{1,i+1}$，即 $A_n^{1,i+1}=A_n^{1i}\cdot J_n$。进而，$A_n^{1,i+1}=A_n^{1i}\cdot J_n=A_n^{1,i-1}\cdot J_n^2=\cdots=A_n^{11}\cdot J_n^i$。证毕。

从命题 1 可以看出，杨辉矩阵 A_n^{1i} 都可以从 A_n^{11} 得到。因此，对杨辉矩阵 A_n^{11} 的研究显得至关重要。在 2.2 节与 2.3 节中，我们将详细研究 A_n^{11} 的性质。

3.2. 杨辉矩阵 A_n^{11} 的基本性质

本节将研究杨辉矩阵 A_n^{11} 的一些基本性质，以下如无特殊说明，总假定 $A_n^{11}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$。

性质 1： 对于任意的 $1\le j\le i\le n$，

(1) $a_{ii}=1$；(2) $a_{i1}=1$；(3) $a_{ij}=a_{i,i-j+1}$。

证明：(1) 根据定义知 $a_{ii}=a_{i-1,i}+a_{i-1,i-1}$，且对于任意的 $i\ge 2$，$a_{1i}=0$，从而 $\forall i<j$，$a_{ij}=0$。因此 $a_{ii}=a_{i-1,i-1}=\cdots=a_{11}=1$。

(2) 根据假定 $a_{i0}=0$，从而 $a_{i1}=a_{i-1,1}=\cdots=a_{11}$。

(3) 对 i 进行归纳：当 $i=1$ 时，$j=1$，显然成立。设 $a_{ij}=a_{i,i-j+1}$ 成立，则 $a_{i+1,j}=a_{ij}+a_{i,j-1}=a_{i,i-j+1}+a_{i,i-j+2}=a_{i+1,(i+1)-j+1}$，即结论对 $i+1$ 也成立。证毕。

如下的结论是熟知的。为了读者方便，我们将给出简略证明。

性质 2：对于任意的 $1\le j\le i\le n$，$a_{ij}=C_{i-1}^{j-1}$。

证明：对 (i,j) 作数学归纳法：当 $(i,j)=(1,1)$ 时，$a_{11}=1=C_0^0$，结论成立。假设结论对 $(i',j')<(i,j)$ 时成立，则 $a_{ij}=a_{i-1,j}+a_{i-1,j-1}=C_{i-2}^{j-1}+C_{i-2}^{j-2}=C_{i-1}^{j-1}$。证毕。

性质 3：对于任意 $1\le i\le n$，有

(1) $a_{i+1,3}-a_{i3}=i-1$；(2) $a_{i+1,3}+a_{i3}=(i-1)^2$。

证明：(1) $a_{i+1,3}-a_{i3}=C_i^2-C_{i-1}^2=C_{i-1}^1=i-1$；

(2) $a_{i+1,3}+a_{i3}=C_i^2+C_{i-1}^2=\dfrac{i(i-1)}{2}+\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}=(i-1)^2$。证毕。

性质 4：对于任意 $1\le i\le n$，令 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$，则 $S_i=2^{i-1}$。

证明：$S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{i}C_{i-1}^{j-1}=\sum\limits_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^{j}=2^{i-1}$。证毕。

3.3. 杨辉矩阵 A_n^{11} 的逆矩阵

本节我们研究杨辉矩阵 A_n^{11} 的逆矩阵。为此我们先给出一个组合数公式。

命题 2：$\sum\limits_{m\le k\le n}(-1)^k C_n^k C_k^m=\delta_{m,n}(-1)^n$，其中 $\delta_{m,n}=\begin{cases}1, & 当\ m=n\\ 0, & 当\ m\ne n\end{cases}$。

证明：由二项展开式定理可知，

$$\begin{aligned}(x-y-z)^n&=(x-(y+z))^n\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot x^{n-k}\cdot(-1)^k\cdot(y+z)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot x^{n-k}\cdot\left(\sum_{m=0}^{k}C_k^m y^{k-m}z^m\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}(-1)^k C_n^k C_k^m\cdot x^{n-k}\cdot y^{k-m}\cdot z^m\\&=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^m\cdot x^{n-k}\cdot y^{k-m}\cdot z^m\end{aligned}$$

令 $x=y=1$，代入上式可得，$(-z)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^m z^m$。比较系数知结论成立。证毕。

下面给出杨辉矩阵 A_n^{11} 的逆矩阵的刻画，它只是在 A_n^{11} 的某些位置加上负号。

定理 1：设 $A_n^{11}=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $(A_n^{11})^{-1}=\left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{n\times n}$。

证明：由性质 2 可知，$a_{ij}=C_{i-1}^{j-1}$。令 $B=(a_{ij})_{n\times n}\cdot\left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{n\times n}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$
\begin{aligned}
b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} C_{i-1}^{k-1}\cdot(-1)^{k+j} C_{k-1}^{j-1} \\
&= (-1)^{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} C_{i-1}^{k-1} C_{k-1}^{j-1} \\
&= (-1)^{j}\cdot\sum_{k=j}^{i}(-1)^{k} C_{i-1}^{k-1} C_{k-1}^{j-1} \\
&= (-1)^{j}\cdot(-1)\cdot\sum_{k=j}^{i}(-1)^{k-1} C_{i-1}^{k-1} C_{k-1}^{j-1} \\
&= (-1)^{j+1}\cdot\delta_{ij}\cdot(-1)^{i-1}\ (\text{由命题2}) \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

因此，B 是单位阵，从而 $\left(A_n^{11}\right)^{-1}=\left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{n\times n}$。证毕。

例 2： 求 A_4^{11} 的逆。

解： 利用初等行变换求逆矩阵如下

$$
A_4^{11}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&&&&1&&&\\
1&1&&&&1&&\\
1&2&1&&&&1&\\
1&3&3&1&&&&1
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&&&&1&&&\\
0&1&&&-1&1&&\\
0&2&1&&-1&&1&\\
0&3&3&1&-1&&&1
\end{array}\right)
$$

$$
\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&&&&1&&&\\
0&1&&&-1&1&&\\
0&0&1&&1&-2&1&\\
0&0&3&1&2&-3&0&1
\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&&&&1&&&\\
0&1&&&-1&1&&\\
0&0&1&&1&-2&1&\\
0&0&0&1&-1&3&-3&1
\end{array}\right),
$$

从而 $\left(A_4^{11}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\-1&1&&\\1&-2&1&\\-1&3&-3&1\end{pmatrix}$，与定理 1 的结论吻合。

3.4. 杨辉矩阵可逆的充分必要条件

下面的结论给出杨辉矩阵可逆的充分必要条件，并且当可逆时，给出其逆矩阵的表达式。

定理 2： 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 n 阶杨辉矩阵，则 A 可逆当且仅当 $a_{11}\neq 0$。并且，若条件成立，则 $A^{-1}=\tilde{J}^{-1}\cdot\left(A_n^{11}\right)^{-1}$，其中 $\tilde{J}=a_{11}I_n+a_{12}J_n+\cdots+a_{1n}J_n^{n-1}$。

证明： 由 $A_n^{11},A_n^{12},\cdots,A_n^{1n}$ 是 $\mathbb{Y}_n$ 的一组基可知 $A=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_n^{1i}$。由命题 1 知，$A_n^{1i}=A_n^{11}\cdot J_n^{i-1}$。故 $A=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_n^{1i}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_n^{11}\cdot J_n^{i-1}=A_n^{11}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{1i}J_n^{i-1}$。令 $\tilde{J}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}J_n^{i-1}$，则 $A=A_n^{11}\cdot\tilde{J}$。易知，$\left|A_n^{11}\right|=1$ 且 $\left|\tilde{J}\right|=a_{11}^{n}$，故 $|A|=\left|A_n^{11}\right|\cdot\left|\tilde{J}\right|=a_{11}^{n}$。从而 A 可逆当且仅当 $a_{11}\neq 0$，并且此时 $A^{-1}=\tilde{J}^{-1}\cdot A_{11}^{-1}$。证毕。

4. 对称杨辉矩阵的性质

本节我们将证明对称杨辉矩阵可以分解为下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积，作为直接的推论，我们可以得到文献中对称杨辉矩阵的行列式为 1 的结论。同时，利用上一节关于杨辉矩阵的逆矩阵的结果，我们可以快速求出对称杨辉的逆矩阵。

4.1. 对称杨辉矩阵的分解

注意到杨辉矩阵 A_n^{11} 与下三角杨辉矩阵 A_n 是一致的。我们有如下结果：

定理 3：对称杨辉矩阵可以分解为下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积，即 $B_n = A_n A_n^{\mathrm{T}}$ 。

证明：令 $A_n A_n^{\mathrm{T}} = C_n = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ ，则 C_n 是对称矩阵，且对于任意的 $1\le i, j\le n$ ，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{jk}$$

由于当 $k\ge 2$ 时， $a_{1k}=0$ ，并且对于任意的 $1\le i\le n$ ， $a_{i1}=1$ 。所以，对于任意的 $1\le i\le n$ ，

$$c_{1i} = c_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{1k} = a_{i1}a_{11} = 1 \text{。}$$

另一方面，当 $2\le i, j\le n$ 时，

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} \\
&= 1+\sum_{k=2}^{n}\left(a_{i-1,k}+a_{i-1,k-1}\right)a_{jk} \\
&= \left(1+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k}a_{jk}\right)+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i-1,k}a_{jk}+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}\left(a_{j-1,k}+a_{j-1,k-1}\right) \\
&= c_{i-1,j}+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{j-1,k}+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{j-1,k-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

此处用到了 $c_{i-1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i-1,k}a_{jk}$ 。

同理可得

$$\begin{aligned}
c_{i,j-1} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{j-1,k} \\
&= 1+\sum_{k=2}^{n}\left(a_{i-1,k}+a_{i-1,k-1}\right)a_{j-1,k} \\
&= \left(1+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k}a_{j-1,k}\right)+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{j-1,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i-1,k}a_{j-1,k}+\sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{j-1,k}
\end{aligned} \tag{2}$$

由假设 $2\le i\le n$ 可知， $a_{i-1,n}=0$ ，因此

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i-1,k}a_{j-1,k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{i-1,k}a_{j-1,k} = \sum_{k=2}^{n} a_{i-1,k-1}a_{j-1,k-1} \text{。}$$

将上式代入(1)和(2)可知，对于任意的 $2\le i, j\le n$ ， $c_{ij} = c_{i-1,j}+c_{i,j-1}$ ，从而 $B_n = C_n = A_n A_n^{\mathrm{T}}$ 。

证毕。

作为定理 3 的直接推论，我们可以得到文献[7]中的如下结果：

推论 1：n 阶对称杨辉矩阵的行列式为 1，即 $|B_n| = 1$ 。

证明：由于 A_n 是下三角矩阵，对角元为 1，故 $|A_n| = 1$ 。由定理可知，$|B_n| = \left|A_n A_n^{\mathrm{T}}\right| = |A_n|\cdot\left|A_n^{\mathrm{T}}\right| = 1$ 。证毕。

4.2. 对称杨辉矩阵的逆矩阵

本节我们利用第 2 节关于下三角杨辉矩阵的逆矩阵的结果，给出对称杨辉矩阵的逆矩阵的显式公式，大大简化了文献[12]中求逆矩阵的方法。

定理 4： 设 $A_n=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则 $B_n^{-1}=\left((-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\right)_{n\times n}$。

证明： 由定理 3 知，

$$B_n^{-1}=\left(A_nA_n^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=A_n^{-\mathrm{T}}A_n^{-1}。$$

根据定理 1，我们有

$$A_n^{-1}=\left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{n\times n}。$$

设 $B_n^{-1}=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$，则 $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ki}\cdot(-1)^{k+j}a_{kj}=(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$。证毕。

定理 3 指出，下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积恰好等于对称杨辉矩阵。反之，上三角杨辉矩阵与下三角杨辉矩阵的乘积与对称杨辉矩阵的逆矩阵密切相关，如下结论指出，两者只在某些位置相差一些正负号。

推论 2： 设 $B_n^{-1}=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$，则 $A_n^{\mathrm{T}}A_n=\left((-1)^{i+j}d_{ij}\right)_{n\times n}$。

证明： 由定理 4 的证明可知，$d_{ij}=(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$，从而 $\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=(-1)^{i+j}d_{ij}$，即 $A_n^{\mathrm{T}}A_n=\left((-1)^{i+j}d_{ij}\right)_{n\times n}$。证毕。

结合定理 1 与定理 3，我们可以快速算出对称杨辉矩阵的逆矩阵。

例 3： 求 5 阶对称杨辉矩阵的逆。

解： 根据定理 4 的证明可知，

$$B_5^{-1}=\left(A_5A_5^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=A_5^{-\mathrm{T}}A_5^{-1}$$

注意到 A_n 与 A_n^{11} 一致。因此，利用定理 1 的结论可知，

$$B_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-2&3&-4\\0&0&1&-3&6\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&-2&1&0&0\\-1&3&-3&1&0\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-10&10&-5&1\\-10&30&-35&19&-4\\10&-35&46&-27&6\\-5&19&-27&17&-4\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}。$$

5. 结论

本文将文献中下三角杨辉矩阵的定义进行推广，定义了杨辉矩阵，并利用线性代数的方法，从矩阵的元素、行向量以及逆矩阵各个不同层面研究杨辉矩阵的性质，揭示它与组合数之间的联系，得到以下 3 点结论：

(1) 给出下三角杨辉矩阵的逆矩阵公式；

(2) 将对称杨辉矩阵分解为下三角杨辉矩阵与上三角杨辉矩阵的乘积，进而得到对称杨辉矩阵行列式为 1 的简单证明；

(3) 结合上述(1)、(2)，给出对称杨辉矩阵的逆矩阵公式，快速求解对称杨辉矩阵的逆矩阵，并揭示

其与上、下三角杨辉矩阵乘积之间的联系。

基金项目

项目类型：厦门工学院 2021 年度校级中青年科研基金项目；项目编号：KYT2021010；项目名称：关于杨辉三角矩阵的研究。

致　谢

感谢审稿人对本论文的认真审核。本论文由厦门工学院 2021 年度校级中青年科研基金项目(项目编号：KYT2021010，项目名称：关于杨辉三角矩阵的研究)资助。

参考文献

[1] 华罗庚. 从杨辉三角谈起-新 1 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964.

[2] 晁晶晶. 广义杨辉三角形与 Lucas 数列的关系研究[J]. 新乡学院学报(自然科学版), 2011, 28(3): 196-197, 201.

[3] 陈小芳. Fibonacci 数与杨辉三角形的关系研究[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 84-85.

[4] 陈小芳. Lucas 数列与杨辉三角形的又一关系[J]. 江西科学, 2013, 31(3): 287-288, 309.

[5] 陈小芳. Fibonacci 数与杨辉三角形的又一关系[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2014, 35(3): 1-2, 9.

[6] 秦宗慈. 杨辉矩阵及其应用[J]. 镇江市高等专科学校学报, 1996(2): 72-77, 60.

[7] 蒋省吾. 杨辉三角中的行列式[J]. 衡阳师专学报, 1987(2): 32-37.

[8] 李旭东. 再探“杨辉三角”中的行列式[J]. 数学学习与研究, 2013(23): 111.

[9] 曲桂东, 毕艳丽. 也谈杨辉三角中的行列式[J]. 衡阳师专学报(自然科学), 1990(3): 57-61.

[10] 王廷桢. 杨辉三角的行列式性质[J]. 数学教学研究, 1987(3): 32-35.

[11] 习枰. 杨辉三角中两类行列式的性质及计算[J]. 南通职业大学学报(综合版), 2002(1): 48-50.

[12] 陈友信, 张峰荣. “杨辉三角”中的矩阵的逆矩阵[J]. 数学通报, 1993(10): 34-38.