Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(7), 53-60
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.157206

半折叠*n*-立方体图的度量维数的上界

田　毅，段天宇，张城源，王　奥*

河北金融学院统计与数据科学学院，河北 保定

收稿日期：2025年6月4日；录用日期：2025年7月5日；发布日期：2025年7月21日

摘　要

令图G是简单的无向连通图，图$G=(X,R)$的解析集$S\subseteq X$是指对于任意两个不同点$u,v\in X$，总存在$s_i\in S$使得$\partial(u,s_i)\neq\partial(v,s_i)$。图$G$的度量维数是所有解析集基数的最小值。本文针对直径$d\geq 3$的半折叠*n*-立方体图，在$n=4d+2$时构造了一个解析集，从而证明了$\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$是该图度量维数的上界。最后，将所得上界与Babai的上界进行对比，发现所得上界在一定情况下更优。

关键词

度量维数，半折叠*n*-立方体图，距离正则图

An Upper Bound on the Metric Dimension of the Halved Folded *n*-Cube

Yi Tian, Tianyu Duan, Chengyuan Zhang, Ao Wang*

School of Statistics and Data Science, Hebei Finance University, Baoding Hebei

Received: Jun. 4th, 2025; accepted: Jul. 5th, 2025; published: Jul. 21st, 2025

Abstract

Let G be a simple, undirected, connected graph. A resolving set $S\subseteq X$ for graph $G=(X,R)$ satisfies for any two vertices $u,v\in X$, there exists $s_i\in S$ such that $\partial(u,s_i)\neq\partial(v,s_i)$. The metric dimension of graph G is the minimum cardinality of all resolving sets. In this paper, for the halved folded *n*-cube with diameter $d\geq 3$, we construct a resolving set if $n=4d+2$, and then prove $\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$ is an upper bound on the metric dimension of the graph. Finally, compare the upper bound

*通讯作者。

文章引用: 田毅, 段天宇, 张城源, 王奥. 半折叠 *n*-立方体图的度量维数的上界[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 53-60.
DOI: 10.12677/pm.2025.157206

with Babai's upper bounds, and obtain that the upper bound above is better in some conditions.

Keywords

Metric Dimension, Halved Folded *n*-Cube, Distance-Regular Graph

1. 引言

1975 年，Slater [1]为了确定入侵者在网络中的位置，首次引入图的解析集和度量维数概念。下面将会介绍相关定义。本文总设图$G=(X,R)$是一个有限、无向、简单的连通图，其中集合X是顶点集，R是边集。图G中两个顶点v,u的距离指连接这两点最短路线的长度，记为$\partial(v,u)$。图G的直径是G中任意两点距离的最大值，简记为d。设非空集合$S=\{s_1,\cdots,s_t\}\subseteq X$，如果对任意两个不同的顶点$u,v\in X$，总存在$s_i\in S$使得$\partial(u,s_i)\neq\partial(v,s_i)$，则称集合$S$是图$G$的解析集，也称$s_i$（或$S$）解析$u$和$v$。图$G$的度量维数是指图$G$所有解析集的基数的最小值，记作$\mu(G)$。

由于计算一般图的度量维数的精确值是 NP-困难的[2]，所以前人的研究对象大多是某类具体图的度量维数的值或界。例如，Babai [3] [4]得到了强正则图和本原距离正则图的度量维数的上界；Chvátal [5]给出了 Hamming 图度量维数的上界；Cáceres 等[6]确定了 Hamming 图$H_{2,k}$的度量维数的精确值；Bailey 和 Meagher [7]找到了 Grassmann 图$G_q(n,k)$在$k\geq 2$时的度量维数的一个上界；Bailey 和 Cameron [8]介绍了 Johnson 图和 Kneser 图的度量维数的一些结果；Bailey 等[9]构造了 Johnson 图和 Kneser 图的多种解析集；冯敏和王恺顺[10]得到了双线性型图$H_q(n,d)$在$n\geq d\geq 2$时的度量维数的上界，这改进了 Babai 关于$H_q(n,d)$在$n\geq d\geq 4$时的度量维数的最一般上界；郭军等[11] [12]通过构造解析集分别得到了 Johnson 图、双奇图、双 Grassmann 图、扭 Grassmann 图、辛对偶极图和对称双线性型图的度量维数的上界。

除此之外，还有许多成果是关于 *n*-立方体图及其相关图的度量维数。例如，Lindström [13]研究了 *n*-立方体图的度量维数；Hertz [14]基于 IP 的交换算法指出了 *n*-立方体图的度量维数的新上界；张跃忠等[15]对于折叠 *n*-立方体图通过构建极小解析集的方式得到了该图的度量维数的上界；Kelenc 等[16]研究了 *n*-立方体图度量维数与边度量维数的关系，也研究了度量维数与混合度量维数的关系；关于折叠 *n*-立方体图的半图(即半折叠 *n*-立方体图)的度量维数，田毅等[17]刻画了$n=4d\ (d\geq 3)$时的上界，但对于其他情形下的度量维数还尚未研究。基于此，本文拟研究$n=4d+2\ (d\geq 3)$时，半折叠 *n*-立方体图的度量维数的上界。

2. 半折叠 *n*-立方体图

关于 *n*-立方体图，Simó 和 Yebra [18]这样描述：每个顶点可以标记为由 0 和 1 组成的一个 *n*-维列向量，两个顶点相邻当且仅当它们对应的分量上只有一个分量的数值是不同的。将两个顶点对应的列向量之间不同的分量个数定义为两向量之间的 Hamming 距离。则 *n*-立方体图中两个顶点相邻当且仅当相应列向量之间的 Hamming 距离为 1。显然，*n*-立方体图的顶点个数为2^n，直径为 *n*。

令$n\geq 2$是偶数且令$[n]=\{1,\cdots,n\}$。半折叠 *n*-立方体图是一个拆分图，其顶点集为

$V(G)=\{\tilde{u}\mid\tilde{u}=\{u,\overline{u}\},u\subseteq[n],\overline{u}\subseteq[n],u\cup\overline{u}=[n],u\cap\overline{u}=\phi,|u|\equiv 0(\bmod 2)\}$ (其中 ϕ 表示空集)，两个顶点 $\tilde{u},\tilde{w}$ 相邻当且仅当 $\min\{|u\Delta w|,|u\Delta\overline{w}|\}=2$，其中符号 Δ 表示对称差，即 $u\Delta w=u\cup w-u\cap w=(u\setminus w)\cup(w\setminus u)$。显然，半折叠 n-立方体图的直径 $d=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$。由半折叠 n-立方体图的定义知 $|V(G)|=2^{n-2}$，且对于任意两个顶点 $\tilde{u},\tilde{w}$ 有 $|u\Delta w|+|u\Delta\overline{w}|=n$。因此，

$$2\partial(\tilde{u},\tilde{w})=\min\{|u\Delta w|,n-|u\Delta\overline{w}|\}\tag{1}$$

为了方便，下文中用 G 表示半折叠 n-立方体图，并给出下列两个注记：

注记 1 顶点 $\{u,\overline{u}\}$ 是满足 $|u|\le|\overline{u}|$ 的有序对。令 $X_r:=\{\tilde{u}=\{u,\overline{u}\}\in V(G)\mid\min\{|u|,|\overline{u}|\}=r\}$，则偶数 r 满足 $0\le r\le\frac{n}{2}$ 且 $\bigcup_r X_r=V(G)$。

注记 2 由注记 1 可知，顶点 $\tilde{\phi}=\{\phi,[n]\}\in X_0$，并且若 $\tilde{u}\in X_k,\tilde{v}\in X_r$ 满足 $k\ne r$，则有 $\partial(\tilde{\phi},\tilde{u})\ne\partial(\tilde{\phi},\tilde{v})$。

3. 主要引理

本节将针对半折叠 n-立方体图 G 证明两个重要引理。

引理 1 设 $\tilde{u}:=\{u,\overline{u}\}$ 和 $\tilde{v}:=\{v,\overline{v}\}$ 是图 G 的不同顶点，且满足 $|u|=|v|=k$，其中 k 是偶数且 $2\le k\le\frac{n}{2}$。若 $j\in u\Delta v$，则对于顶点 $\tilde{x}:=\{x,\overline{x}\}\in V(G)$ (其中 $x=\{i,j\}$)，下列结论均成立：

(i) 如果 $i\in u\cap v$，则 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$；

(ii) 如果 $i\in\overline{u}\cap\overline{v}$，且 $n=4d$，或者 $n=4d+2$ 且 $k\le 2d-2$，则 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$；

(iii) 如果 $\{i,j\}\subseteq u\setminus v$ 或 $v\setminus u$，且 $n=4d+2$ 和 $k=2d$，则 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

证明 因为 $j\in u\Delta v$，所以不失一般性总假设 $j\in u\setminus v$。

(i) 由于 $j\in u\setminus v$ 且 $i\in u\cap v$，结合 $|u|=|v|=k$，可得 $|u\Delta x|=k-2$ 且 $|v\Delta x|=k$。根据式(1)及 $2\le k\le\frac{n}{2}$，得

$$\partial(\tilde{u},\tilde{x})=\min\left\{\frac{k-2}{2},\frac{n-(k-2)}{2}\right\}=\frac{k-2}{2}$$

且

$$\partial(\tilde{v},\tilde{x})=\min\left\{\frac{k}{2},\frac{n-k}{2}\right\}=\frac{k}{2}$$

因此，结论成立。

(ii) 由于 $j\in u\setminus v$ 且 $i\in\overline{u}\cap\overline{v}$，可得 $|u\Delta x|=|u|=k$ 且 $|v\Delta x|=|v|+2=k+2$。根据式(1)及 $2\le k\le\frac{n}{2}$，得

$$\partial(\tilde{u},\tilde{x})=\min\left\{\frac{k}{2},\frac{n-k}{2}\right\}=\frac{k}{2}$$

且

$$\partial(\tilde{v},\tilde{x})=\min\left\{\frac{k+2}{2},\frac{n-(k+2)}{2}\right\}$$

显然，$\frac{k+2}{2}\ne\frac{k}{2}$。如果 $n=4d$，因为 k 是偶数，容易得 $\frac{n-(k+2)}{2}\ne\frac{k}{2}$；如果 $n=4d+2$ 且 $k\le 2d-2$，同样容易得 $\frac{n-(k+2)}{2}\ne\frac{k}{2}$。综上，不论哪一种情况，都有 $\frac{n-(k+2)}{2}\ne\frac{k}{2}$。因此，$\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

(iii) 由于 $j\in u\setminus v$ 以及 $\{i,j\}\subseteq u\setminus v$ 或 $v\setminus u$，容易得出 $i\in u\setminus v$。那么由 $|u|=|v|=k=2d$，可得 $|u\Delta x|=k-2=2d-2$ 且 $|v\Delta x|=k+2=2d+2$。因为 $n=4d+2$，根据式(1)可得

$$\partial(\tilde{u},\tilde{x})=\min\left\{\frac{2d-2}{2},\frac{4d+2-(2d-2)}{2}\right\}=d-1$$

且

$$\partial(\tilde{v},\tilde{x})=\min\left\{\frac{2d+2}{2},\frac{4d+2-(2d+2)}{2}\right\}=d$$

因此，$\partial(\tilde{u},\tilde{x})\neq\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

引理 2 设图 G 是直径为 d 的半折叠 n-立方体图，其中 $n=4d+2\geq 14$。若

$$S=\left\{\{\phi,[n]\}\right\}\cup\left\{\{u,\overline{u}\}\mid u=\{i,j\},1\leq i\leq\frac{n}{2}-1,i+4\leq j\leq n\right\}$$
$$\cup\left\{\{u,\overline{u}\}\mid u=\{i,j\},i=\frac{n}{2},i+3\leq j\leq n\right\}\cup\left\{\{u,\overline{u}\}\mid u=\{i,j\},i=\frac{n}{2}+1,i+2\leq j\leq n\right\}$$

则下列结论成立：

(i) 对于任意 $i\in[n]$，有 $\left|\left\{j\in[n]\mid\left\{\{i,j\},\overline{\{i,j\}}\right\}\notin S\right\}\right|\leq 2d+2$；

(ii) 对于任意两个不同的 $i_1,i_2\in[n]$，有 $\left|\left\{j\in[n]\mid\left\{\{i_1,j\},\overline{\{i_1,j\}}\right\}\notin S,\left\{\{i_2,j\},\overline{\{i_2,j\}}\right\}\notin S\right\}\right|\leq 2d-2$；

(iii) 对于任意三个不同的 $i_1,i_2,i_3\in[n]$，有 $\left|\left\{j\in[n]\mid\left\{\{i_1,j\},\overline{\{i_1,j\}}\right\}\notin S,\left\{\{i_2,j\},\overline{\{i_2,j\}}\right\}\notin S,\left\{\{i_3,j\},\overline{\{i_3,j\}}\right\}\notin S\right\}\right|\leq 2d-3$。

证明 对于任意 $i\in[n]$，令 $N_i=\left\{j\in[n]\mid\left\{\{i,j\},\overline{\{i,j\}}\right\}\notin S\right\}$。根据 S 的特点，得到表 1。

Table 1. N_i of S
表 1. S 的 N_i

i	N_i	$\lvert N_i\rvert$
1	$\{2,3,4\}$	3
2	$\{1,3,4,5\}$	4
3	$\{1,2,4,5,6\}$	5
$4\leq i\leq\frac{n}{2}-1$	$\{i-3,i-2,i-1,i+1,i+2,i+3\}$	6
$i=\frac{n}{2}$	$\{i-3,i-2,i-1,i+1,i+2\}$	5
$i=\frac{n}{2}+1$	$\{i-3,i-2,i-1,i+1\}$	4
$i=\frac{n}{2}+2$	$\{i-3,i-2,i-1,i+1,\cdots,n\}$	$\frac{n}{2}+1$
$\frac{n}{2}+3\leq i\leq n$	$\left\{\frac{n}{2}+2,\cdots,n\right\}\setminus\{i\}$	$\frac{n}{2}-2$

(i) 由于 $n=4d+2\geq 14$，有 $\frac{n}{2}+1=2d+2>6$。由表 1 可知，对于任意 $i\in[n]$ 有 $|N_i|\leq 2d+2$，结论成

立。

(ii) 任取两个不同的 $i_1,i_2\in[n]$，不妨设 $i_1<i_2$。由表 1 可得：若 $i_1=1$，则 $\left|N_{i_1}\cap N_{i_2}\right|\le\left|N_{i_1}\right|=3$；若 $i_1\in\{2,3\}$，则 $\left|N_{i_1}\cap N_{i_2}\right|\le\left|N_{i_1}\right|-1\le 5-1=4$；若 $i_1\in\left\{4,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\}$，则 $|N_{i_1}\cap N_{i_2}|\le\left|N_{i_1}\right|-2\le 6-2=4$；若 $i_1\in\left\{\frac{n}{2}+2,\cdots,n\right\}$，则 $N_{i_1}\cap N_{i_2}=N_{i_2}\setminus\{i_1\}$，其中由于 $i_1<i_2$，$i_2\in\left\{\frac{n}{2}+3,\cdots,n\right\}$，因此 $\left|N_{i_1}\cap N_{i_2}\right|=\left|N_{i_2}\right|-1=\frac{n}{2}-2-1=\frac{n}{2}-3=2d-2$。显然，当 $d\ge 3$ 时，$2d-2\ge 4$。所以对于任意两个不同的 $i_1,i_2\in[n]$，有 $\left|N_{i_1}\cap N_{i_2}\right|\le 2d-2$。

(iii) 任取三个不同的 $i_1,i_2,i_3\in[n]$。根据表 1 得，集合 $N_{i_1}\cap N_{i_2}\cap N_{i_3}$ 是 $N_{i_1}\cap N_{i_2}$ 或 $N_{i_1}\cap N_{i_3}$ 或 $N_{i_2}\cap N_{i_3}$ 的真子集。故由(ii)可得 $\left|N_{i_1}\cap N_{i_2}\cap N_{i_3}\right|\le 2d-2-1=2d-3$。

4. 主要结论

已知 $n=2,4,6,8$ 时半折叠 n-立方体图的度量维数的精确值已经被确定(见文献[19] [20])；另外，文献[17]得到了 $n=4d\,(d\ge 3)$ 时半折叠 n-立方体图的度量维数的上界，本文主要讨论 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ 且 $n\ge 14$ 情况下半折叠 n-立方体图的度量维数，得到下面结论。

定理 1 设图 G 为半折叠 n-立方体图。若 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ 且 $n\ge 14$，则 $\mu(G)\le\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$。

证明 构造集合

$$S=\{\{\phi,[n]\}\}\cup\left\{\{u,\bar{u}\}\mid u=\{i,j\},1\le i\le\frac{n}{2}-1,i+4\le j\le n\right\}$$
$$\cup\left\{\{u,\bar{u}\}\mid u=\{i,j\},i=\frac{n}{2},i+3\le j\le n\right\}\cup\left\{\{u,\bar{u}\}\mid u=\{i,j\},i=\frac{n}{2}+1,i+2\le j\le n\right\}$$

容易计算 $|S|=\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$。要想证明 $\mu(G)\le\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$，只需证明集合 S 是图 G 的解析集。又因为 $\{\phi,[n]\}\in S$，所以由注记 2 可知，只需证明对任意不同点 $\tilde{u}=\{u,\bar{u}\},\tilde{v}=\{v,\bar{v}\}\in X_k$ (其中 k 是偶数且 $2\le k\le 2d$)，总存在 $\tilde{x}=\{x,\bar{x}\}\in S$ 使得 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。由于 $|u|=|v|=k$ 且 $u\ne v$，故 $|u\setminus v|=|v\setminus u|=k-|u\cap v|>0$。这意味着 $|u\Delta v|=|u\setminus v|+|v\setminus u|\ge 2$ 且为偶数。下面考虑两种情形：$2\le k\le 2d-2$ 或 $k=2d$。

情形 1 $2\le k\le 2d-2$

因为 $|u\cup v|\le|u|+|v|=2k\le 4d-4$ 且 $n=4d+2$，所以 $|\bar{u}\cap\bar{v}|\ge 6$。这意味着 $(\bar{u}\cap\bar{v})\cap\{6,\cdots,n\}\ne\phi$。下面考虑三种子情形：$1\in u\Delta v$、$u\Delta v\subseteq\{2,3,4\}$、$1\notin u\Delta v$ 且 $(u\Delta v)\cap\{5,\cdots,n\}\ne\phi$。

(1) 若 $1\in u\Delta v$，则令 $x=\{1,i\}$，其中 $i\in(\bar{u}\cap\bar{v})\cap\{6,\cdots,n\}$。显然，点 $\tilde{x}=\{x,\bar{x}\}\in S$。又因为 $2\le k\le 2d-2$ 且 $n=4d+2$，所以由引理 1 (ii)可知点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

(2) 若 $u\Delta v\subseteq\{2,3,4\}$，则根据 $|u\Delta v|$ 为偶数可知 $|u\Delta v|=2$。这意味着 $(u\Delta v)\cap\{2,3\}\ne\phi$，进而根据 $|\bar{u}\cap\bar{v}|\ge 6$ 可知 $(\bar{u}\cap\bar{v})\cap\{7,\cdots,n\}\ne\phi$。此时令 $x=\{i,j\}$，其中 $i\in\bar{u}\cap\bar{v}\cap\{7,\cdots,n\},j\in(u\Delta v)\cap\{2,3\}$。则 $\tilde{x}=\{x,\bar{x}\}\in S$ 且由引理 1 (ii)可知该点满足 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

(3) 若 $1\notin u\Delta v$ 且 $(u\Delta v)\cap\{5,\cdots,n\}\ne\phi$，则令 $x=\{1,i\}$，其中 $i\in(u\Delta v)\cap\{5,\cdots,n\}$。显然，点 $\tilde{x}=\{x,\bar{x}\}\in S$。此时，$1\in u\cap v$ 或 $1\in\bar{u}\cap\bar{v}$。若 $1\in u\cap v$，则由引理 1 (i)可知 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$；若 $1\in\bar{u}\cap\bar{v}$，则由引理 1 (ii)可知点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u},\tilde{x})\ne\partial(\tilde{v},\tilde{x})$。

情形 2 $k=2d$

因为 $k\ge 6$，所以 $d\ge 3$。由于 $u\ne v$ 且 $|u|=|v|=k=2d$，故 $0\le|u\cap v|\le k-1=2d-1$。下面考虑六种子情形：$|u\cap v|=0$、$|u\cap v|=1$、$2\le|u\cap v|\le d$、$|u\cap v|=d+1$、$d+2\le|u\cap v|\le 2d-2$、$|u\cap v|=2d-1$。

(1) 若 $|u \cap v| = 0$，即 $u \cap v = \phi$，则令 $w = \left\{\frac{n}{2}+2,\cdots,n\right\}$。此时由 $n = 4d+2$ 可知 $|w| = 2d$。由于 $|u| = |v| = 2d$ 但 $u \neq v$，故 $u \neq w$ 或者 $v \neq w$。不妨假设 $u \neq w$，这意味着 $u \cap \left\{1,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\} \neq \phi$。令 $i = \min_{p\in u} p, j = \max_{p\in u} p$。注意，由于 $u \cap v = \phi$，所以上述 $i, j \in u \setminus v$。进一步地，由于 $|u| = k \geq 6$，故 $j \geq i+5$，其中 $i \in \left\{1,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\}$。此时令 $x = \{i, j\}$。则 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$ 且由引理 1 (iii)可知该点满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

(2) 若 $|u \cap v| = 1$，则不妨设 $u \cap v = \{i\}$。由于 $d \geq 3$，所以 $|u \Delta v| = 4d-2 > 2d+2$。根据引理 2 (i)可知，存在 $j \in u \Delta v$ 使得 $x = \{i, j\}$ 满足 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$。则由引理 1 (i)知该点 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

(3) 若 $2 \leq |u \cap v| \leq d$，则任取两个不同数 $i_1, i_2 \in u \cap v$。因为 $|u| = |v| = 2d$ 且 $|u \cap v| \leq d$，所以 $|u \Delta v| = |u| + |v| - 2|u \cap v| \geq 4d - 2d = 2d > 2d-2$。从而根据引理 2 (ii)知，存在 $i \in \{i_1, i_2\}$ 和 $j \in u \Delta v$ 使得 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$，其中 $x = \{i, j\}$。此时由引理 1 (i)知该点 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

(4) 若 $|u \cap v| = d+1$，则由 $d \geq 3$ 知 $|u \cap v| \geq 4$。此时，任取三个不同数 $i_1, i_2, i_3 \in u \cap v$。根据 $|u \Delta v| = 2d-2 > 2d-3$ 和引理 2 (iii)可知，存在 $i \in \{i_1, i_2, i_3\}, j \in u \Delta v$ 使得 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$，其中 $x = \{i, j\}$。则由引理 1 (i)知该点 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

(5) 若 $d+2 \leq |u \cap v| \leq 2d-2$，则 $d \geq 4$ 且 $k \geq 8$。下面考虑集合 $u \Delta v$。首先，由于 $|u \cap v| \leq 2d-2$ 且 $|u| = |v| = k = 2d$，可得 $|u \Delta v| \geq 4$，这意味着 $|u \setminus v| = |v \setminus u| \geq 2$。

① 若存在 $i \in u \Delta v$ 使得 $i \in \left\{1,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\}$，则不失一般性假设 $i \in u \setminus v$。因为 $|u| = k \geq 8$，所以存在 $j \in u$ 使得 $|j-i| \geq 4$，此时令 $x = \{i, j\}$，则 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$。如果 $j \in u \setminus v$，那么由引理 1 (iii)可知该点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$；如果 $j \in u \cap v$，那么由引理 1 (i)可知该点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

② 若 $u \Delta v \subseteq \left\{\frac{n}{2}+2,\cdots,n\right\}$，则由 $n = 4d+2$ 可知 $|u \Delta v| \leq 2d$。然而根据 $|v \setminus u| \geq 2$ 可知，$|u \cup v| = |u| + |v \setminus u| \geq 2d+2$。所以，存在 $i \in u \cap v$ 使得 $i \in \left\{1,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\}$。此时有**断言：**必存在 $j \in u \Delta v$ 使得 $|j-i| \geq 4$。事实上，如果所有 $j \in u \Delta v$ 都有 $|j-i| \leq 3$，则根据 $j \in \left\{\frac{n}{2}+2,\cdots,n\right\}$ 和 $i \in \left\{1,\cdots,\frac{n}{2}+1\right\}$ 可知 $j > i$。故 $|j-i| = j-i \leq 3$。这意味着 $u \Delta v \subseteq \{i+1, i+2, i+3\}$，与 $|u \Delta v| \geq 4$ 矛盾！因此，断言成立。此时令 $x = \{i, j\}$，则 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$，且由引理 1 (i)可知该点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

(6) 若 $|u \cap v| = 2d-1$，则由 $|u| = |v| = k = 2d$ 可知 $|u \setminus v| = |v \setminus u| = 1$。不妨设 $u \setminus v = \{i_1\}, v \setminus u = \{i_2\}$。根据引理 2 (ii)和 $|u \cap v| = 2d-1 > 2d-2$ 可知，存在 $i \in \{i_1, i_2\}$ 和 $j \in u \cap v$，使得 $\tilde{x} = \{x, \overline{x}\} \in S$，其中 $x = \{i, j\}$。由引理 1 (i)可知该点 $\tilde{x}$ 满足 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。

综上，对于任意不同的顶点 $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_k$，$S$ 中总存在 $\tilde{x}$ 使得 $\partial(\tilde{u}, \tilde{x}) \neq \partial(\tilde{v}, \tilde{x})$。因此 S 是图 G 的解析集。故 $\mu(G) \leq |S| = \frac{3}{8}n^2 - \frac{5}{4}n$，结论得证。

文献[21]指出半折叠 n-立方体图是本原的距离正则图，相关概念见文献[21]。关于本原的距离正则图的度量维数，Babai 给出了下列结论。

引理 3 [3] [4] 设图 Γ 是有 m 个点的本原的距离正则图，若图的价至少为 3 且直径 $d \geq 2$，则有：

(i) $\mu(\Gamma) < 4\sqrt{m}\log m$；

(ii) $\mu(\Gamma) < 2d\dfrac{m}{m - M(\Gamma)}\log m$，其中 $M(\Gamma) = \max_{0\leq i\leq d}|\Gamma_i|$。这里 Γ_i 表示固定任何一个点之后与该点距离

是 i 的点的集合。

下面针对半折叠 n-立方体图，比较定理 1 中的上界和引理 3 中的两个上界。

首先，与引理 3 (i)比较。已知半折叠 n-立方体图的顶点数 $m=2^{n-2}$ 且 $n=4d+2\ge 14$，故 $\log 2^{n-2}>1$，所以 $4\sqrt{m}\log m=2^{\frac{n}{2}+1}\log 2^{n-2}>2^{\frac{n}{2}+1}$。令 $g(x)=2^{\frac{x}{2}+1}-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{4}x$。容易发现，$g(x)$ 在 $x\ge 14$ 时严格递增，并且 $g(14)=200>0$。从而，$2^{\frac{n}{2}+1}>\frac{3}{8}n^2-\frac{5}{4}n$。这说明，定理 1 的上界比引理 3 (i)的上界更优。

接下来与引理 3 (ii)进行比较。由文献[21]知，半折叠 n-立方体图的交叉阵列 $a_i,b_i,c_i\left(0\le i\le d\right)$ 满足：

$$b_i=\left(\frac{n}{2}-i\right)(n-2i-1),c_i=i(2i-1)(0\le i\le d-1),c_d=\begin{cases}d(2d-1), & \frac{n}{2}\equiv 1(\bmod 2)\\ 2d(2d-1), & \frac{n}{2}\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}$$

在此基础上，结合 $n=4d+2$ 得 $b_{i-1}-c_i=-(8d+6)i+8d^2+14d+6(1\le i\le d)$。令 $f(i):=-(8d+6)i+8d^2+14d+6$。容易证明函数 $f(i)$ 在 $1\le i\le d$ 上严格下降，所以 $\min\{b_{i-1}-c_i\}=b_{d-1}-c_d=8d+6>0$。这意味着 $b_{i-1}>c_i\ (1\le i\le d)$。由文献[21]可知，$|G_i|=\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{c_1c_2\cdots c_i}(1\le i\le d)$，且 $|G_0|=1$。因此，

$$M(G)=\max_{1\le i\le d}\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{c_1c_2\cdots c_i}=\frac{b_0b_1\cdots b_{d-1}}{c_1c_2\cdots c_d}=\frac{(2d)!(4d+1)!!}{d!(d+1)!((2d-1)!!)^2}$$

其中 ! 和 !! 分别表示阶乘和双阶乘。此时，引理 3 (ii)的上界为

$$2d\frac{2^{4d}\log 2^{4d}}{2^{4d}-\frac{(2d)!(4d+1)!!}{d!(d+1)!((2d-1)!!)^2}}$$

利用 Mathematica 软件比较了该上界和定理 1 中的上界，发现在 $d=3,4,5$ 时，定理 1 的上界更优。

5. 小结

本文通过构造解析集的方法，讨论了 $n=4d+2(d\ge 3)$ 时半折叠 n-立方体图的度量维数的上界，虽然没有刻画出度量维数的精确值，但是通过和 Babai 所得的上界进行比较，发现所得上界在一些情况下是更优的。后续将在此基础上，进一步刻画更好的上界或其精确值。

基金项目

河北省教育厅科学研究项目(QN2025114)；河北省金融科技应用重点实验室课题(2024004)；河北金融学院育苗课题(YMZX202313)。

参考文献

[1] Slater P.J. (1975) Leaves of Trees. *Congressus Numerantium*, **14**, 549-559.

[2] Khuller, S., Raghavachari, B. and Rosenfeld, A. (1996) Landmarks in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **70**, 217-229. https://doi.org/10.1016/0166-218x(95)00106-2

[3] Babai, L. (1980) On the Complexity of Canonical Labeling of Strongly Regular Graphs. *SIAM Journal on Computing*, **9**, 212-216. https://doi.org/10.1137/0209018

[4] Babai, L. (1981) On the Order of Uniprimitive Permutation Groups. *The Annals of Mathematics*, **113**, 553-568.

https://doi.org/10.2307/2006997

[5] Chvátal, V. (1983) Mastermind. *Combinatorica*, **3**, 325-329. https://doi.org/10.1007/bf02579188

[6] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Puertas, M.L., Seara, C., *et al*. (2007) On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **21**, 423-441. https://doi.org/10.1137/050641867

[7] Bailey, R.F. and Meagher, K. (2012) On the Metric Dimension of Grassmann Graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, **13**, 97-104. https://doi.org/10.46298/dmtcs.532

[8] Bailey, R.F. and Cameron, P.J. (2011) Base Size, Metric Dimension and Other Invariants of Groups and Graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **43**, 209-242. https://doi.org/10.1112/blms/bdq096

[9] Bailey, R.F., Cáceres, J., Garijo, D., González, A., Márquez, A., Meagher, K., *et al*. (2013) Resolving Sets for Johnson and Kneser Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **34**, 736-751. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2012.10.008

[10] Feng, M. and Wang, K. (2012) On the Metric Dimension of Bilinear Forms Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 1266-1268. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.11.020

[11] Guo, J., Wang, K. and Li, F. (2012) Metric Dimension of Some Distance-Regular Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **26**, 190-197. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9459-x

[12] Guo, J., Wang, K. and Li, F. (2013) Metric Dimension of Symplectic Dual Polar Graphs and Symmetric Bilinear Forms Graphs. *Discrete Mathematics*, **313**, 186-188. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.09.023

[13] Lindström, B. (1964) On a Combinatory Detection Problem. *A Magyar Tudományos Akadémia*. *Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, **9**, 195-207.

[14] Hertz, A. (2017) An Ip-Based Swapping Algorithm for the Metric Dimension and Minimal Doubly Resolving Set Problems in Hypercubes. *Optimization Letters*, **14**, 355-367. https://doi.org/10.1007/s11590-017-1184-z

[15] Zhang, Y., Hou, L., Hou, B., Wu, W., Du, D. and Gao, S. (2019) On the Metric Dimension of the Folded N-Cube. *Optimization Letters*, **14**, 249-257. https://doi.org/10.1007/s11590-019-01476-z

[16] Kelenc, A., Masa Toshi, A.T., Škrekovski, R. and Yero, I.G. (2022) On Metric Dimensions of Hypercubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, **23**, #P2.08. https://doi.org/10.26493/1855-3974.2568.55c

[17] 田毅, 王魏, 任子涵, 等. 一类半折叠 *n*-立方体图的度量维数[J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 54-58.

[18] Simó, E. and Yebra, J.L.A. (1997) The Vulnerability of the Diameter of Folded N-Cubes. *Discrete Mathematics*, **174**, 317-322. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(97)80334-2

[19] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A. and Oellermann, O.R. (2000) Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **105**, 99-113. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(00)00198-0

[20] Bailey, R.F. (2015) The Metric Dimension of Small Distance-Regular and Strongly Regular Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **62**, 18-34.

[21] Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier, A. (1989) Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag.