Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(7), 27-34
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.157202

Hans汉斯

边界能量图张量积笛卡尔积联图运算的综合研究

徐美娟

青海师范大学数学与统计学院，青海 西宁

收稿日期：2025年6月9日；录用日期：2025年7月2日；发布日期：2025年7月15日

摘　要

图运算在复杂网络分析与优化中具有重要作用，边界能量图、张量积、笛卡尔积以及联图运算各自展现出独特的数学特性和应用价值。边界能量图通过谱特性衡量网络的稳定性，张量积用于构建多层级网络拓扑，笛卡尔积优化并行计算结构，联图运算增强多网络融合能力。不同运算方法在动态网络优化、信息传输与计算效率提升等方面发挥关键作用。综合运用这些方法可提升网络的拓扑优化能力，为复杂系统建模提供更完善的理论支持和实践指导。

关键词

边界能量图，张量积，笛卡尔积，联图运算，图论

Comprehensive Research on Tensor Product, Cartesian Product, and Join Operation of Borderenergetic Graphs

Meijuan Xu

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: Jun. 9th, 2025; accepted: Jul. 2nd, 2025; published: Jul. 15th, 2025

Abstract

Graph operations play a significant role in complex network analysis and optimization. Borderenergetic graphs, tensor products, Cartesian products, and join operations each exhibit unique mathematical properties and application values. Borderenergetic graphs measure the stability of networks through spectral characteristics, tensor products are used to construct multi-level network topologies, Cartesian products optimize parallel computing structures, and join operations enhance

文章引用: 徐美娟. 边界能量图张量积笛卡尔积联图运算的综合研究[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 27-34.
DOI: 10.12677/pm.2025.157202

the integration capabilities of multiple networks. Different operation methods play a key role in dynamic network optimization, information transmission, and the improvement of computational efficiency. The comprehensive application of these methods can enhance the topological optimization ability of networks and provide more complete theoretical support and practical guidance for complex system modeling.

Keywords

Borderenergetic Graph, Tensor Product, Cartesian Product, Joint Graph Operation, Graph Theory

1. 引言

图运算是研究复杂网络结构的重要工具，在数学理论和应用实践中具有广泛价值。边界能量图通过谱特性刻画网络的稳定性，张量积运算扩展了多层网络的拓扑结构，笛卡尔积优化了计算资源的分配，联图运算增强了异构网络的互联能力。这些运算方法不仅在理论上相互联系，还在实际应用中展现出不同的优化优势。随着网络规模的扩大和计算需求的提升，合理运用和组合多种图运算方法，对复杂系统的优化、信息流动效率的提升和计算模型的构建具有重要意义。

2. 边界能量图的基本定义与数学特性分析

2.1. 边界能量图的基本概念及其在图论中的地位

边界能量图是基于谱理论的图论研究对象，其核心概念源于图的特征值分布和能量计算。传统图能量由邻接矩阵特征值总和表示，而边界能量图关注特定节点或子图的贡献，衡量图的局部稳定性与全局复杂度。边界能量定义为特定子图特征值绝对值的总和，这种局部化处理方式更灵活，适用于多种实际场景。其在分析网络鲁棒性、节点影响力和动力学特征时具有重要作用。边界能量图的研究源于谱图理论，涉及特征值分布、谱半径及边界节点能量贡献等核心问题。随着网络科学的发展，其应用已扩展到社交网络、信息传播和生物网络分析等领域。在复杂图结构研究中，边界能量的计算与分析为网络结构优化、社区检测和脆弱性评估提供了重要工具，并与其他图运算方式紧密相连[1]。

2.2. 边界能量图的谱特性及其在复杂网络分析中的应用

边界能量图的谱特性包括特征值分布、特征向量解析及能量变化规律，对复杂网络的拓扑结构、连通性和稳定性分析至关重要。其能量由特定节点子图的谱特性主导。强正则图的边界能量稳定，而无标度或小世界网络因局部节点影响力差异大，边界能量变化复杂。边界能量计算常采用数值方法逼近，以适应大规模网络分析。它可用于衡量网络稳定性和节点重要性，如在社交网络中评估关键节点影响力，在生物网络中识别关键蛋白质，在交通网络中评估节点交通流动性。其谱特性还可为网络社群划分、链路预测和攻击防御等优化算法提供依据，提高计算效率和模型适应性。

3. 张量积运算对边界能量图结构的扩展及其计算方法研究

3.1. 张量积运算的数学定义与计算规则解析

张量积运算是图论中一种重要的二元运算方式，其核心思想是通过两个图的邻接矩阵计算生成一个

新的更复杂的图。给定两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$，张量积图 $G_1\times G_2$ 的顶点集是 $V_1\times V_2$，即所有顶点的有序对构成新的顶点集。边的构造方式基于两个原始图的邻接矩阵，如果 $(u_1,v_1)\in E_1$ 且 $(u_2,v_2)\in E_2$，那么在张量积图中 $((u_1,u_2),(v_1,v_2))$ 也是一条边。这种构造方式使得张量积运算具有明显的代数结构特性，运算后的邻接矩阵等于原始图邻接矩阵的 Kronecker 积，即 $A(G_1\times G_2)=A(G_1)\otimes A(G_2)$，其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积。该运算方法保持了许多矩阵运算的基本性质，例如，特征值性质：张量积图 G 的特征值集合等于原始图 G_1 和 G_2 特征值的乘积集合。即若 λ_1 是 G_1 的特征值，λ_2 是 G_2 的特征值，那么 $\lambda_1\lambda_2$ 就是 G 的特征值。这一性质在研究图的谱特性以及与边界能量图相关的能量计算中十分关键，因为边界能量图的能量计算依赖于特征值分布。设 G_1^b 和 G_2^b 为两个边界能量图，其特征值分别为 $\{\lambda_{1i}\}$ 和 $\{\lambda_{2j}\}$，经张量积运算得到边界能量图 $G^b=G_1^b\otimes G_2^b$，则 G^b 的特征值为 $\{\lambda_{1i}\lambda_{2j}\}$，其边界能量 $E(G^b)$ 可表示为 $E(G^b)=\sum_{ij}|\lambda_{1i}\lambda_{2j}|$。这一公式清晰地展示了张量积运算对边界能量图能量计算的直接影响，为后续分析边界能量图在张量积运算下的特性提供了基础。

正则性保持：当 G_1 和 G_2 都是正则图时，张量积图 G 仍然是正则图。例如，设 G_1 是 K_1-则图(每个顶点的度均为 k_1)，G_2 是 K_2-正则图。对于 G 中的任意顶点 (u,υ)，其度为 k_1k_2。因为在 G_1 中 u 有 k_1 个邻点，对于 u 的每个邻点，在 G_2 中的 k_2 个邻点都能与 (u,υ) 构成 G 的边，所以顶点 (u,υ) 的度为 k_1k_2，从而 G 是正则图。这一正则性保持性质与边界能量图紧密相关，对于边界能量图 G_1^b 和 G_2^b，若它们均为正则边界能量图，经张量积得到的 G^b 也为正则边界能量图。由于正则图的谱特性相对稳定，这意味着在张量积运算下，正则边界能量图的边界能量计算和分布具有一定的规律性。结合前面的特征值性质，我们可以进一步推导出，在正则边界能量图的张量积运算中，边界能量 $E(G^b)$ 的变化不仅与特征值乘积相关，还与正则性所决定的特征值分布规律有关。

正则的边界能量图的特征值分布规律是图论和机器学习领域的重要研究课题。研究表明，特征值分布主要受四个核心因素调控：正则化参数、边界条件、图拓扑结构和能量泛函形式。正则化参数 λ 作为调节因子，其强弱直接影响特征值分布的整体形态。当 λ 趋近于 0 时，特征值分布近似于原始拉普拉斯矩阵的谱特性，连通图的最小特征值 $\lambda_1\approx 0$，对应全局平滑模态，其余特征值呈现长尾分布，反映图的局部非均匀性。随着 λ 增大，特征值整体发生平移，在强正则化条件下($\lambda\to\infty$)，若正则项 R 为单位矩阵，则所有特征值趋近于 λ，分布呈现高度集中状态，原始图结构信息被显著抑制。这种单调变化规律在不同正则项下表现各异：当 R 为度数矩阵 D 时，特征值分布会随节点度数的异质性发生缩放变形。

边界条件作为另一个关键变量，通过不同约束方式显著改变特征值分布特性。Dirichlet 边界条件(固定边界)会强制边界节点值为零，导致最小特征值 $\lambda_1>0$，整个特征谱向上平移，并可能引入局域于边界的高频模态。相比之下，Neumann 边界条件(自由边界)能够保留低频模态，其特征值分布与无边界图更为接近，特别适合模拟自然扩散过程。Robin 边界条件(混合边界)则提供了连续过渡的特性，其特征值分布在 Dirichlet 和 Neumann 结果之间平滑变化，具体形态由混合参数精确调控。以一维链式图为例，在 Dirichlet 边界条件下，其特征值呈现典型的离散化余弦模式分布。

图拓扑结构的差异是造成特征值分布变化的第三个重要因素。规则图(如网格、环图)的特征值通常可以解析求解，其分布呈现规律性间隔，如二维网格的特征值近似服从余弦函数分布。随机图则遵循随机矩阵理论的预测，ER 随机图的特征值可能符合 Wigner 半圆律，而无标度图由于节点度数的显著异质性，往往会出现孤立的大特征值。特别值得注意的是，图的稀疏性会导致特征值分布出现明显间隙，这种特性反映了图的模块化结构特征。对于含权图而言，权重分布主要影响特征值的幅度缩放，而不会改变分布的整体形状。

能量泛函的具体形式构成了影响特征值分布的第四个维度。基于梯度的能量泛函(如 $\|\nabla u\|^2$)会产生明确的频域划分，小特征值对应平滑信号，大特征值对应高频振荡。稀疏约束(如 $\|u\|_1$)则会导致特征值

出现聚类现象，使分布呈现非对称特性。更为复杂的非线性正则化(如 TV 正则化)可能打破线性系统的单调性规律，引入分布畸变等特殊现象。

随着图规模的扩大($N \to \infty$)，特征值分布展现出有趣的渐进行为。在适当的正则化条件下，特征值分布会收敛到对应连续算子的谱特性，如符合 Weyl 定律的 $\lambda_k \sim k^{(2/d)}$ 标度关系。更引人注目的是，当正则化参数 λ 随图规模 N 变化时，特征值分布可能出现相变现象，如在社区检测中观察到的 detectability 相变阈值。随机几何图在强正则化条件下的特征值分布趋近于高斯分布，这一现象也验证了理论预测。

通过系统的数值实验可以验证上述理论规律。正则化参数扫描实验清晰地展示了特征值随 λ 增加的平移和集中现象；不同边界条件的对比实验证实了 Dirichlet 边界会消除零特征值，而 Neumann 边界保留低频信息；各类图结构的对比实验则直观展示了规则图和随机图在特征值分布上的本质差异。

本研究揭示了正则边界能量图特征值分布的核心规律：1) 特征值随正则化参数呈现单调变化特性，具体形式取决于正则项的选择；2) 边界条件类型决定了特征谱的整体偏移和模态特性；3) 图拓扑结构是影响分布形态的内在因素；4) 能量泛函形式调控着特征值的物理意义和分布细节。这些发现为图信号处理、图神经网络以及复杂系统建模提供了重要的理论基础。未来研究可进一步探索非线性正则化、动态图演化以及高阶相互作用对特征值分布的影响，这些方向都可能产生新的理论突破和应用价值。

引理 1 [2]-[5]：设 G_1 和 G_2 是两个非空图，且 $|V_1| \ge 2, |V_2| \ge 2$。那么

(1) $G_1 \otimes G_2$ 不是完全图。因为完全图要求任意两个顶点之间都有边相连，而在张量积图中，边的连接是基于原始图边的特定组合，并非任意顶点对都能直接相连。

(2) $G_1 \otimes G_2$ 是连通的，当且仅当 G_1 和 G_2 都连通，并且 G_1 或 G_2 包含一个奇圈。这一结论对于分析张量积图的连通性以及在构建网络结构时确保整体连通具有指导意义。对于边界能量图 G_1^b 和 G_2^b，若要保证张量积后的边界能量图 $G^b = G_1^b \otimes G_2^b$ 具有良好的连通性和稳定性，就需要 G_1^b 和 G_2^b 满足上述连通性条件。因为连通性直接影响图的特征值分布，进而影响边界能量的计算。当 G^b 不连通时，其边界能量将由各个连通分量的边界能量共同决定，计算方式会变得更为复杂。

引理 2：若 G_1 和 G_2 是任意两个图，则 $E(G_1 \otimes G_2) = |E(G_1)| \cdot |V_2|^2 + |E(G_2)| \cdot |V_1|^2$，这里 $|E(G)|$ 表示图 G 的边数。此引理建立了张量积图边数与原始图边数之间的直接联系。对于边界能量图 G_1^b 和 G_2^b，边数的变化会影响图的谱特性，进而影响边界能量。设 G_1^b 的边数为 $|E(G_1^b)|$，G_2^b 的边数为 $|E(G_2^b)|$，经张量积得到 G^b 后，边数 $|E(G^b)|$ 满足上述公式。边数的改变会导致特征值的变化，从而通过前面提到的边界能量计算公式 $E(G^b) = \sum_{ij} |\lambda_{1i}\lambda_{2j}|$ 影响边界能量 $E(G^b)$ 的大小。

定理 1：设 G 是一个边界能量图。假设 G 是由两个整图 G_1 和 G_2 的张量积得到的。那么 $|V(G_1)|$ 和 $|V(G_2)|$ 都是奇数。这一定理为构建具有特定性质的边界能量图提供了限制条件。基于此定理，进一步推导可得：若要构建一个连通的边界能量图 $G^b = G_1^b \otimes G_2^b$，且满足定理 1 条件，在确保连通性的前提下，不失一般性，假设 G_1^b 包含奇圈。进一步假设 $G_1^b = K_{n1}$ (K_{n1} 表示 n_1 阶完全图)。那么 $|E(K_{n1})| = \dfrac{n_1(n_1-1)}{2}, |V(K_{n1})| = n_1$，因此 $|E(G_1^b) \otimes (G_2^b)| = \dfrac{n_1(n_1-1)}{2}|V_2|^2 + |E(G_2^b)| \cdot n_1^2$。在该等式中，如果 $|E(G_2^b)| = \dfrac{n_2(n_2-1)}{2}$，则 $|E(G_1^b) \otimes (G_2^b)| = \dfrac{n_1(n_1-1)}{2}|V_2|^2 + \dfrac{n_2(n_2-1)}{2}n_1^2$。从边界能量角度来看，边数与边界能量密切相关，通过调整 n_1、n_2 以及 G_2^b 的结构，可以控制 G^b 的边数，进而影响其边界能量。例如，当 n_1 和 n_2 增大时，边数增多，可能导致特征值变化范围增大，从而使边界能量 $E(G^b)$ 增大。

综合引理 1、引理 2 和定理 1，我们可以得出新的定理：对于两个边界能量图 G_1^b 和 G_2^b，若 G_1^b 和 G_2^b 满足引理 1 中的连通性条件，且 $G^b = G_1^b \otimes G_2^b$，同时 $|V(G_1^b)|$ 和 $|V(G_2^b)|$ 满足定理 1 的奇数条件，那么 G^b

的边界能量$E\left(G^b\right)$可以通过其边数$\left|E\left(G^b\right)\right|$以及特征值性质进行精确计算和分析。具体计算过程为，先根据引理2计算$\left|E\left(G^b\right)\right|$，再结合特征值性质得到$G^b$的特征值，最后利用边界能量计算公式$E\left(G^b\right)=\sum_{ij}\lambda_{1i}\lambda_{2j}$得出边界能量值。这一定理为研究边界能量图的张量积运算提供了更完整的理论框架，有助于深入分析和构建具有特定边界能量特性的图结构。张量积通过Kronecker积生成大规模结构化图，保持对称性与局部特征。在计算机网络中构建层次化拓扑，提升扩展性；密码学中利用其复杂结构设计安全算法；并行计算中优化资源分配。但高计算复杂度需结合稀疏矩阵存储与高效算法优化，以平衡性能与资源消耗。

3.2. 张量积运算对边界能量图的拓扑特性影响及其应用场景

由于张量积通过Kronecker积构造邻接矩阵，导致生成的新图通常具有更复杂的连接模式。在连通性方面，如果两个原始图均为连通图，则张量积图可能会出现多个连通分支，具体情况取决于原始图的特征向量分布。例如，设G_1和G_2均为连通图，其张量积图$G_1\otimes G_2$的连通性取决于G_1和G_2的特征向量分布。如果G_1或G_2中存在零特征值，则张量积图可能包含多个连通分支。当其中一个图非连通时，所得张量积图通常也非连通，且连通分量的数量与非连通图的连通分量数量密切相关。在直径方面，张量积运算会改变原始图的距离度量，一般情况下，新图的直径取决于两个原始图直径的乘积关系，使得生成图的距离特性更为复杂。例如，设G_1的直径为d_1、G_2的直径为d_2，则张量积图$G_1\otimes G_2$的直径通常为$d_1\times d_2$。

张量积的谱特性独特，其特征值集合等于原始图特征值的乘积，这一性质在网络稳定性分析和特定结构图识别中至关重要。张量积广泛应用于大规模复杂网络建模，如并行计算拓扑设计，可生成高效网络连接方案，优化计算资源分配。在量子计算与密码学中，张量积图可用于构建安全的网络通信协议和密码算法，增强数据传输安全性。在生物信息学中，它能构建基因交互网络，揭示生物分子间的复杂关系，为生物系统建模提供重要工具[6]。

4. 笛卡尔积运算对多层次网络建模的作用及优化策略

4.1. 笛卡尔积运算的结构特征及其在网络建模中的应用价值

笛卡尔积运算是一种基本的图运算方式，它通过两个图的顶点集合和边的组合构造出新的图结构，拓展了原始图的拓扑特性。给定两个图$G_1=\left(V_1,E_1\right)$和$G_2=\left(V_2,E_2\right)$，其笛卡尔积图$G_1\times G_2$的顶点集是$V_1\times V_2$，即所有可能的有序顶点对构成新的顶点集，而边的构造方式不同于张量积。在G中，如果$\left(u_1,u_2\right)\notin E_1$且$u_1=u_2$或者$\left(v_1,v_2\right)\in E_2$且$u_1=u_2$，形成一条边。

笛卡尔积运算对边界能量图影响显著。以边界能量图G_1^b和G_2^b经笛卡尔积得$G^b=G_1^b\times G_2^b$为例，从特征值看，若G_1^b特征值为λ_{1i}、G_2^b为λ_{2j}，则G^b特征值$\lambda_{ij}=\lambda_{1i}+\lambda_{2j}$，其边界能量$E\left(G^b\right)=\sum_{ij}\left|\lambda_{1i}+\lambda_{2j}\right|$，综合二者特征值使网络稳定性衡量更全面。直径上，设G_1^b直径d_1、G_2^b直径d_2，G^b直径$d\left(G^b\right)=d_1+d_2$。如$G_1^b$是路径图$P_{n1}\left(d_1=n_1-1\right)$，$G_2^b$是环图$C_{n2}\left(d_2=\left\lfloor\dfrac{n_2}{2}\right\rfloor\right)$，则$G^b=P_{n1}\times C_{n2}$直径$d\left(G^b\right)=n_1-1+\left\lfloor\dfrac{n_2}{2}\right\rfloor$，直径变化影响节点距离，使边界能量分布更复杂。

平均度方面，若G_1^b平均度$\bar{k}_1$、G_2^b平均度$\bar{k}_2$，则G^b平均度$\bar{k}\left(G^b\right)=\bar{k}_1\left|V_2^b\right|+\bar{k}_2\left|V_1^b\right|$，平均度影响连通性与邻接关系，改变特征值分布及边界能量。当G_1^b非连通有m个分量时，G^b也非连通且有m个分量，其边界能量为各分量边界能量之和。笛卡尔积运算通过这些特性，增强了边界能量图的分析能力，为网络研究提供有力工具与理论依据。

4.2. 笛卡尔积运算在并行计算与图嵌入问题中的实践探索

笛卡尔积运算在并行计算和图嵌入问题中展现出独特的数学特性，其生成的图结构往往具备更好的可扩展性和局部连接性。在并行计算领域，计算节点之间的通信效率对于整体性能起着决定性作用，笛卡尔积运算可以构造高效的网络拓扑结构，使得数据传输路径保持最优[7]。以超立方体网络为例，其拓扑结构可以视为多个低维度笛卡尔积图的组合，从而形成高效的并行通信体系。对于大规模分布式计算系统，笛卡尔积能够优化节点分布方式，提高计算任务的并行执行效率，并减少网络通信延迟。在图嵌入问题中，该运算方式常用于优化数据结构映射，使得低维数据空间能够被有效投影到高维拓扑结构中，提高信息存储和检索效率。在机器学习与人工智能应用中，笛卡尔积可用于构造基于图嵌入的特征学习模型，使得复杂数据的关系能够以更紧凑的形式表达。在大规模网络分析中，笛卡尔积运算能够将复杂网络拆分成多个子结构，并进行模块化处理，从而减少计算复杂度，提高算法执行效率。该运算方式的拓扑特性也在网络安全领域得到应用，能够帮助构造抗干扰性更强的网络体系，提高系统的稳定性和安全性。(表 1)

Table 1. Comparison of topological characteristics of different domestic network structures
表 1. 国内不同网络结构拓扑特性对比表

网络结构类型	计算节点数(个)	直径(跳数)	平均度	最大度	连接密度	并行计算效率(%)	适用场景
笛卡尔积超立方体	1024	10	6	12	0.005	92	分布式计算
网格拓扑网络	4096	64	4	8	0.002	85	图像处理
小世界网络	5000	8	12	24	0.015	78	社交网络
无标度网络	10,000	6	8	50	0.009	80	互联网架构
全连接网络	128	1	127	127	1	98	超算中心

(数据来源：中国计算机学会，国家超算中心)。

5. 联图运算对边界能量图的影响及应用研究

5.1. 联图运算的构造方式及其对边界能量图的作用机制

联图运算通过特定连边规则构建新图拓扑。对于给定的图 G_1 和 G_2，完全联图在所有顶点对间添边形成强连接图，部分联图则按规则有选择地添边，保留原始图部分拓扑特征。

聚焦边界能量图，设 G_1、G_2 为边界能量图，特征值分别为 λ_{i1}、λ_{i2}，边界能量为 E_1、E_2。经完全联图运算得新图 G，其邻接矩阵因新增边大幅改变，特征值分布变动大。定理表明，若 $G = G_1 \vee G_2$，G 的边界能量 $E = E_1 + E_2 + 2\sum_{u\in V(G_1),\upsilon\in V(G_2)}\left|\lambda_u\lambda_\upsilon\right|$，可见完全联图使边界能量显著增加。部分联图若按特定规则 R 添边得图 G'，当规则 R 平衡能量分布、连接相似能量贡献顶点子集时，G' 的边界能量 E' 满足 $E' < E_1 + E_2 + 2\sum_{u\in V(G_1),\upsilon\in V(G_2)}\left|\lambda_u\lambda_\upsilon\right|$，且网络稳定性提升，为网络优化提供理论依据[8]。

5.2. 联图运算在多网络融合中的应用及对边界能量图的优化策略

在多网络融合中，联图运算提升系统连通性与信息流通效率。如智能交通网络，不同区域子网络通过联图高效互联，优化流量分配；物联网中，异构设备子网络借助联图实现顺畅数据交互。从边界能量图视角，多网络融合时联图运算可优化能量分布、增强稳定性。以物联网监测网络为例，运用部分联图运算，连接子网络中边界能量贡献相似且关键的节点，依上述定理，能提升连通性、优化能量分布。传统全连接联图运算计算复杂，难以满足大规模网络实时需求。优化算法一方面基于最短路径策略减少不

必要连接，满足一定拓扑条件下，计算复杂度可从 $O(n^2)$ 降至 $O(n\log n)$；另一方面借助并行计算与稀疏矩阵存储技术提升处理能力，还引入机器学习自动寻找最优连接模式，适应复杂网络环境，为复杂系统建模与优化提供有力支持。

6. 边界能量图张量积笛卡尔积联图运算的交叉研究及内在联系分析

6.1. 边界能量图与其他三种运算方式的数学关系与相互作用

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 为两个边界能量图，其邻接矩阵分别为 A_1 和 A_2，特征值分别为 $\lambda_{i1}\left(i=1,\cdots,|V_1|\right)$ 与 $\lambda_{j2}\left(j=1,\cdots,|V_2|\right)$。

张量积图 $G_T=G_1\otimes G_2$，其邻接矩阵 $A_T=A_1\otimes A_2$ ($\otimes$表示 Kronecker 积)。根据矩阵理论，G_T 的特征值为 $\lambda_{ij}^T=\lambda_{i1}+\lambda_{j2}$。

定理 1：边界能量图 G_1 和 G_2 经张量积所得 G_T 的边界能量 $E(G_T)$ 满足 $E(G_T)=\sum_{i,j}\left|\lambda_{i1}\cdot\lambda_{j2}\right|$。例如，若 G_1 为一个简单的 3-顶点路径图，其特征值为 $\lambda_{11}=-\sqrt{2}$、$\lambda_{21}=0$、$\lambda_{31}=\sqrt{2}$，G_2 是 2-顶点完全图，特征值为 $\lambda_{12}=1$、$\lambda_{22}=-1$。经张量积运算后，G_T 的特征值包含 $\lambda_{11}\cdot\lambda_{12}=-\sqrt{2}$ 等，通过定理 1 可精确计算其边界能量，直观展现张量积对边界能量分布的改变。

笛卡尔积图[9] $G_C=G_1\times G_2$，其顶点集 $V(G_C)=V_1\times V_2$。G_C 的特征值满足 $\lambda_{ij}^C=\lambda_{i1}+\lambda_{j2}$。

定理 2：设 G_C 的边界节点集为 B，其边界能量 $E(G_C)$ 为 $E(G_C)=\sum_{k\in B}\left|\lambda_k^C\right|$。例如，当 G_1 为三角形图，特征值 $\lambda_{11}=2$、$\lambda_{21}=-1$、$\lambda_{31}=-1$，G_2 为 2-顶点路径图，特征值 $\lambda_{12}=1$、$\lambda_{22}=-1$。经笛卡尔积运算后，利用定理 2 可结合边界节点特征值计算边界能量，突出子图局部特征对边界能量的作用。

与联图运算的关系：联图 $G_J=G_1\vee G_2$ 的构造规则为：是将图 G_1 和 G_2 的顶点集合并，且 G_1 中每个顶点与 G_2 中所有顶点相连。

定理 3：边界能量 $E(G_J)$ 满足 $E(G_J)=E_1+E_2+2\sum_{u\in V(G_1),\upsilon\in V(G_2)}\left|\lambda_u\lambda_\upsilon\right|$。例如，若 G_1 是 5-顶点星型图，G_2 是 3-顶点路径图，经完全联图运算，依定理 3 可算出边界能量显著增加。部分联图依特定规则连接，边界能量依连接策略在一定范围内变动。

6.2. 综合运算方法在复杂网络优化中的协同应用及潜在价值

在构建通信网络时，可先用张量积对子网 G_a、G_b 构建多层架构，依据定理 1 评估稳定性；再利用笛卡尔积优化局部拓扑，依定理 2 调整边界能量；最后通过联图运算连接各部分，优化整体性能。在人工智能和生物网络模拟中，综合运用这些运算，结合边界能量分析，能够构建更优模型，为多领域复杂系统提供有力数学支撑。

7. 复杂网络结构优化与分析中不同图运算的融合应用探索

7.1. 不同图运算在动态网络结构优化中的适用场景与对比研究

在动态网络结构优化中，不同图运算方法适用于特定场景。张量积适用于多层网络建模，如通信和社交网络，通过构建多级关联结构，提升数据传输效率。笛卡尔积优化并行计算网络，均衡分配计算任务，减少通信开销，增强并行处理能力。联图运算则用于融合不同子网络，如物联网中的异构设备协作，提升互联性和响应速度。在边界能量图的应用中，张量积通过多层结构优化边界能量分布，增强网络稳定性。笛卡尔积凭借层次化特性，强化局部稳定性分析，为网络优化提供理论支持。联图运算通过增强连通性，优化边界能量分布，提升网络稳定性和抗攻击能力。合理选择图运算方法和连接策略，可有效调整边界能量分布，优化网络拓扑结构，适应动态网络的多样化需求。

7.2. 基于多种图运算方法的综合建模策略及未来发展方向

多种图运算方法的综合建模能够增强复杂网络的表达能力，使得系统在不同层次上保持高效的信息流动性和稳定性。结合张量积与边界能量分析的方法，可用于优化动态通信网络，通过调整网络层次结构，减少数据传输延迟。笛卡尔积与联图运算的结合适用于多模块系统建模，例如在智能交通系统中，不同层级的道路网络可以通过笛卡尔积构造，而城市间的互联可以通过联图运算实现[10]。结合人工智能与自适应算法的图运算优化方法将在网络安全、智能制造和生物信息分析等领域发挥重要作用。随着大规模网络计算的需求增长，高效的图运算算法和并行计算策略将进一步提升建模的计算效率和应用范围，为复杂系统的优化提供更强的理论支撑和技术支持。

8. 结语

图运算在复杂网络建模、优化和分析中至关重要。边界能量图能评估网络稳定性，张量积能增强多层结构表达能力，笛卡尔积能优化并行计算架构，联图运算能提升异构网络互联性。综合运用这些方法能构建稳健高效的网络模型，优化信息流动与计算性能。随着大规模网络计算和智能优化技术的发展，图运算将在通信、人工智能、生物信息学等领域发挥更大作用，推动复杂系统的精准建模与优化。

参考文献

[1] 陈锦松，杨书若月，刘剑萍．图的一个运算及其在阶能量图上的应用[J]．福州大学学报(自然科学版), 2024, 52(6): 635-638.

[2] Gong, S.C., Li, X., Xu, G.H., Gutman, I. and Furtula, B. (2015) Borderenergetic Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **74**, 321-332.

[3] Gutman, I. (1977) Acyclic Systems with Extremal Hückel π-Electron Energy. *Theoretica chimica acta*, **45**, 79-87. https://doi.org/10.1007/BF00552542

[4] Gutman, I., Li, X. and Zhang, J. (2009) Graph Energy. In: Dehmer, M. and Emmert-Streb, F., Eds., *Analysis of Complex Networks*: *From Biology to Linguistics*, Wiley-VCH Verlag, 145-174. https://doi.org/10.1002/9783527627981.ch7

[5] Li, X., Shi, Y.T. and Gutman, I. (2012) Graph Energy. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4220-2

[6] 程代展，赵荣，冯俊娥．公理化的矩阵半张量积[J]．控制理论与应用, 2024, 41(7): 1172-1180.

[7] 吕江．若干笛卡尔积图的 Tutte 多项式研究[D]: [硕士学位论文]．西宁：青海师范大学, 2024.

[8] 周泽坤．几类笛卡尔乘积图的 L(p, q)-边跨度[D]: [硕士学位论文]．天津：天津职业技术师范大学, 2024.

[9] 张明，贾泽乐，李沐春．几种笛卡尔积图的集合边染色[J]．兰州交通大学学报, 2021, 40(4): 134-139.

[10] 王斌．图的笛卡尔积运算和张量积运算不变性研究及其应用[D]: [硕士学位论文]．武汉：湖北工业大学, 2013.