

线性空间中严格 E -凸和严格半 E -凸集值映射的性质

邹东易

重庆电力高等专科学校人文素质学院, 重庆

收稿日期: 2025年6月2日; 录用日期: 2025年7月4日; 发布日期: 2025年7月22日

摘要

首先, 本文在线性空间中定义了严格 E -凸和严格半 E -凸集值映射。其次, 获得了这两种集值映射的性质。本文获得的结果推广了文献中的一些已知结果。

关键词

E -凸集, 严格 E -凸集值映射, 严格半 E -凸集值映射

Properties of Strict E -Convex and Strict Semi- E -Convex Set-Valued Maps in Linear Spaces

Dongyi Zou

School for Humanistic Qualities, Chongqing Electric Power College, Chongqing

Received: Jun. 2nd, 2025; accepted: Jul. 4th, 2025; published: Jul. 22nd, 2025

Abstract

Firstly, strict E -convex and strict semi- E -convex set-valued maps are defined in linear spaces. Secondly, the properties of two set-valued maps are obtained. The results obtained in this paper extend some known results in the literature.

Keywords

E -Convex Set, Strict E -Convex Set-Valued Map, Strict Semi- E -Convex Set-Valued Map



1. 引言

众所周知, 集值映射的锥凸性是一个非常的概念。一些学者为了削弱这个概念, 提出了广义锥凸集值映射的概念。Youness [1]用映射 $E: X \rightarrow X$ 引进了 E -凸集和 E -凸函数。显然, 当映射是一个恒等映射时, E -凸集和 E -凸函数就分别退化成凸集和凸函数。Zhou 等[2]在局部凸空间中引进半 E -凸集值映射, 研究了集值优化问题解的存在性条件。更多关于 E -凸及相关研究结果可见文献[3]及里面的参考文献。本文将引进严格 E -凸和严格半 E -凸两种集值映射, 研究它们的性质。本文的主要结构如下, 在第二节, 我们给出了预备知识, 包括一些基本概念和引理。在第三节, 我们分别获得了严格 E -凸和严格半 E -凸两种集值映射的性质。

2. 预备知识

设 X 是线性空间, Y 和 Z 是两个实序线性空间。设 A 和 C 分别是 X 和 Y 中的非空集合。 0 代表每个线性空间中的零元。 C 为凸锥当且仅当

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in C, \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \forall c_1, c_2 \in C$$

C 为点锥当且仅当 $C \cap (-C) = \{0\}$ 。 C 称为非平凡的当且仅当 $C \neq \{0\}$, 且 $C \neq Y$ 。

定义 2.1 [4] 设 M 是 Y 上的非空集合。 M 的代数内部是集合

$$\text{cor}M := \{m \in M \mid \forall h \in Y, \exists \epsilon > 0, \forall \lambda \in [0, \epsilon], m + \lambda h \in M\}$$

从现在开始, 我们假设 C 是 Y 中代数内部非空的点凸锥, D 是 Z 中的点凸锥。

定义 2.2 [1] 设 K 是 X 上的非空集合。称 K 是 X 上的 E -凸集当且仅当存在向量映射 $E: X \rightarrow X$, 使得

$$\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y) \in K, \forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$$

定义 2.3 设 A 是 X 上的非空集合。集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 A 上是严格 E -凸的当且仅当存在向量映射 $E: X \rightarrow X$, 且 A 是 X 上的 E -凸集, 使得对 A 中任意两个不同的点 x 和 y , 我们有

$$\lambda F(E(x)) + (1-\lambda)F(E(y)) \subseteq F(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) + \text{cor}C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

定义 2.3 设 A 是 X 上的非空集合。集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 A 上是严格半 E -凸的当且仅当存在向量映射 $E: X \rightarrow X$, 且 A 是 X 上的 E -凸集, 使得

$$\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \subseteq F(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) + \text{cor}C, \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$$

引理 2.1 [5] 设 $C \subseteq Y$ 是非平凡点凸锥, 且 $\text{cor}C \neq \emptyset$, 那么 $C + \text{cor}C \subseteq \text{cor}C$ 。

3. 主要结果

设 $F: X \rightrightarrows Y$ 和 $G: X \rightrightarrows Z$ 是两个从 X 分别映射到 Y 和 Z 的集值映射。

现在我们考虑具有约束条件的最小化集值优化问题:

$$(VP) \quad \min F(x) \text{ s.t. } x \in K := \{x \in A \mid G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$$

定理 3.1 在(VP)中, 若集值映射 $G: X \rightrightarrows Z$ 在 K 上是严格 E -凸的, 且 $E(K) \subseteq K$, 那么 K 在 X 上是 E -凸集。

证明: 情形 1: 设 $x_1, x_2 \in K$, 且 $x_1 \neq x_2, \lambda \in [0, 1]$ 。我们证明

$$G(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) \cap (-D) \neq \emptyset \quad (1)$$

因为 $x_1, x_2 \in K$, 我们有

$$G(x_1) \cap (-D) \neq \emptyset \quad (2)$$

且

$$G(x_2) \cap (-D) \neq \emptyset \quad (3)$$

由式(2)和式(3)可知, 存在 z_1, z_2 , 使得

$$z_1 \in G(x_1) \cap (-D) \quad (4)$$

和

$$z_2 \in G(x_2) \cap (-D) \quad (5)$$

因为集值映射 $G: X \rightrightarrows Z$ 在 K 上是严格 E -凸的, 所以我们有

$$\lambda G(E(x_1)) + (1-\lambda)G(E(x_2)) \subseteq G(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) + \text{cor}C \quad (6)$$

从式(4)、式(5)和式(6)可知

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \subseteq G(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) + \text{cor}D \quad (7)$$

根据式(7)可得, 存在 $z \in G(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2))$, 使得

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in z + \text{cor}D \quad (8)$$

由式(8)可得

$$z \in \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 - \text{cor}D \quad (9)$$

通过式(4)和式(5), 我们有

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in -D \quad (10)$$

由式(9)和式(10)和引理 2.1 可知

$$z \in -D - \text{cor}D \subseteq -\text{cor}D \subseteq -D$$

因此式(1)成立。故 $\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2) \in K$ 。

情形 2: 当设 $x_1 = x_2 \in K$, $\lambda \in [0, 1]$ 。因为 $E(K) \subseteq K$, 我们有

$$\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2) = E(x_1) \in E(K) \subseteq K$$

由情形 1 与情形 2 可得, K 在 X 上是 E -凸集。证毕。

定理 3.2 设 K 在 X 上是 E -凸集, 若集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 K 上是严格半 E -凸的, 那么 $F(K) + \text{cor}C \cup \{0\}$ 在 Y 上是凸集。

证明: 设 $z_1, z_2 \in F(K) + \text{cor}C \cup \{0\}, \lambda \in [0, 1]$ 。那么存在 $x_i \in K, y_i \in F(x_i), c_i \in \text{cor}C \cup \{0\} (i=1, 2)$, 使得

$$z_i = y_i + c_i (i=1, 2) \quad (11)$$

由式(11)可得

$$\begin{aligned}\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 &= \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \\ &\in \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2\end{aligned}\quad (12)$$

因为 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 K 上是严格半 E -凸的, 我们有

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subseteq F(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) + \text{cor}C \quad (13)$$

通过式(12)和式(13)可知

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in F(\lambda E(x_1) + (1-\lambda)E(x_2)) + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 + \text{cor}C \quad (14)$$

因为 K 在 X 上是 E -凸集, 从式(14)可得

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in F(K) + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 + \text{cor}C \quad (15)$$

显然有

$$\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 + \text{cor}C \subseteq \text{cor}C \subseteq \text{cor}C \cup \{0\} \quad (16)$$

根据式(15)和式(16)可知

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in F(K) + \text{cor}C \cup \{0\} \quad (17)$$

由式(17)可见 $F(K) + \text{cor}C \cup \{0\}$ 在 Y 上是凸集。证毕。

基金项目

国家自然科学基金(12171061)。

参考文献

- [1] Youness, E.A. (1999) E -Convex Sets, E -Convex Functions and E -Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **102**, 439-450. <https://doi.org/10.1023/A:1021792726715>
- [2] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Wan, X. (2018) The Semi- E Cone Convex Set-valued Map and Its Applications. *Optimization Letters*, **12**, 1329-1337. <https://doi.org/10.1007/s11590-017-1169-y>
- [3] Syau, Y.R. and Lee, E.S. (2005) Some Properties of E -Convex Functions. *Applied Mathematics Letters*, **18**, 1074-1080. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.09.018>
- [4] 史书中. 凸分析[M]. 上海: 上海科技出版社, 1990.
- [5] Khan, A.A., Tammer, C. and Zălinescu, A. (2015) Set-Valued Optimization: An Introduction with Applications. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7>