**Pure Mathematics** 理论数学, 2025, 15(7), 7-14
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.157199

Hans汉斯

# 与广义分数阶积分相关的Hermite-Hadamard型不等式研究

**杨仕哲***，**韩家宜**，**干镒柯**#

浙江外国语学院数学系，浙江 杭州

收稿日期：2025年5月30日；录用日期：2025年6月28日；发布日期：2025年7月10日

## 摘 要

**论文建立了*h*-凸函数情形下与广义分数阶积分相关的中点型Hermite-Hadamard不等式，并得到了与此不等式相关的若干梯形不等式误差估计。所得结果推广了Riemann-Liouville分数阶积分和Hadamard分数阶积分等一些重要分数阶积分的已知结果。**

## 关键词

***h*-凸函数，Hermite-Hadamard型不等式，广义分数阶积分，误差估计**

# Study on Hermite-Hadamard Inequalities Related to Generalized Fractional Integrals

**Shizhe Yang***, **Jiayi Han**, **Yike Gan**#

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang

Received: May 30th, 2025; accepted: Jun. 28th, 2025; published: Jul. 10th, 2025

## Abstract

**Hermite-Hadamard inequalities for generalized fractional integrals via *h*-convex functions are established in the paper, and some error estimates related to these inequalities are also obtained. These conclusions generalize some known results about Riemann-Liouville fractional integral, Hadamard**

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 杨仕哲, 韩家宜, 干镒柯. 与广义分数阶积分相关的 Hermite-Hadamard 型不等式研究[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 7-14. DOI: 10.12677/pm.2025.157199

**fractional integral, and so on.**

## Keywords

***h*-Convex Function, Hermite Hadamard Inequality, Generalized Fractional Integral, Error Estimation**



## 1. 引言

凸函数在纯粹数学和应用数学等众多领域中具有广泛的应用。关于凸函数的一个重要应用是如下的 Hermite-Hadamard 不等式：若 $f$ 是一个定义在闭区间 $[a,b]$ 上的凸函数，则有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

2007 年，Varošanec [1]引入了 $h$-凸函数概念，它是一类推广了的凸型函数。

**定义 1** 设函数 $h:[0,1]\to[0,+\infty)$，$I\subset\Re^n$ 是凸区域。若函数 $f:I\to\Re$，对任意的 $x,y\in I, t\in[0,1]$ 满足：

$$f(tx+(1-t)y)\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y)$$

那么称 $f$ 为 $I$ 上的 $h$-凸函数．记为 $f\in SX(h;I)$。

特别地，若在定义 1 中分别取 $h(t)=t, h=1, h(t)=1/t$ 和 $h(t)=t^s\ (0<s\le1)$，那么 $h$-凸函数即为凸函数、$P$-函数[2]、Godunova-Levin 函数[3]和 $s$-凸函数(第二种意义下) [4]。

在过去的几十年来，众多学者在上述各类凸型函数下建立了类似(1)的不等式，如参见文献[2]和[5]-[7]等。

**定义 2** 设 $f\in L_1[a,b], a\ge0$，其中 $L_1[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上的勒贝格可积函数集。对于任意的 $\alpha>0$，定义左 Riemann-Liouville 分数阶积分 $J_{a^+}^{\alpha}f(x)$ 和右 Riemann-Liouville 分数阶积分 $J_{b^-}^{\alpha}f(x)$ 分别为：

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t, x>a$$

和

$$J_{b^-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(t-x)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t, x<b$$

定义左 Hadamard 分数阶积分 $K_{a^+}^{\alpha}f(x)$ 和右 Hadamard 分数阶积分 $K_{a^-}^{\alpha}f(x)$ 为：

$$K_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}, x>a$$

和

$$K_{b^-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}, x<b$$

这里的 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 是伽马函数。

Riemann-Liouville 分数阶积分和 Hadamard 分数阶积分分别在 19 世纪和 20 世纪引入，它们在数学及应用数学、物理学、工程学等众多领域有着广泛的应用。2016 年，Jleli 和 Samet [8]将上述积分进行了推广，引入了如下的分数阶积分。

**定义 3** 设 $w:[a,b]\to\Re$ 是一个在 $(a,b]$ 上的单调递增函数，且在 $(a,b)$ 上存在连续的导函数 $w'(x)$。$f\in L_1[a,b],a\geq 0$。对于任意的 $\alpha>0$，广义左分数阶积分 $I_{a^+;w}^{\alpha}f(x)$ 和广义右分数阶积分 $I_{b^-;w}^{\alpha}f(x)$ 被分别定义为：

$$I_{a^+;w}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{w'(t)f(t)}{\left[w(x)-w(t)\right]^{1-\alpha}}\right)\mathrm{d}t,x>a$$

和

$$I_{b^-;w}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\left(\frac{w'(t)f(t)}{\left[w(t)-w(x)\right]^{1-\alpha}}\right)\mathrm{d}t,x<b$$

注：在定义 3 中，若取 $w(t)=t$，则广义分数阶积分变为 Riemann-Liouville 分数阶积分；若取 $w(t)=\ln t$，则广义分数阶积分变为 Hadamard 分数阶积分。

2013 年，Sarikaya 等[9]将式(1)推广到 Riemann-Liouville 分数阶积分情形。

**定理 A** 设 $f\in L_1[a,b]$，且 $f$ 为 $[a,b]$ 上的正的凸函数，那么有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\tag{2}$$

同年，Tunç [10]将式(2)中第二个不等式推广到 $h$-凸函数情形。2016 年，Jleli 和 Samet [8]将定理 A 推广到广义分数阶积分。

**定理 B** 设 $w:[a,b]\to\Re$ 是一个在 $[a,b]$ 上单调递增的正的凸函数，且在 $(a,b)$ 上存在连续的导数。若 $f\in L_1[a,b]$，且 $f$ 为 $[a,b]$ 上的正的凸函数，那么：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^+;w}^{\alpha}F(b)+I_{b^-;w}^{\alpha}F(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\tag{3}$$

其中

$$F(x)=f(x)+\tilde{f}(x),\tilde{f}(x)=f(a+b-x),x\in[a,b]\tag{4}$$

注：1) 易知 $\frac{1}{2}F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，$\frac{F(a)+F(b)}{2}=f(a)+f(b)$。2) 若在定理 B 中取 $w(t)=t$，则定理 B 退化为定理 A。

受上述文献的启发，本文将把定理 B 推广到 $h$-凸函数情形，进一步建立与此不等式相关的梯形误差估计。

## 2. Hermite-Hadamard 型不等式

在给出主要定理前，先说明两个基本事实。根据定义 3，设 $s=\frac{t-a}{x-a}$，则

$$I_{a^+;w}^{\alpha}f(x)=\frac{x-a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\frac{w'(sx+(1-s)a)f(sx+(1-s)a)}{\left[w(x)-w(sx+(1-s)a)\right]^{1-\alpha}}\right)\mathrm{d}s,x>a$$

设 $s=\dfrac{t-x}{b-x}$，则

$$I_{b^-;w}^{\alpha} f(x)=\frac{b-x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\frac{w'(sb+(1-s)x)f(sb+(1-s)x)}{\left[w(sb+(1-s)x)-w(x)\right]^{1-\alpha}}\right)\mathrm{d}s, x<b$$

**定理 1** 设 $w:[a,b]\to\mathfrak{R}$ 是一个在 $(a,b]$ 上单调递增的正函数，且在 $(a,b)$ 上存在连续的导函数。如果 $f:[a,b]\to\mathfrak{R}^+$ 是 $h$-凸函数，则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(\frac{a+b}{2}\right)&\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^+;w}^{\alpha}F(b)+I_{b^-;w}^{\alpha}F(a)\right]\\&\le\left[\sup_{t\in[0,1]}\left[h(t)+h(1-t)\right]\right]\frac{F(a)+F(b)}{2}\end{aligned}\tag{5}$$

其中函数 $F$ 如式(4)定义。

**证明** 对于 $s\in[0,1]$，令 $u=sa+(1-s)b$，$v=(1-s)a+sb$。

根据 $f$ 的 $h$-凸性，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\right)\\&\le h\left(\frac{1}{2}\right)f\left(sa+(1-s)b\right)+h\left(\frac{1}{2}\right)f\left((1-s)a+sb\right)\\&=h\left(\frac{1}{2}\right)F\left(sa+(1-s)b\right)\\&=h\left(\frac{1}{2}\right)F\left((1-s)a+sb\right)\end{aligned}\tag{6}$$

和

$$f\left(sa+(1-s)b\right)\le h(s)f(a)+h\left((1-s)\right)f(b)$$
$$f\left((1-s)a+sb\right)\le h\left((1-s)\right)f(a)+h(s)f(b)$$

将式(6)的两边乘以

$$\frac{b-a}{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha)}\frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w(b)-w\left((1-s)a+sb\right)\right]^{1-\alpha}}$$

并关于 $s$ 在 $(0,1)$ 上积分得：

$$\begin{aligned}&\frac{b-a}{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1\frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w(b)-w\left((1-s)a+sb\right)\right]^{1-\alpha}}\mathrm{d}s\\&\le\frac{b-a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w(b)-w\left((1-s)a+sb\right)\right]^{1-\alpha}}F\left(sa+(1-s)b\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{b-a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w(b)-w\left((1-s)a+sb\right)\right]^{1-\alpha}}\left[f\left(sa+(1-s)b\right)+f\left((1-s)a+sb\right)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\le \frac{b-a}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\int_0^1 \frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w(b)-w\left((1-s)a+sb\right)\right]^{1-\alpha}}\mathrm{d}s$$

因为

$$\int_0^1 \frac{w'\left(sb+(1-s)b\right)}{\left[w(b)-w\left(sb+(1-s)b\right)\right]^{1-\alpha}}\mathrm{d}s=\frac{1}{\alpha(b-a)}\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}$$

结合定义 3，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha} F\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\le I_{a^+;w}^{\alpha}F(b)\\&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{F(a)+F(b)}{2}\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha} F\left(\frac{a+b}{2}\right)\le I_{a^+;w}^{\alpha}F(b)\\&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{F(a)+F(b)}{2}\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}\end{aligned}\tag{7}$$

通过类似的方式，将式(6)的两边乘以

$$\frac{b-a}{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha)}\frac{w'\left((1-s)a+sb\right)}{\left[w\left((1-s)a+sb\right)-w(a)\right]^{1-\alpha}}$$

积分所得的关于 $(0,1)$ 上 $t$ 的不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha} F\left(\frac{a+b}{2}\right)\le I_{b^+;w}^{\alpha}F(a)\\&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{F(a)+F(b)}{2}\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}\end{aligned}\tag{8}$$

将不等式(7)和(8)相加，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(\frac{a+b}{2}\right)&\le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^+;w}^{\alpha}F(b)+I_{b^-;w}^{\alpha}F(a)\right]\\&\le\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]\frac{F(a)+F(b)}{2}\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明。

特别地，若在定理 1 中令 $h(t)=t^{s}$，易知 $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left[h(t)+h(1-t)\right]$ 在 $t=1/2$ 时取到，则有如下结论。

**推论 1** 设 $w$ 如定理 1 所示。若 $f:[a,b]\to\Re^{+}$ 是 $s$-凸函数(第二种意义下)，则有

$$\frac{1}{2^{1-s}}F\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\le 2^{1+s}\frac{F(a)+F(b)}{2}$$

进一步，在推论 1 中令 $s=1$，则上述结论即为定理 B。

## 3. 与 Hermite-Hadamard 不等式相关的梯形不等式

在给出本节的主要定理前，我们先引入以下一个关键恒等式。

**引理 1** [8] 设函数 $w$ 如定理 1 所示。如果 $f:[a,b]\to\Re$ 是可微函数，则有如下等式

$$\begin{aligned}&\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\\&=\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\left[\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right]\\&\quad\times\left[f'(sa+(1-s)b)-f'((1-s)a+sb)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中函数 $F$ 如式(4)中所述。

**定理 2** 设函数 $w$ 如定理 1 所示。如果 $f:[a,b]\to\Re$ 是可微函数，且 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 $h$-凸函数，则我们有以下与广义分数阶积分相关的梯形不等式：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\right|\\&\le\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\left[\sup_{t\in[0,1]}\left[h(t)+h(1-t)\right]\right]\\&\quad\times\int_{0}^{1}\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中函数 $F$ 如式(4)中所述。

**证明** 根据引理 1，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\right|\\&\le\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\left|f'(sa+(1-s)b)\right|\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\left|f'((1-s)a+sb)\right|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

因为 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 $h$-凸函数，我们有

$$\left|\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\left[\sup_{s\in[0,1]}\left[h(s)+h(1-s)\right]\right]$$
$$\times\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\mathrm{d}s$$

这样就完成了证明。

**定理 3** 设函数 $w$ 如定理 1 所示。如果 $f:[a,b]\to\mathfrak{R}$ 是可微函数，且 $|f'|^{q},q>1$，是在 $[a,b]$ 上的 $h$-凸函数，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有以下与广义分数阶积分相关的梯形不等式：

$$\left|\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$
$$\le \frac{b-a}{\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \frac{b-a}{\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

其中函数 $F$ 的如式(4)中所述。

**证明** 根据引理 1 及 Hölder 不等式，我们得到：

$$\left|\frac{F(a)+F(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};w}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};w}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$
$$\le \frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\left|f'(sa+(1-s)b)\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|\left|f'((1-s)a+sb)\right|\mathrm{d}s$$
$$\le \frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^1\left|f'(sa+(1-s)b)\right|^{q}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^1\left|f'((1-s)a+sb)\right|^{q}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{b-a}{2\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\left|f'(a)\right|^{q}+\int_0^1 h(1-s)\mathrm{d}s\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 h(1-s)\mathrm{d}s\left|f'(a)\right|^{q}+\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\le \frac{b-a}{\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{b-a}{\left[w(b)-w(a)\right]^{\alpha}}\left(\int_0^1\left|\left[w(sb+(1-s)a)-w(a)\right]^{\alpha}+\left[w(b)-w(sb+(1-s)a)\right]^{\alpha}\right|^{p}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

即得所证。


## 致　谢

感谢阮建苗教授的指导。

## 基金项目

本文受国家级大学生创新创业训练计划项目(No. 202314275020)基金的资助。


## 参考文献


[1] Varošanec, S. (2007) On *h*-Convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 303-311. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.086

[2] Dragomir, S., Pecaric, J. and Persson, L.E. (1995) Some Inequalities of Hadamard Type. *Soochow Journal of Mathematics*, **21**, 335-341.

[3] Godunova, E.K. and Levin, V.I. (1985) Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa soderzascego vypuklye monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii. Vyčislitel'naya Matematika i Fizika: Mežvuzovskij Sbornik Naučnyh Trudov, 138-142.

[4] Breckner, W.W. (1978) Stetigkeitsaussagen fur eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen raumen. *Publications de l'Institut Mathématique*, **23**, 13-20.

[5] Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. (1999) The Hadamard Inequalities for S-Convex Functions in the Second Sense. *Demonstratio Mathematica*, **32**, 687-696. https://doi.org/10.1515/dema-1999-0403

[6] Sarikaya, M.Z., Saglam, A. and Yildirim, H. (2008) On Some Hadamard-Type Inequalities for *h*-Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **2**, 335-341. https://doi.org/10.7153/jmi-02-30

[7] Zhang, Z., Wei, W. and Wang, J. (2015) Generalization of Hermite-Hadamard Inequalities Involving Hadamard Fractional Integrals. *Filomat*, **29**, 1515-1524. https://doi.org/10.2298/fil1507515z

[8] Jleli, M. (2016) On Hermite-Hadamard Type Inequalities via Fractional Integrals of a Function with Respect to Another Function. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **9**, 1252-1260. https://doi.org/10.22436/jnsa.009.03.50

[9] Sarikaya, M.Z., Set, E., Yaldiz, H. and Başak, N. (2013) Hermite-Hadamard's Inequalities for Fractional Integrals and Related Fractional Inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, **57**, 2403-2407. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.048

[10] Tunç, M. (2013) On New Inequalities for *h*-Convex Functions via Riemann-Liouville Fractional Integration. *Filomat*, **27**, 559-565. https://doi.org/10.2298/fil1304559t