Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(8), 66-75
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.158221

Hans汉斯

Rogers-Ramanujan型连分数的构造方法

刘梦蝶

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2025年6月5日；录用日期：2025年7月24日；发布日期：2025年8月20日

摘　要

Rogers-Ramanujan连分数是Ramanujan笔记本的重要研究内容之一。本文利用两个已知Rogers恒等式，使用数学归纳法和递归关系式构造了一个新的Rogers-Ramanujan型连分数。

关键词

Rogers-Ramanujan型连分数，递归法，数学归纳法

The Construction Method of Rogers-Ramanujan Type Continued Fractions

Mengdie Liu

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Jun. 5th, 2025; accepted: Jul. 24th, 2025; published: Aug. 20th, 2025

Abstract

The Rogers-Ramanujan type continued fraction is one of the significant research contents in Ramanujan's notebooks. In this paper, by using two known Rogers's identities, the mathematical induction and a recursive relation, a new Rogers-Ramanujan type continued fraction is constructed.

Keywords

Rogers-Ramanujan Type Continued Fractions, Recursive Method, Mathematical Induction

文章引用: 刘梦蝶. Rogers-Ramanujan 型连分数的构造方法[J]. 理论数学, 2025, 15(8): 66-75.
DOI: 10.12677/pm.2025.158221

1. 前言

Rogers-Ramanujan 型连分数不仅具有优美的数学结构，还与超几何函数、椭圆积分、模等式等数学分支紧密相关，在数论、统计学、代数学以及组合分拆理论等领域有重要应用。发现和证明新的 Rogers-Ramanujan 型恒等式始终是一个非常活跃的课题。在 2010 年，Helmut Prodinger [1]利用递归关系：$zS_{k+1}=S_{k-1}-a_kS_k$，($k=0,1,2,\cdots$)和数学归纳法对 Rogers-Ramanujan 型连分数进行研究。在 2011 年，Nancy S. S. Gu 和 Helmut Prodinger [2]运用同样的递归关系对大量的 Rogers-Ramanujan 型恒等式进行研究，得到了许多 Rogers-Ramanujan 型恒等式的连分数展开，总计 18 个结果。在 2013 年，Kamilla Oliver 和 Helmut Prodinger [3]根据小分拆定理推导出 7 个 Rogers-Ramanujan 型连分数展开式。在 2023 年，蔡华蓉[4]对上述结果之一进行了修正。在 2025 年，张英凡[5]对 Rogers-Ramanujan 型恒等式进行研究，并利用新的递归关系：$zs_{k+1}=s_{k-1}-\left(a_k+b_kz\right)s_k,\left(k=0,1,2,\cdots\right)$得到了一个 Rogers-Ramanujan 型恒等式的连分数展开。

本文利用两个已知 Rogers 恒等式[6]，运用递归关系 $zs_{k+1}=s_{k-1}-\left(a_k+b_kz\right)s_k,\left(k=0,1,2,\cdots\right)$ 和数学归纳法，构造出一个 Rogers-Ramanujan 型连分数。

为了方便，本节对后续内容中所用到的定义做如下说明。

定义 1.1

$$(a;q)_n:=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right),n\ge 1,$$

$$(a;q)_\infty:=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right),|q|<1.$$

特别地，当 $n=0$ 时

$$(a;q)_0:=1$$

2. 主要结论及证明

在本节中，首先给出以下两个恒等式：

Rogers 恒等式 1：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}}=\frac{\left(q^8,q^{12},q^{20};q^{20}\right)_\infty\left(-q;q^2\right)_\infty}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}.$$

Rogers 恒等式 2：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{\left(q^4,q^6,q^{10};q^{10}\right)_\infty\left(q^2,q^{18};q^{20}\right)_\infty}{(q;q)_\infty}.$$

引理 2.1 (Guarticle 2)设

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nq^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n}},G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nq^{n^2}}{(q;q)_{2n}}.$$

则

$$\frac{zF(z)}{G(z)}=\frac{z(1-q)}{1-}\frac{zq}{(1-q)(1-q^3)+}\frac{zq(1-q^6)}{1-q^5+}\frac{zq^8(1-q)}{(1-q^6)(1-q^7)+}\cdots$$
$$\frac{zq^{2n-1}\left(1-q^{2n^2+3n+1}\right)}{1-q^{4n+1}+}\frac{zq^{6n+2}\left(1-q^{2n^2-n}\right)}{\left(1-q^{4n+3}\right)\left(1-q^{2n^2+3n+1}\right)+}\cdots \tag{1}$$

我们使用上述两个恒等式，首先定义出两个幂级数 $F(z)$ 和 $G(z)$，构造幂级数 $\{s_k\}$，和数 $\{a_k\},\{b_k\}$ 以满足递归关系 $zs_{k+1}=s_{k-1}-(a_k+b_kz)s_k,(k=0,1,2,\cdots)$，由此求出幂级数 s_k，和数 a_k,b_k，并由数学归纳法进行证明。从而构造出新的 Rogers-Ramanujan 型连分数。

定理 2.1 设

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nq^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n}},G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nq^{n^2}}{(q;q)_{2n}}.$$

则

$$\frac{zF(z)}{G(z)}=\frac{z}{1+qz+}\frac{zq^2}{1-q+q^3z+}\frac{zq^6}{1-q^3+q^5z+}\cdots$$
$$\frac{zq^{8k-6}}{1-q^{4k-3}+q^{4k-1}z+}\frac{zq^{8k-2}}{1-q^{4k-1}+q^{4k+1}z+}\cdots \tag{2}$$

证明 令幂级数 $F(z)=s_0,G(z)=s_{-1}$，首先根据递归关系式 $zs_{k+1}=s_{k-1}-(a_k+b_kz)s_k,(k=0,1,2,\cdots)$ 求出幂级数 $\{s_k\}$ 的前七项 $s_{-1},s_0,s_1,s_2,s_3,s_4,s_5$ 以及对应的数列 $\{a_k\}$ 的前五项 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4，其中取数列 $\{b_k\}$ 为 $b_{2k}=q^{2k+1},b_{2k+1}=q^{2k+1}$，再猜测幂级数 $\{s_k\}$ 和数 $\{a_k\},\{b_k\}$，最后用数学归纳法证明。其中记幂级数 $\{s_k\}$ 中 z^n 项的系数为 $[z^n]s_k$

当 $k=0$ 时，有 $zs_1=s_{-1}-(a_0+b_0z)s_0$，其中取 $b_0=q$。

对于 z^0 的系数有

$$0=1-a_0.$$

则可得

$$a_0=1.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}[z^n]zs_1&=[z^n]\left(s_{-1}-(a_0+b_0z)s_0\right)\\&=\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}}-\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n}}-q\frac{q^{(n-1)^2+2(n-1)}}{(q;q)_{2(n-1)}}\\&=\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n-1}}-\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n-2}}\\&=\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n-1}}\left(1-\left(1-q^{2n-1}\right)\right)\\&=\frac{q^{n^2+2n-1}}{(q;q)_{2n-1}}.\end{aligned} \tag{3}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_1=\frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n+1}}.$$

即

$$s_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n+1}}z^n.$$

当 $k=1$ 时，有 $zs_2=s_0-\left(a_1+b_1z\right)s_1$，其中取 $b_1=q$。
对于 z^0 的系数有

$$0=1-a_1\frac{q^2}{1-q}.$$

则可得

$$a_1=\frac{1-q}{q^2}.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}\left[z^n\right]zs_2&=\left[z^n\right]\left(s_0-\left(a_1+b_1z\right)s_1\right)\\&=\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n}}-\frac{1-q}{q^2}\frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n+1}}-q\frac{q^{(n-1)^2+4(n-1)+2}}{(q;q)_{2(n-1)+1}}\\&=\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)}-\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n-1}}\\&=\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)}\left(1-\left(1-q^{2n+1}\right)\right)\\&=\frac{q^{n^2+4n+1}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)}.\end{aligned}\tag{4}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_2=\frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)}.$$

即

$$s_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)}z^n.$$

当 $k=2$ 时，有 $zs_3=s_1-\left(a_2+b_2z\right)s_2$，其中取 $b_2=q$。
对于 z^0 的系数有

$$0=\frac{q^2}{1-q}-a_2\frac{q^6}{(1-q)\left(1-q^3\right)}.$$

则可得

$$a_2 = \frac{1-q^3}{q^4}.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}
\left[z^n\right] zs_3 &= \left[z^n\right]\left(s_1 - \left(a_2 + b_2 z\right)s_2\right) \\
&= \frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n+1}} - \frac{1-q^3}{q^4}\frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)} - q\frac{q^{(n-1)^2+6(n-1)+6}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(1-q^{2(n-1)+3}\right)} \\
&= \frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)} - \frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q^{n^2+4n+2}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)}\left(1-\left(1-q^{2n+3}\right)\right) \\
&= \frac{q^{n^2+6n+5}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_3 = \frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)}.$$

即

$$s_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_2}z^n.$$

当 $k=3$ 时，有 $zs_4 = s_2 - \left(a_3 + b_3 z\right)s_3$， 其中取 $b_3 = q$ 。
对于 z^0 的系数有

$$0 = \frac{q^6}{(1-q)\left(1-q^3\right)} - a_3\frac{q^{12}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)}.$$

则可得

$$a_3 = \frac{1-q^5}{q^6}.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}
\left[z^n\right] zs_4 &= \left[z^n\right]\left(s_2 - \left(a_3 + b_3 z\right)s_3\right) \\
&= \frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)} - \frac{1-q^5}{q^6}\frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)} \\
&\quad - q\frac{q^{(n-1)^2+8(n-1)+12}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(1-q^{2(n-1)+3}\right)\left(1-q^{2(n-1)+5}\right)} \\
&= \frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)} - \frac{q^{n^2+6n+6}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{q^{n^2+8n+11}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)}. \tag{6}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_4=\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)\left(1-q^{2n+7}\right)}.$$

即

$$s_4=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_3}z^n.$$

当 $k=4$ 时，有 $zs_5=s_3-\left(a_4+b_4z\right)s_4$，其中取 $b_4=q$。
对于 z^0 的系数有

$$0=\frac{q^{12}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)}-a_4\frac{q^{20}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)\left(1-q^7\right)}.$$

则可得

$$a_4=\frac{1-q^7}{q^8}.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}\left[z^n\right]zs_5&=\left[z^n\right]\left(s_3-\left(a_4+b_4z\right)s_4\right)\\&=\frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)}\\&\quad-\frac{1-q^7}{q^8}\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)\left(1-q^{2n+7}\right)}\\&\quad-q\frac{q^{(n-1)^2+10(n-1)+20}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(1-q^{2(n-1)+3}\right)\left(1-q^{2(n-1)+5}\right)\left(1-q^{2(n-1)+7}\right)}\\&=\frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)\left(1-q^{2n+7}\right)}\\&\quad-\frac{q^{n^2+8n+12}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)}\\&=\frac{q^{n^2+10n+19}}{(q;q)_{2n-1}\left(1-q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)\left(1-q^{2n+7}\right)}.\end{aligned} \tag{7}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_5=\frac{q^{n^2+12n+30}}{(q;q)_{2n+1}\left(1-q^{2n+3}\right)\left(1-q^{2n+5}\right)\left(1-q^{2n+7}\right)\left(1-q^{2n+9}\right)}.$$

即

$$s_5=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+12n+30}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_4}z^n.$$

当 $k=5$ 时，有 $zs_6=s_4-(a_5+b_5z)s_5$，其中取 $b_5=q$。
对于 z^0 的系数有

$$0=\frac{q^{20}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)\left(1-q^7\right)}-a_5\frac{q^{30}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)\left(1-q^7\right)\left(1-q^9\right)}.$$

则可得

$$a_5=\frac{1-q^9}{q^{10}}.$$

对于 z^n 的系数有

$$\begin{aligned}\left[z^n\right]zs_6&=\left[z^n\right]\left(s_4-(a_5+b_5z)s_5\right)\\&=\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_3}-\frac{1-q^9}{q^{10}}\frac{q^{n^2+12n+30}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_4}\\&\quad-q\frac{q^{(n-1)^2+12(n-1)+30}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(q^{2(n-1)+3};q^2\right)_4}\\&=\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_5}-\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_4}\\&=\frac{q^{n^2+10n+20}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_5}\left(1-\left(1-q^{2n+9}\right)\right)\\&=\frac{q^{n^2+12n+29}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_5}.\end{aligned}\tag{8}$$

则可得

$$\left[z^n\right]s_6=\frac{q^{n^2+14n+42}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_5}.$$

即

$$s_6=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+14n+42}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_5}z^n.$$

综上可猜测辅助级数 s_k 和数 a_k，b_k

$$s_{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+(4k+2)n+\left(4k^2+2k\right)}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_{2k-1}}z^n.$$

$$s_{2k+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+(4k+4)n+\left(4k^2+6k+2\right)}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_{2k}}z^n.$$

$$a_0 = 1, a_{2k} = \frac{1-q^{4k-1}}{q^{4k}}, a_{2k+1} = \frac{1-q^{4k+1}}{q^{4k+2}}.$$
$$b_{2k} = q, b_{2k+1} = q. \tag{9}$$

接下来证明猜测的辅助级数 s_k 和数 a_k，b_k 满足递归关系式 $zs_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k, (k = 0,1,2,\cdots)$，即证

$$[z^n]zs_{2k+2} = [z^n](s_{2k} - (a_{2k+1} + b_{2k+1}z)s_{2k+1}).$$
$$[z^n]zs_{2k+1} = [z^n](s_{2k-1} - (a_{2k} + b_{2k}z)s_{2k}).$$

对于 $[z^n]zs_{2k+2} = [z^n](s_{2k} - (a_{2k+1} + b_{2k+1}z)s_{2k+1})$。当 $k = 0$ 时，等式成立。
当 $k > 0$ 时，

$$[z^n]s_{2k+2} = \frac{q^{n^2+(4k+6)n+(4k^2+10k+6)}}{(q;q)_{2n+1}(q^{2n+3};q^2)_{2k+1}}.$$

$$\begin{aligned}[z^n]zs_{2k+2} &= \frac{q^{(n-1)^2+(4k+6)(n-1)+(4k^2+10k+6)}}{(q;q)_{2(n-1)+1}(q^{2(n-1)+3};q^2)_{2k+1}} \\ &= \frac{q^{n^2+(4k+4)n+(4k^2+6k+1)}}{(q;q)_{2n-1}(q^{2n+1};q^2)_{2k+1}}.\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&[z^n](s_{2k} - (a_{2k+1} + b_{2k+1}z)s_{2k+1}) \\ &= \frac{q^{n^2+(4k+2)n+(4k^2+2k)}}{(q;q)_{2n+1}(q^{2n+3};q^2)_{2k-1}} - \frac{1-q^{4k+1}}{q^{4k+2}}\frac{q^{n^2+(4k+4)n+(4k^2+6k+2)}}{(q;q)_{2n+1}(q^{2n+3};q^2)_{2k}} \\ &\quad -q\frac{q^{(n-1)^2+(4k+4)(n-1)+(4k^2+6k+2)}}{(q;q)_{2(n-1)+1}(q^{2(n-1)+3};q^2)_{2k}} \\ &= \frac{q^{n^2+(4k+2)n+(4k^2+2k)}}{(q;q)_{2n-1}(q^{2n+1};q^2)_{2k+1}} - \frac{q^{n^2+(4k+2)n+(4k^2+2k)}}{(q;q)_{2n-1}(q^{2n+1};q^2)_{2k}} \\ &= \frac{q^{n^2+(4k+2)n+(4k^2+2k)}}{(q;q)_{2n-1}(q^{2n+1};q^2)_{2k+1}}(1-(1-q^{2n+4k+1})) \\ &= \frac{q^{n^2+(4k+4)n+(4k^2+6k+1)}}{(q;q)_{2n-1}(q^{2n+1};q^2)_{2k+1}}\end{aligned} \tag{11}$$

对于 $[z^n]zs_{2k+1} = [z^n](s_{2k-1} - (a_{2k} + b_{2k}z)s_{2k})$。当 $k = 0$ 时，等式成立。
当 $k > 0$ 时，

$$[z^n]s_{2k-1} = \frac{q^{n^2+4kn+4k^2-2k}}{(q;q)_{2n+1}(q^{2n+3};q^2)_{2k-2}}.$$

$$[z^n](s_{2k-1} - (a_{2k} + b_{2k}z)s_{2k})$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{q^{n^2+4kn+4k^2-2k}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_{2k-2}}-\frac{1-q^{4k-1}}{q^{4k}}\frac{q^{n^2+(4k+2)n+\left(4k^2+2k\right)}}{(q;q)_{2n+1}\left(q^{2n+3};q^2\right)_{2k-1}}\\
&\quad-q\frac{q^{(n-1)^2+(4k+2)(n-1)+\left(4k^2+2k\right)}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(q^{2(n-1)+3};q^2\right)_{2k-1}}\\
&=\frac{q^{n^2+4kn+4k^2-2k}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_{2k}}-\frac{q^{n^2+4kn+4k^2-2k}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_{2k-1}}\\
&=\frac{q^{n^2+4kn+4k^2-2k}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_{2k}}\left(1-\left(1-q^{2n+4k-1}\right)\right)\\
&=\frac{q^{n^2+(4k+2)n+4k^2+2k-1}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_{2k}}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[z^n\right]zs_{2k+1}&=\frac{q^{(n-1)^2+4(k+1)(n-1)+\left(4k^2+6k+2\right)}}{(q;q)_{2(n-1)+1}\left(q^{2(n-1)+3};q^2\right)_{2k}}\\
&=\frac{q^{n^2+(4k+2)n+4k^2+2k-1}}{(q;q)_{2n-1}\left(q^{2n+1};q^2\right)_{2k}}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

则上述递归关系式成立。

将 a_k， b_k 代入得

$$
\frac{zF(z)}{G(z)}=\frac{z}{1+qz+}\frac{z}{\frac{1-q}{q^2}+qz+}\frac{z}{\frac{1-q^3}{q^4}+qz+}\cdots\frac{z}{\frac{1-q^{4k-3}}{q^{4k-2}}+qz+}\frac{z}{\frac{1-q^{4k-1}}{q^{4k}}+qz+}\cdots.
$$

化简得

$$
\frac{zF(z)}{G(z)}=\frac{z}{1+qz+}\frac{zq^2}{1-q+q^3z+}\frac{zq^6}{1-q^3+q^5z+}\cdots\frac{zq^{8k-6}}{1-q^{4k-3}+q^{4k-1}z+}\frac{zq^{8k-2}}{1-q^{4k-1}+q^{4k+1}z+}\cdots.
$$

证毕。

特别地，在定理 2.1 中，取 $z=1$ 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{F(1)}{G(1)}&=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n}}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}}}\\
&=\frac{1}{1+q+}\frac{q^2}{1-q+q^3+}\frac{q^6}{1-q^3+q^5+}\cdots\\
&\quad\frac{q^{8k-6}}{1-q^{4k-3}+q^{4k-1}+}\frac{q^{8k-2}}{1-q^{4k-1}+q^{4k+1}+}\cdots.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

注：以上结果在其他文献中并无发现，故为新的连分数。

参考文献

[1] Prodinger, H. (2010) Continued Fraction Expansions for Q-Tangent and Q-Cotangent Functions. *Discrete Mathematics*

& *Theoretical Computer Science*, **12**. https://doi.org/10.46298/dmtcs.492

[2] Gu, N.S.S. and Prodinger, H. (2011) On Some Continued Fraction Expansions of the Rogers—Ramanujan Type. *The Ramanujan Journal*, **26**, 323-367. https://doi.org/10.1007/s11139-011-9329-7

[3] Oliver, K. and Prodinger, H. (2012) Continued Fraction Expansions Related to Göllnitz' Little Partition Theorem. *Afrika Matematika*, **24**, 665-670. https://doi.org/10.1007/s13370-012-0088-4

[4] 蔡华蓉. 关于 Göllnitz 小分拆定理的连分式展开式的一个注记[J]. 绵阳师范学院学报, 2023, 42(11): 9-14.

[5] 张英凡. Rogers-Ramanujan 型连分数的构造及其模等式[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2025.

[6] Rogers, L.J. (1893) Second Memoir on the Expansion of Certain Infinite Products. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **1**, 318-343. https://doi.org/10.1112/plms/s1-25.1.318