

块图为线条的有限群

张玉娇

山东省诸城第一中学数学组, 山东 潍坊

收稿日期: 2025年6月8日; 录用日期: 2025年7月4日; 发布日期: 2025年7月15日

摘 要

在有限群表示论中, 有限群的块图具有重要意义。为此, 本文证明了块图为线条的有限群可解。

关键词

块分离, 块图, 可解群

Finite Groups Whose Block Graphs Are a Line

Yujiao Zhang

Mathematical Team, Zhucheng No.1 High School, Weifang Shandong

Received: Jun. 8th, 2025; accepted: Jul. 4th, 2025; published: Jul. 15th, 2025

Abstract

In the representation theory of finite groups, block graphs of finite groups are of significance. As a result, this paper proves that finite groups whose block graphs are a line are solvable.

Keywords

Block Separation, Block Graph, Solvable Group

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

有限群复不可约特征在不同素数下的块分布问题近年来得到广泛研究。该领域首先由 Navarro 与 Willems 开创, 他们提出了一个基础性问题: 何时一个 p -块能成为 q -块? (参见[1])。数年后, Bessenrodt、Malle 和 Olsson [2]提出了特征块分离的概念。接着, Navarro、Turull 与 Wolf [3]研究了可解群中的块分离现象, 而 Bessenrodt 和 Zhang 在[4] [5]中进一步探讨了有限群特征的块分离与包含关系。2021 年, Brough, Liu 与 Paolini Paonini 在[6]中创新性地提出了有限群的块图概念:

定义 1.1 记 $B_0(G)_p$ 为群 G 的主 p -块。有限群 G 的块图 $\Gamma(G)$ 是指满足以下条件的图:

- 1) 顶点集: 群阶 $|G|$ 的所有素因子作为顶点;
- 2) 连边条件: 两个不同的素数顶点 p 和 q 之间有边相连当且仅当

$$\text{Irr}(B_0(G)_p) \cap \text{Irr}(B_0(G)_q) \neq \{1_G\}$$

即它们对应的主 p -块和主 q -块的不可约特征集合只有非平凡公共特征标。

根据定义, 可得到以下结论:

(1) 块图 $\Gamma(G)$ 仅含孤立顶点当且仅当 G 为零群([4], 定理 4.1)。特别地, 不存在绝对常数 k 使得 $n(\Gamma(G)) \leq k$, 其中 $n(\Gamma(G))$ 表示块图 $\Gamma(G)$ 的连通分支个数。

(2) 块图 $\Gamma(G)$ 的直径 $\text{diam}(\Gamma(G))$ 无绝对上界, 其中 $\text{diam}(\Gamma(G))$ 的定义为:
 $\text{diam}(\Gamma(G)) = \max \{d_G(p, q) \mid p, q \text{ 属于同一连通分支}, d_G(p, q) \text{ 为 } p, q \text{ 间最短路径长度}\}$ 。例如, 令 $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times \cdots$, 其中 $|G_1| = 2 \times 5$ 、 $|G_2| = 5 \times 11$ 、 $|G_3| = 11 \times 23$, $\cdots$, 由此可见, 块图 $\Gamma(G)$ 的直径 $\text{diam}(\Gamma(G))$ 无界。

(3) 存在无限多个群, 其块图同构于给定图。例如, 存在无限多个群的块图形如 $\bullet$ 或 $\bullet(-)\bullet$ 。

(4) 块图 $\Gamma(G)$ 的连通分支数 $n(\Gamma(G)) = 2$ 当且仅当群 G 可以分解为两个互素阶子群的直积(参见文献[3], Proposition 2.1)。一般而言, $n(\Gamma(G)) = k$ 当且仅当 G 可以分解为 k 个子群 $G_1, \cdots, G_k$ 的直积, 且对于任意 $i = 1, \cdots, k$, 满足

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^k |G_j| \\ |G_i|, \frac{\sum_{j=1}^k |G_j|}{|G_i|} \end{array} \right) = 1$$

本文的主要目的是从块图角度出发, 给出有限群可解性的一个判别条件:

定理 1.2 设 G 为有限群。若 G 的块图 $\Gamma(G)$ 为一线条, 则 G 可解。

2. 预备知识

本文所讨论的群均为有限群, 所用符号标记主要参照文献[7]-[9]。对任意有限群 G , $\text{Irr}(G)$ 表示 G 的复不可约特征标集合, $\pi(G)$ 表示群阶 $|G|$ 的素因子集合, $\text{Irr}(B_0(G)_p)$ 表示 G 的主 p -块 $B_0(G)_p$ 中包含的复不可约特征标集合。我们首先给出以下直接结论:

引理 2.1 设 $N \triangleleft G$ 。

若 $p, q \in \pi(N)$ 在 $\Gamma(N)$ 中邻接, 则它们在 $\Gamma(G)$ 中也邻接;

若 $p, q \in \pi(G/N)$ 在 $\Gamma(G/N)$ 中邻接, 则它们在 $\Gamma(G)$ 中也邻接。特别地, 若 p 和 q 在 $\Gamma(G/N)$ 的同一连通分支中, 则满足 $d_G(p, q) \leq d_{G/N}(p, q) < \infty$ 。

证明: 略。 □

推论 2.2 设 $G \cong H \times K$ 。若素数 p 和 q 在块图 $\Gamma(H)$ 中邻接, 则它们在块图 $\Gamma(G)$ 中亦邻接。

命题 2.3 对任意有限非阿贝尔单群 S , 其块图 $\Gamma(S)$ 是连通的, 且直径满足 $\text{diam}(\Gamma(S)) \leq 2$ 。

证明: 该结论由文献[4]中命题 3.2、3.5 及 3.8 直接推得。□

推论 2.4 设群 G 是若干非阿贝尔单群的直积, 则其块图 $\Gamma(G)$ 连通且直径 $\text{diam}(\Gamma(G)) \leq 2$ 。

推论 2.5 设 G 为有限群。若 G 存在正规子群 N , 使得商群 G/N 为若干非阿贝尔单群的直积, 且 $\pi(G) = \pi(G/N)$, 则块图 $\Gamma(G)$ 连通且直径 $\text{diam}(\Gamma(G)) \leq 2$ 。

引理 2.6 设 N 为 G 的正规子群, 且 $p, q \in \pi(N)$ 。若 G 的主 p -块 $B_0(G)_p$ 是唯一覆盖 N 的主 p -块 $B_0(N)_p$ 的 p -块, 则以下等价:

p 和 q 在块图 $\Gamma(N)$ 中邻接 $\Leftrightarrow p$ 和 q 在块图 $\Gamma(G)$ 中邻接。

证明: 必要性($\Rightarrow$): 若 p 和 q 在块图 $\Gamma(N)$ 中邻接, 则存在非平凡特征标

$$\chi \in \text{Irr}(B_0(G)_p) \cap \text{Irr}(B_0(G)_q)$$

由平凡特征标 1_G 在 N 上的限制平凡可知, G 的主 p -块仅覆盖 N 的主 p -块。根据参考文献([8], Ch. 5, Lemma 5.7), χ 限制到 N 的所有不可约分量均属于 N 的主 p -块和主 q -块, 故

$$\text{Irr}(B_0(N)_p) \cap \text{Irr}(B_0(N)_q) \neq \{1_N\}$$

从而 p 和 q 在块图 $\Gamma(G)$ 中邻接。

充分性($\Leftarrow$) 设 $\theta \in \text{Irr}(B_0(N)_p) \cap \text{Irr}(B_0(N)_q)$ 为非平凡特征标。由([8], Ch. 5, Lemma 5.7), 存在 θ^G 的不可约分量 $\chi \in \text{Irr}(B_0(G)_q)$ 。因 $B_0(G)_q$ 是唯一覆盖 $B_0(N)_p$ 的 p -块, 故 θ^G 的所有不可约分量均属于 $B_0(G)_p$ 。于是 $1_G \neq \chi \in \text{Irr}(B_0(N)_p) \cap \text{Irr}(B_0(N)_q)$, 并且 p 和 q 在 $\Gamma(G)$ 中邻接。□

推论 2.7 设 H 为 G 的正规子群, 且对某素数 p , 商群 G/H 为 p -群。若 $p, q \in \pi(H)$, 则以下等价: p 和 q 在块图 $\Gamma(H)$ 中邻接 $\Leftrightarrow p$ 和 q 在块图 $\Gamma(G)$ 中邻接。

证明: 根据文献([8], Ch. 5, Corollary 5.6), 群 G 的主 p -块是唯一覆盖 N 的主 p -块的 p -块。由此, 结论可由引理 2.6 直接推得。□

推论 2.8 设 N 为 G 的正规子群, 且 $p, q \in \pi(N)$ 。对于群 G 的任意 p -块 B , 若 B 覆盖 N 的主 p -块 $B_0(N)_p$, 且 B 的亏群 D 满足 $DC_G(D)$ 有唯一的 p -块。则以下等价: p 和 q 在块图 $\Gamma(N)$ 中邻接 $\Leftrightarrow p$ 和 q 在块图 $\Gamma(G)$ 中邻接。

特别地, 若对任意覆盖 $B_0(N)_p$ 的 G 的 p -块 B , 存在其亏群 D 使得 $C_G(D)$ 为 p -群, 则上述结论成立。

证明: 该结论可由文献([8], Ch. 5, Theorem 3.5 and 6.1)及引理 2.6 直接推得。□

3. 定理 1.2 的证明

下面我们证明本文的主要定理, 即定理 1.2。

引理 3.1 设 $N \cong S \times \cdots \times S$ 是 G 的唯一极小正规子群, 其中 S 为非阿贝尔单群。则存在 $|S|$ 的某个素因子 p , 使得对任意包含 N 的 Sylow p -子群 P 的 p -子群 D , 均有 $C_G(D)$ 为 p -群。特别地, 素数 p 可按如下方式选取: 若 S 是李型有限单群, 则取 p 为定义特征; 否则, 取 $p = 2$ 。

此外, 可进一步选 p 为满足以下条件的 $|S|$ 的素因子: S 存在一个在 $\text{Aut}(S)$ 中自中心化的 Sylow p -子群。

证明: 取 $x \in C_G(D)$, 则 x 正规化 N 的每个单直积分量 S 。若 S 为交错群 $A_n (n \geq 5)$ 或散在单群, 由 $\text{Out}(S)$ 是 2-群可知, x'_2 中心化每个 S , 故 $x'_2 \in C_G(N) = 1$ 。此时取 $p = 2$, 即得 $C_G(D)$ 为 2-群。现设 S

是特征为 r 的李型有限单群。令 $y = x_{r'}$ 为 x 的 r' -部分, 则 y 仍正规化 S 且满足 $[y, R] = 1$ (其中 $R \in \text{Syl}_p(S)$ 且 $R \leq D$)。根据([4], Lemma 2.2) (或[11])可得, $y \in C_G(N) = 1$, 故 x 为 r -元。此时取 $p = r$ 即满足要求, 证毕。 $\square$

引理 3.2 设 $N \cong S \times \cdots \times S$ 是 G 的唯一极小正规子群, 其中 S 为非阿贝尔单群。则 G 的块图 $\Gamma(G)$ 不可能为链状图(即不构成一条路径)。

证明: 取引理 3.1 所述的素数 p 。根据文献[4]命题 3.2、3.5 和 3.8, p 在 N 的块图 $\Gamma(N)$ 中与 $|S|$ 的其他素因子邻接。由引理 3.1 和推论 2.8 可知, p 在 G 的块图 $\Gamma(G)$ 中同样与 $|S|$ 的其他素因子邻接。若 $\pi(S) \geq 4$, 则显然 $\Gamma(G)$ 不可能为链状图。故可设 $|\pi(S)| = 3$, 此时 S 必为表 1 所列单群之一。此时, 块图 $\Gamma(S)$ 是完全图, 且 $|S|$ 存在两个素因子 p 和 q (见表 1)满足: S 的 Sylow p -子群 P 和 Sylow q -子群 Q 在 $\text{Aut}(S)$ 中自中心化, 即 $C_{\text{Aut}(S)}(P) = P$ 且 $C_{\text{Aut}(S)}(Q) = Q$ 。应用引理 3.1 与推论 2.8 可知, 块图 $\Gamma(G)$ 中存在由 p, q 及 $|S|$ 的第三个素因子 s 构成的三角形。因此, $\Gamma(G)$ 不可能是链状图。 $\square$

Table 1. Simple groups whose orders have at most three prime divisors (see [10])

表 1. 阶数至多被三个素数整除的单群(见[10])

S	$ S $	$ \text{Out}(S) $	p, q
$A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5)$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	2	2, 5
$A_6 \cong L_2(9) \cong \text{Sp}_4(2)'$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	4	2, 3
$\text{PSp}_4(3) \cong U_4(2)$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	2	2, 3
$L_2(7) \cong L_3(2)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	2	2, 7
$L_2(8) \cong {}^2G_2(3)'$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	3	2, 7
$U_3(3) \cong G_2(2)'$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	2	2, 3
$L_3(3)$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$	2	2, 3
$L_2(17)$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$	2	2, 17

下面我们证明定理 1.2。

证明: 我们对 $n + |G|$ 进行归纳证明(其中 $|G|$ 为群 G 的阶, $n = |\pi(G)|$ 为块图 $\Gamma(G)$ 的顶点数)。设 N 为 G 的极小正规子群, 则 N 的块图 $\Gamma(G)$ 只有两种可能: 单条路径(链状图)和多条不交路径的并。由归纳法, 我们可以假设 N 是 G 的唯一极小正规子群。此外, 引理 3.2 表明 N 是某个素数 p 的 p -群。若 $\Gamma(G)$ 为单链, 由归纳假设知 G/N 可解, 从而 G 亦可解。若 $\Gamma(G)$ 为多链, 此时 G/N 可分解为 k 个群 $G_1, \dots, G_k$ 的直积, 其中, k 为正整数, 且满足阶互素条件: 对任意 $i = 1, 2, \dots, k$, 有

$$\left(|G_i|, \frac{\sum_{j=1}^k |G_j|}{|G_i|} \right) = 1$$

此外, 每个 $\Gamma(G)$ 均为链状, 故由归纳法知 G_i 均为可解群, 可解群的直积 G/N 仍可解, 结合 N 的可解性即得 G 可解。综上, G 为可解群。 $\square$

参考文献

- [1] Navarro, G. and Willems, W. (1997) When Is a p -Block a q -Block? *Proceedings of the American Mathematical Society*,

-
- 125, 1589-1591. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-97-04135-x>
- [2] Bessenrodt, C., Malle, G. and Olsson, J.B. (2006) Separating Characters by Blocks. *Journal of the London Mathematical Society*, **73**, 493-505. <https://doi.org/10.1112/s0024610705022556>
 - [3] Navarro, G., Turull, A. and Wolf, T.R. (2005) Block Separation in Solvable Groups. *Archiv der Mathematik*, **85**, 293-296. <https://doi.org/10.1007/s00013-005-1407-x>
 - [4] Bessenrodt, C. and Zhang, J. (2008) Block Separations and Inclusions. *Advances in Mathematics*, **218**, 485-495. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.12.010>
 - [5] Bessenrodt, C. and Zhang, J. (2011) Character Separation and Principal Covering. *Journal of Algebra*, **327**, 170-185. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.10.034>
 - [6] Brough, J., Liu, Y. and Paolini, A. (2021) The Block Graph of a Finite Group. *Israel Journal of Mathematics*, **244**, 293-317. <https://doi.org/10.1007/s11856-021-2192-3>
 - [7] Isaacs, I.M. (1994) *Character Theory of Finite Groups*. Academic Press.
 - [8] Nagao, H. and Tsushima, Y. (1989) *Representations of Finite Groups*. Academic Press.
 - [9] Navarro, G. (1998) *Characters and Blocks of Finite Groups*, London Mathematical Society. Lecture Note Series, Vol. 250. Cambridge University Press.
 - [10] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. IEM.
 - [11] Gorenstein, D. and Lyons, R. (1983) The Local Structure of Finite Groups of Characteristic 2 Type. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **42**, Article No. 276. <https://doi.org/10.1090/memo/0276>