

数学史视角下的高中数列性质探究及教学启示

——以等差中项和等比中项为例

李红君, 侯传燕*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年5月21日; 录用日期: 2025年6月23日; 发布日期: 2025年7月22日

摘 要

数学史作为数学文化的重要组成部分, 可以帮助学生了解数学概念和思想的发展过程, 更好地理解数学的抽象性和应用范围, 在日常教学和教材上的体现也愈发明显。以等差中项和等比中项为例, 从几何构造、函数特性与数列的前 n 项和这三个不同的历史视角, 深入探析高中数列性质, 旨在促进学生深度理解数列, 实现核心素养落地。

关键词

数学文化, 数学史, 数列性质, 教学启示

Exploration of the Properties of High School Sequences from the Perspective of the History of Mathematics and Teaching Implications

—Taking Arithmetic Mean and Geometric Mean as Examples

Hongjun Li, Chuanyan Hou*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 21st, 2025; accepted: Jun. 23rd, 2025; published: Jul. 22nd, 2025

Abstract

As an important component of mathematical culture, the history of mathematics can help students

*通讯作者。

文章引用: 李红君, 侯传燕. 数学史视角下的高中数列性质探究及教学启示[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 74-82.

DOI: 10.12677/pm.2025.157209

understand the development process of mathematical concepts and ideas, better comprehend the abstraction and application scope of mathematics, and its manifestation in daily teaching and textbooks is becoming increasingly obvious. Taking the arithmetic mean and the geometric mean as examples, this paper deeply explores the properties of high school sequences from three different historical perspectives: geometric construction, function characteristics, and the antecedent of a sequence, aiming to promote students' in-depth understanding of sequences and achieve the implementation of core literacy.

Keywords

Mathematical Culture, History of Mathematics, Properties of Sequence, Teaching Implication

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 研究背景

人类的发展史，就是一部探索未知、寻求世界本质的历史。数学作为探究奥秘的工具之一，其本身也具有丰富而悠久的历史。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 修订)》(以下简称《标准》)强调：在数学教学中要重视和深刻认识数学文化。[1]同时在数学的学习中，数列作为基本而重要的数学概念，不仅是初等数学中的关键内容，而且是与高等数学衔接的基础。数列本身作为一类特殊的函数去研究，也蕴含着丰富的数学思想方法，在日常生活中也有广泛的应用。因此，在数列学习中，不仅要关注数列的知识，还应重视数列所蕴含的文化价值，揭示数列的性质。

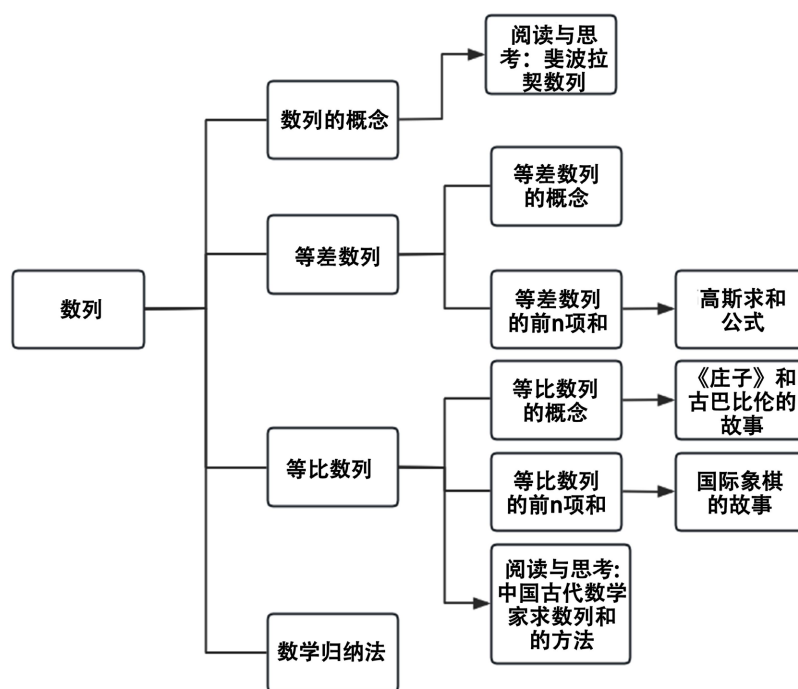


Figure 1. The history of sequences in textbooks

图 1. 教材中的数列历史

2. 中学的数列内容呈现

《标准》将数列安排在选择性必修课程的函数主题中, 要求教学应引导学生通过具体实例, 让学生抽象概括数列的概念和性质, 培养学生的核心素养[1]。且各地教材基本上以“数列的背景-概念(定义、表示、分类)-性质-特例”为基本结构, 对数列进行展开教学[2]。2019 版的高中数学人教 A 版教材, 较以前的 2007 年人教 A 版相比, 更加注重数学文化的渗透, 更符合将“数学文化贯穿于高中数学结构”的要求。[3]如图 1 所示, 以高中数学人教 A 版教材为例, 数列章节的内容安排分为数列的概念、等差数列、等比数列、数学归纳法四个部分。其中数学文化几乎贯穿所有章节的所有内容, 但所蕴含的文化价值具有隐性的特征, 而数学史是数学文化的重要组成要素, 所以要透过数学史深挖数列知识的来龙去脉, 揭示数列的本质。

3. 数学史视角下的数列性质探究

等差数列和等比数列都属于数列的经典研究对象。虽然在教材中, 对等差数列和等比数列的教学辅以数学史, 但对等差中项和等比中项的性质描述却是寥寥几笔带过, 无法对其进行深度认识和理解。

3.1. 几何构造视角

等差数列和等比数列的前身是算术数列和几何数列。古希腊哲学强调理性思考和对世界本质的深刻探究, 其中毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”, 将算术数列定义为后一项与它的前一项之差保持恒定的数列。同时欧几里得的《几何原本》创作也受到这种哲学思想的深刻影响, 书中的几何构造法体现了对真理的追求和对理想思维的重视, 讨论了整数的整除性质以及关于数量的比例论。中国古代对等差数列和等比数列的研究也有悠久的历史, 在《九章算术》中的“衰分”一章就涉及到了等差数列的概念。在《孙子算经》《张丘建算经》《算法统综》等古籍中都含有许多有关等比数列的问题。而且相当一部分都以诗歌的形式呈现出来, 如《算法统综》中有诵课增倍歌: “有个学生心性巧, 一部《孟子》三日了。每日增添一倍多, 问君每日读多少?” [4]

3.1.1. 等比中项几何构造解析

若要揭示等差数列和等比数列的本质, 追根溯源能让数列返璞归真。《几何原本》作为公理化思想的典范, 欧几里得从一组基本的公理和定义出发, 通过逻辑推理构建整个体系。书中第二卷和第六卷当中就有大量分割线段的讨论[5]。其中含有等比数列的几何构造例子。

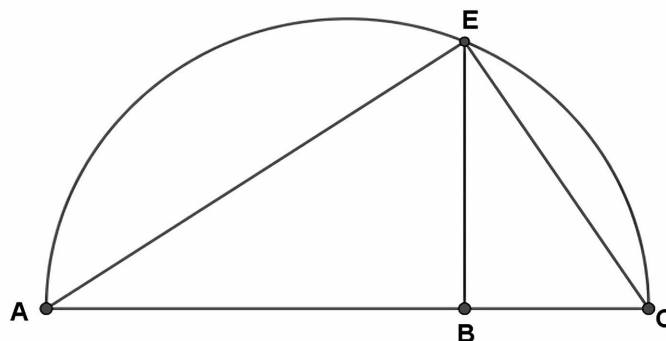


Figure 2. Construction diagram of proportional mean
图 2. 比例中项构造图

在《几何原本》第六卷命题 13 中要求做出两条给定线段的比例中项。如图 2 所示, 将两线段 AB 、

BC 放置同一条直线上, 并以 AC 为直径作半圆弧 $\widehat{AEC}$, 过点 B 作 $l_{BE} \perp l_{AC}$, 连接 AE 、 EC 。因为 $\angle AEC$ 所对的弦长为半径, 故 $\angle AEC$ 是直角。原文到此就直接给出 EB 是由直角的顶点作到底边的垂线, 故线段 EB 是线段 AB 和 BC 的比例中项。

若作更详细的阐述, 则是: 因为 $\triangle ABE$ 与 $\triangle EBC$ 为相似三角形。故 $\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|BC|}$, 则 $|BE|^2 = |AB||BC|$, $|BE|$ 为 $|AB|$ 和 $|BC|$ 的比例中项。若将 $|AB|$ 、 $|BE|$ 、 $|BC|$ 依次排列, 满足 $|BE|^2 = |AB||BC|$, 则与等比中项的成立相符合。即在等比数列中任意三项 a_u 、 a_k 、 a_v , 若满足 $v-k=k-u$, 则 $\frac{a_v}{a_k} = \frac{a_k}{a_u}$, 即 $a_k^2 = a_u a_v$ 。同样在等比数列中, $\{a_n\}$ 中任意四项 a_u 、 a_s 、 a_t 、 a_v 满足两项之间的距离相等: $s-u=v-t$, 则 $\frac{a_s}{a_u} = \frac{a_v}{a_t}$, 故 $a_u a_v = a_s a_t$ 。

3.1.2. 等差中项几何构造解析

类比《几何原本》中对比例中项的几何构造, 对等差中项进行几何构造。若有两条线段 α 、 β , 长度分别为 a 、 b , 现在要构造一个新的线段, 长度为 $\frac{a+b}{2}$ 。如图 3 所示, 首先, 在 α 这条直线首尾两端标记点 A 和点 B , 使得 $|AB|=a$ 。同时从 B 点开始, 向右标记一个距离 B 长度为 b 的点 C , 使得 $|BC|=b$, 并置两条线段在同一条直线上。标注线段 AC 的中点 M , 则 $|AM|=|MC|=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|)=\frac{a+b}{2}$ 。

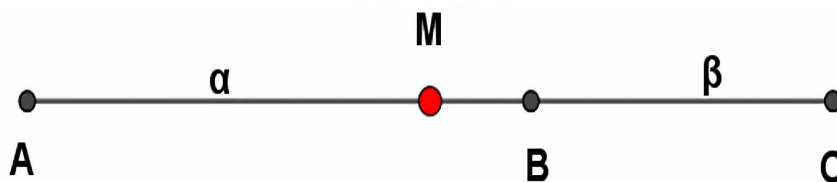


Figure 3. Arithmetic mean construction diagram
图 3. 等差中项构造图

因此几何构造下的等差数列变成了“等距”数列。在“等距”的关系下, 可以看作是点 C 到点 M 的距离与点 M 到点 A 的距离相等。解释了在等差数列中 a_u 、 a_k 、 a_v 三项, 如果相邻两项的距离相等: $v-k=k-u$, 则 $a_v - a_k = a_k - a_u$, 于是得到 a_u 和 a_v 的等差中项 $a_k = \frac{a_u + a_v}{2}$ 。同样在等差数列中, $\{a_n\}$ 中任意四项 a_u 、 a_s 、 a_t 、 a_v 只要满足任意两项之间的距离相等: $s-u=v-t$, 则两项之差也相等: $a_s - a_u = a_v - a_t$, 得到 $a_s + a_t = a_u + a_v$ 。

两种几何构造将等差数列和等比数列的性质更直观地展示出来, 将等差中项代换成算术平均数, 等比中项代换成几何平均数。这也就是等差数列和等比数列为什么称之为算术数列和几何数列。这样直观地表现出数列的性质, 也使学生们更易于接受。

3.2. 函数视角

函数是数学的灵魂和基石。教材中虽然明确指出将数列作为函数去进行研究, 如图 4 所示, 因为项 a_n 与序号 n 一一对应, 将数列 $\{a_n\}$ 看作是序号 n 的函数。学生尽管知道数列是一类特殊函数, 却不清楚为什么把数列看作是函数, 更不清楚寻找两者关系的真正价值。

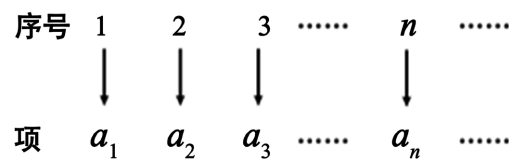


Figure 4. One-to-one correspondence in a sequence
图 4. 数列中的一一对应

早期数列和函数的研究都处于发展的独立阶段。毕达哥拉斯学派研究了三角形数、正方形数等特定数列。欧几里得研究的量与量的比例关系也奠定了函数的雏形。文艺复兴时期,通过笛卡尔建立的解析几何,数学家逐渐意识到数列的递推关系本质就是一种特殊的函数,如斐波拉契数列的递推公式: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 。此时数列仍是被看作是离散的对象。到 17 世纪末,牛顿和莱布尼兹创立了微积分,如对于一个数列 $\{a_n\}$, 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, 将函数的变化与极限联系起来,标志着数列与函数的初步结合。在 19 世纪,柯西和魏尔斯特拉斯等数学家对实分析进行了研究,函数与数列之间的关系得到进一步发展,数列被看作是以正整数为定义域的函数,如一个数列可以定义为: $f: N \rightarrow R, f(n) = a_n$ 。而中国在《九章算术》以及之后的数列发展中,因为缺乏表达指数函数的有效方法,使得对等比数列的研究远逊于等差数列[6]。显然从历史发展中,利用函数更容易窥探数列的性质。

如表 1 所示,教材中利用归纳法得到数列的递推公式和通项公式。

Table 1. The recursive formulas and general term formulas of common sequences
表 1. 常见数列的递推公式和通项公式

	等差数列	等比数列
递推公式	$a_n - a_{n-1} = d$	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$

如图 5 所示,从集合的角度去考量,建立起从序号到项的映射,而数集下的映射是函数的对应关系,将等差数列和等比数列与线性函数和指数函数建立联系。

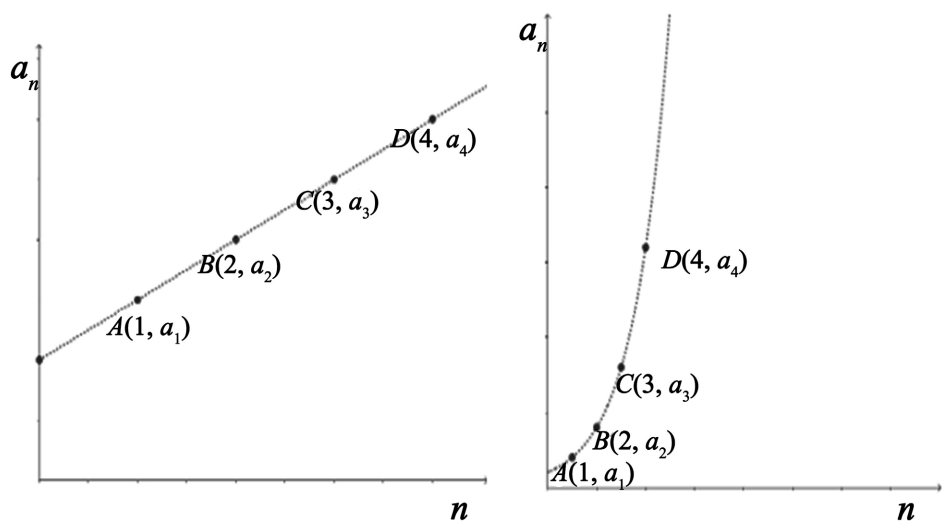


Figure 5. The graphical representation of a sequence's function
图 5. 数列的函数图像表示

于是将数列的序号看作是自变量 x , 项看作是因变量 y , 自变量和因变量之间的关系, 如表 2 所示。

Table 2. Recursive formulas and general term formulas from the perspective of functions

表 2. 函数视角下的递推公式和通项公式

	等差数列	等比数列
递推公式	$y_n - y_{n-1} = d$	$\frac{y_n}{y_{n-1}} = q$
通项公式	$y = y_1 + (x-1)d$	$y = y_1 q^{(x-1)}$

3.2.1. 等差中项的函数阐释

因为等差数列通项公式的线性关系, 不难发现等差数列相邻两项之差与线性函数斜率之间的联系:

$y_n - y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{n - (n-1)} = d$ 。利用等差数列的线性关系对等差中项的性质进行探讨。

等差数列的任意两项 a_u 、 a_v , ($v > u$) 在坐标系下则表示为 (u, a_u) 、 (v, a_v) 两点, 因其线性关系, 则两点的中点表示为 (k, a_k) , 其中 $k = \frac{u+v}{2}$, 且 $k \in \mathbb{Z}^*$ 。因为 $a_k = \frac{a_u + a_v}{2}$, 若将等式变形为:

$a_k - a_u = a_v - a_k$, 发现等式两端的序号之差相等: $k - u = v - k = \frac{v-u}{2}$ 。于是有 $\frac{a_k - a_u}{k - u} = \frac{a_v - a_k}{v - k} = d$, 其

中 $k - u = \frac{a_k - a_u}{d}$, $v - k = \frac{a_v - a_k}{d}$, 且 $k - u = v - k$, 则有 $a_k = \frac{a_u + a_v}{2}$ 。即对于等差数列的任意三项, 若其中两项之差与斜率的比值相等, 则满足等差中项的性质。同理, 对于等差数列中的任意四项 a_u 、 a_s 、 a_t 、 a_v , 其中 $s - u = \frac{a_s - a_u}{d}$, $v - t = \frac{a_v - a_t}{d}$, 若 $s - u = v - t$, 则 $a_s - a_u = a_v - a_t$, 即 $a_u + a_v = a_s + a_t$ 。

在通常情况下, 任意两对数列的序号差值是不相等的。但仍然可以写成 $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的斜率形式, 如:

$\frac{a_9 - a_6}{9 - 6} = \frac{a_9 - a_4}{9 - 4}$ 可化简为 $5a_6 = 2a_9 + 3a_4$ 。可以发现等式左右两边仍存在一些可能的联系, 如左右两端系数之和相等以及左右两端系数与项数的乘积之和相等。在等差数列中任意四项 a_u 、 a_s 、 a_t 、 a_v , 因为

等差数列通项公式的线性特征, 故 $\frac{a_s - a_u}{s - u} = \frac{a_v - a_t}{v - t}$, 则 $(v - t)a_s + (s - u)a_t = (v - t)a_u + (s - u)a_v$, 发

现左右两端系数和相等: $(v - t) + (s - u) = (v - t) + (s - u)$, 且系数和的乘积也相等:

$(v - t)s + (s - u)t = (v - t)u + (s - u)v$, 即 $vs - ut = vs - ut$ 。故可根据等差数列的线性关系, 对等差数列中的任意多项进行构造等式, 满足条件左右两端系数和相等且左右两端系数与项数的乘积之和相等, 等式成立。

3.2.2. 等比数列的函数阐释

类比等差数列, 等比数列任意两项 $a_u = a_1 q^{u-1}$ 、 $a_v = a_1 q^{v-1}$, 则两点的中点表示为 (k, a_k) , 其中 $k = \frac{u+v}{2}$, 且 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a_k = a_1 q^{k-1}$, 则 $a_k^2 = a_u a_v$, 说明等比中项的性质在等比数列中自然成立。因为等

比数列的相邻项增长率保持一致, 故在等比数列中任意四项 a_u 、 a_s 、 a_t 、 a_v , 满足 $\sqrt[s-u]{\frac{a_s}{a_u}} = \sqrt[v-t]{\frac{a_v}{a_t}}$, 其中

$s - u > 0$, $v - t > 0$, 当 $s - u = v - t$ 时, 可化简为 $a_u a_v = a_s a_t$; 当 $s - u \neq v - t$ 时, 则 $a_s^{v-t} a_t^{s-u} = a_u^{v-t} a_v^{s-u}$ 。

3.3. 数列的前 n 项和与数列性质的关联

数列的前 n 项求和公式一直是人们感兴趣的话题, 数列的前 n 项和的本质是前 n 项依次相加。对于一些常见并且个数较少的数列求和比较简便, 如 $\{1, 2, 3\}$, 而对于数量较多的数列进行求和时, 人们往往通过归纳法得到前 n 项和的表达式。公元前 1800 年古埃及的“加罕纸草书”中就有等差数列的求和问题, 刘徽的《九章算术》中也给出了等差数列的求和公式。同样在 15 世纪后的欧洲, 数列求和被看作是最基本的运算之一, 求和公式得到广泛的应用。

3.3.1. 等差数列前 n 项和公式与等差中项

英国数学家华里司推导等差数列的求和公式, 发现与首末两项距离相等的两项之和都相等[7]:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$ 。若将等式的所有项进行相加, 则有 $(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$, 那么前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}n(a_n + a_1)$ 。
 $= n(a_n + a_1),$

若将公式变形得到 $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}(a_n + a_1)$, 发现在等差数列中, 前 n 项和的平均值等于其首尾两项的平均值。若当 n 为奇数时, $a_{\frac{n+1}{2}}$ 为该数列的第 $\frac{n+1}{2}$ 项, 依据华里司的推导方法, 则

$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}(a_n + a_1) = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}}\right) = a_{\frac{n+1}{2}}$; 同理, 若当 n 为偶数时, $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}(a_n + a_1) = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}+1} + a_{\frac{n}{2}}\right)$ 。显然若

为等差数列, 其前 n 项和的平均值为这 n 项的中位数。于是从等差数列的前 n 项和回到了项与项之间的关系。

根据等差数列前 n 项和的可预测性, 反向推断数列的项。如 $S_3 - S_2 = a_3$, 而根据华里司的求和公式 $S_3 = \frac{3}{2}(a_3 + a_1)$, $S_2 = \frac{2}{2}(a_2 + a_1)$ 。于是代入等式中得 $\frac{3}{2}(a_3 + a_1) - \frac{2}{2}(a_2 + a_1) = a_3$, 化简得 $2a_2 = a_1 + a_3$ 。对于一般情况而言, 有 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, 代入华里司的前 n 项和的求和公式, 则

$\frac{n+1}{2}(a_{n+1} + a_1) - \frac{n}{2}(a_n + a_1) = a_{n+1}$, 化简得 $na_n = (n-1)a_{n+1} + a_1$ 。于是回到了等差数列的线性关系, 反向验证了等差数列的“等差”性质。

3.3.2. 等比数列前 n 项和公式与等比中项

欧拉在其《代数学基础》[8]和华里司的“级数篇”[9]中利用错位相减法详细地介绍了等比数列求和公式。由 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$, 得 $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n$, 两式相减得

$(q-1)S_n = a_1(q^n - 1)$ 。当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ 。从华里司推导的过程中发现等比数列的前 n 项和公式是构造一个新的数列 $\{qa_n\}$, 再利用错位相减法, 便可得到等比数列的前 n 项求和公式。

通过等比数列 $\{a_n\}$ 去构造新的数列可以去作如下思考, 先考虑数列的前三项和, 将所有的项乘以 a_1 , 得到 $S'_3 = a_1S_3 = a_1a_1 + a_1a_2 + a_1a_3 = a_1^2 + a_1^2q + a_1^2q^2$, 而 S'_3 与 S_3 两个等式不能直接利用错位相减法。若将 S_3 乘以 a_2 得 $S''_3 = a_2S_3 = a_1a_2 + a_2a_2 + a_2a_3 = a_1^2q + a_1^2q^2 + a_1^2q^3$, 则可对 S'_3 与 S''_3 两个等式直接利用错位相减法消去冗余项 $S''_3 - S'_3 = a_2S_3 - a_1S_3 = a_2a_3 - a_1a_1$, 得到 $S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$ 。同时, 作差时在 S'_3 与 S''_3 两个等式中发现 $a_2^2 = a_1^2q^2 = a_1a_3$ 。

推广至一般情形:

$$\begin{aligned}
 a_n S_n &= a_n a_1 + a_n a_2 + \cdots + a_n a_n \\
 &= a_1^2 q^{n-1} + a_1^2 q^n + \cdots + a_1^2 q^{2n-3} + a_1^2 q^{2n-2} \\
 a_{n-1} S_n &= a_{n-1} a_1 + a_{n-1} a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n \\
 &= a_1^2 q^{n-2} + a_1^2 q^{n-1} + \cdots + a_1^2 q^{2n-3}
 \end{aligned}$$

同样对于两个等式可利用错位相减法消去冗余项 $a_n S_n - a_{n-1} S_n = a_n a_n - a_{n-1} a_1$, 得到前 n 项和的表达式 $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ 。消去部分发现 $a_1 a_n = a_2 a_{n-1}, a_2 a_n = a_3 a_{n-1}, a_3 a_n = a_4 a_{n-1}, \cdots$, 对于任意的 $u, s, t, v \in \mathbb{Z}^*$, 满足 $u + v = s + t$, 则 $a_u a_v = a_s a_t$, 间接证明了等比中项的成立。

4. 数列教学启示

莫里斯克莱因坚信, 历史上大数学家所遇到的困难, 正是学生也会遇到的学习障碍, 因而历史是教学的指南[10]。数学史作为理解数学的途径, 揭开数学形式化的面纱。在数列的教学中, 将数学史与数列结合, 最终在不断地改进中渗透数列的类比、归纳、函数等思想。

1) 数学史促进数列的理解

在数学的学习中, 应秉承深度学习思想, 深究数列的来龙去脉。数学史就可以作为很好的工具进行辅助教学, 将数学史纳入教学中。数列的概念教学中, 通过数学史创造情境, 从最开始美索不达米亚数的起源到毕达哥拉斯学派和欧几里得对数的研究, 引导学生先理解数再到学习数列, 让学生切实地感受数列的起源。同时对于性质的研究, 借助历史故事或古代数学家的研究背景, 如利用《几何原本》中的几何构造促进对数列基本概念和本质的理解。

2) 数学史使数学返璞归真

海克尔认为: 儿童的心理发展不过是种族进化的简短重复而已。[11]如果能了解数学发展、变革的完善过程, 有助于改变数学观。这种重构式的教学和学习, 能使数学返璞归真。通过研究数学史, 可以汲取前人研究的经验, 渗透研究中的思想方法。如注重函数与数列的集合教学, 等差数列和等比数列的类比教学, 且在数列的求和公式上, 遵循历史的发展过程, 让历史再现, 体会数学的发展历程。

5. 结束语

数学史对于学生的数学学习和教师的专业发展都有至关重要的促进作用, 它不仅能改变学生, 也能改变老师。数学的教学应揭示发现、建构数学知识的一般策略与方法, 增强学生主动建构、创造数学知识的意识与能力, 这样才能使数学核心素养落到实处。在数学史的背景下对数列进行研究, 认识数列的本质和来龙去脉, 挖掘背后的思想, 引导学生在学的过程中培养数学的思维和关键的能力。当然, 数学的历史不会改变, 但对于数学史的深刻认识和运用、基于数学史的教学研究, 以及培养学生的核心素养却是长期的、潜移默化的过程。

基金项目

本文受新疆维吾尔自治区一流本科课程(空间解析几何)建设项目、新疆师范大学本科教学质量工程建设教学研究与改革项目(SDJG2022-17)、新疆师范大学数学与应用数学专业基础课程群教学团队资助。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 8-34, 69, 82-83.
- [2] 欧慧谋, 黄红梅, 曹广福. 中学数列的数学思想及其教学启示[J]. 数学教育学报, 2024, 33(1): 1-7.

- [3] 张治才. 高中数学不同版本教材数列概念内容的比较研究[J]. 数学教学通讯, 2024(18): 11-15.
- [4] 程大位. 算法统宗[M]//郭书春, 主编. 中国科学技术典籍通汇(数学卷二). 郑州: 河南教育出版社, 1994.
- [5] 欧几里得. 几何原本[M]. 南京: 译林出版社, 2014.
- [6] 屠靱韵, 汪晓勤. 中国古代数学文献中的数列问题[J]. 数学教学, 2011(3): 23-25, 27.
- [7] 李玲. 数学史融入数列教学的行动研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2016. \
- [8] 莫里斯·克莱因(Morris Kline). 古今数学思想[M]. 朱学贤, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.
- [9] 覃淋. 等比数列求和问题的历史[J]. 中学生数学, 2022(11): 27-31.
- [10] Kline, M. (1966) A Proposal for the High School Mathematics Curriculum. *Mathematics Teacher*, **59**, 322-330.
<https://doi.org/10.5951/MT.59.4.0322>
- [11] 狄确. 基于 HPM 的数学重构式教学的案例研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2024.