Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(7), 108-114
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.157213

几何视角下矩阵的初等变换与线性方程组的解

任梁冰，祝丽萍

昌吉学院数学与数据科学学院，新疆 昌吉

收稿日期：2025年6月11日；录用日期：2025年7月14日；发布日期：2025年7月29日

摘 要

本文从几何视角下分析矩阵的初等变换与线性方程组的解，并用GeoGebra软件进行展示，从而为教师教学提供直观教学素材，对于培养学生数学结合思想，提升学生几何直观、空间观念、抽象能力等核心素养具有重要意义。

关键词

线性方程组，矩阵的初等变换，GeoGebra

Elementary Transformations of Matrices and Solutions of Systems of Linear Equations in a Geometric Perspective

Liangbing Ren, Liping Zhu

School of Mathematics and Data Science, Changji University, Changji Xinjiang

Received: Jun. 11th, 2025; accepted: Jul. 14th, 2025; published: Jul. 29th, 2025

Abstract

This paper analyses the solutions of elementary transformations of matrices and systems of linear equations from a geometrical point of view and demonstrates them with GeoGebra software, so as to provide teachers with intuitive teaching materials, which is of great significance for cultivating students' ideas of mathematical integration and enhancing their core qualities such as geometrical intuition, spatial conception and abstraction ability.

Keywords

Systems of Linear Equations, Elementary Transformations of Matrices, GeoGebra

文章引用: 任梁冰, 祝丽萍. 几何视角下矩阵的初等变换与线性方程组的解[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 108-114.
DOI: 10.12677/pm.2025.157213

1. 引言

矩阵初等变换是高等代数的核心工具，也是求解线性方程组的关键方法。然而，传统教学中常局限于代数操作，如行列式计算或秩的判定，缺乏对变换本质的几何解释，导致学生难以建立直观理解。近年来，数学可视化教学研究表明，几何视角能显著提升概念理解深度。本文旨在解决以下问题：1) 如何从线性变换理论来严格证明初等行变换与基本几何变换(反射、缩放、错切)的等价性？2) 如何利用几何对应关系直观解释线性方程组解的存在性与结构？为此，本文结合线性变换的严格推导与 GeoGebra 动态可视化，构建代数操作与几何意义的桥梁。

线性代数教学中几何直观与代数理论的融合已成为近年研究热点。文献[1]侧重代数严谨性，将初等变换作为计算工具而忽视其几何本质；文献[2]虽引入行变换的几何对应(如反射、错切)，但未建立严格数学证明；文献[3]通过二维变换建立矩阵运算与图形变换的关联；文献[4]进一步提出广义初等变换理论，揭示其线性空间基变换本质。教学实践层面，文献[5]创新性采用“初等变换驱动”模式阐释抽象概念；文献[6]则验证该模式在新工科背景下的有效性。技术实现上，文献[7]证实 GeoGebra 可显著提升几何变换的教学效率，为本研究可视化方案提供技术支撑。

2. 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换有三种，分别是：

1) 互换矩阵的 i，j 两行(或列)：$\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{A}$ (或 $\boldsymbol{AP}(i,j)$)；

2) 非零的数 c 乘以矩阵的 i 行(或 i 列)：$\boldsymbol{P}(i(c))\boldsymbol{A}$ (或 $\boldsymbol{AP}(i(c))$)；

3) 矩阵的 j 行(或列)的 k 倍加到 i 行(或列)：$\boldsymbol{P}(i,j(k))\boldsymbol{A}$ (或 $\boldsymbol{AP}(j,i(k))$)，其中 $\boldsymbol{P}$ 是基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的线性组合所表示成的矩阵。

3. 线性方程组的解

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

那么该线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 分别是：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

则：

若 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) > r(\boldsymbol{A})$，式(1)无解；若 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = n$，式(1)有唯一解；若 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) < n$，式(1)有无穷解。

4. 几何视角下矩阵的初等变换

4.1. 初等行变换的几何本质：线性变换理论

矩阵的初等行变换等价于左乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}$。设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，其行向量张成 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。左乘 $\boldsymbol{E}$ 即对 $\boldsymbol{A}$ 的行空间进行一个线性变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$。三种初等行变换对应以下基本几何变换：

1) 行交换：反射变换

初等矩阵：$\boldsymbol{E}_{swap}$ (单位矩阵交换第 i，j 行)。

线性变换：$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}_{swap}\boldsymbol{x}$。

几何解释：该变换的特征值包含−1 (对应于 i、j 轴交换的平面)和 1 (其余正交补空间)，其本质是向量在超平面 $x_i=x_j$ 上的反射。例如，在 $\mathbb{R}^2$ 中交换两行等价于对直线 $y=x$ 的反射。

2) 行缩放：缩放变换

初等矩阵：$\boldsymbol{E}_{scale}$ (单位矩阵第 i 行乘以 k)。

线性变换：$T(\boldsymbol{x})=(x_1,\cdots,kx_i,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

几何解释：此变换沿第 i 坐标轴方向进行缩放(缩放因子 $|k|$)。当 $k>0$ 时为纯缩放；当 $k<0$，等价于缩放($|k|$)与关于超平面 $x_i=0$ 的反射的复合变换。

3) 行倍加：错切变换

初等矩阵：$\boldsymbol{E}_{shear}(k)$ (单位矩阵第 i 行第 j 列置为 k)。

线性变换：$T(\boldsymbol{x})=(x_1,\cdots,x_i+kx_j,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

几何解释：此变换保持第 j 轴方向不变，将点沿平行于第 i 轴的方向移动距离 kx_j，即错切变换。当 $k>0$ 时向正方向错切；$k<0$ 时向负方向错切。

4.2. 几何变换的实例验证

基于 4.1 节的理论，下面从几何上来观察这三个初等变换。

首先做出任意三角形，见图 1。在此为了更加直观，给出底边为 3，高为 1 的三角形。用矩阵 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 表示原有坐标 (x,y)，得出两点的坐标，做出矩阵 $\boldsymbol{A}=(M,N)=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$，下面就这三个初等变换来观察这个三角形的变化，见表 1。

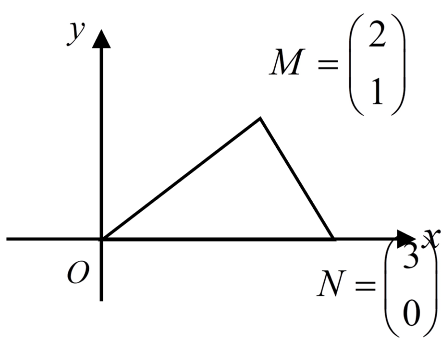
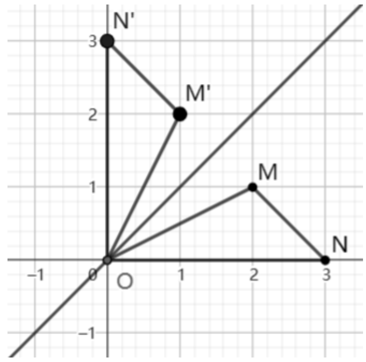
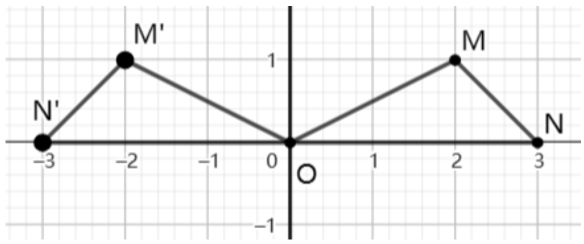
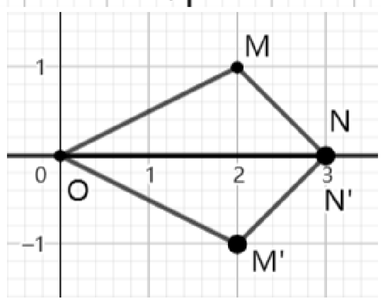
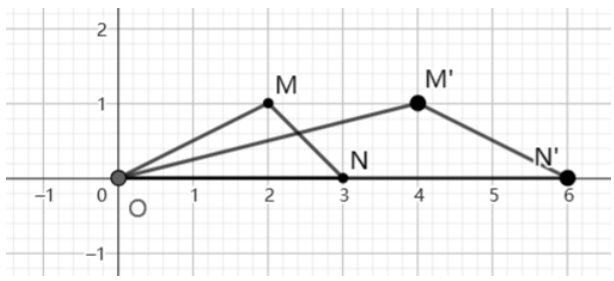
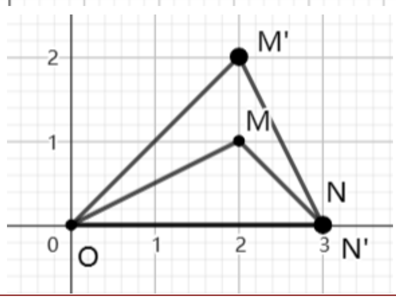


Figure 1. Image of the initial triangle
图 1. 初始三角形示意图

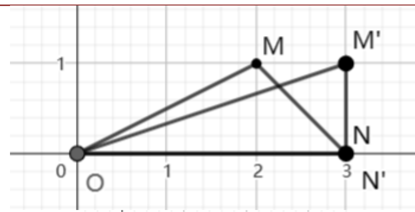
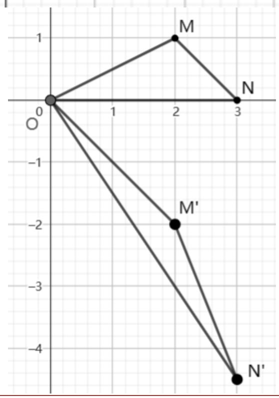
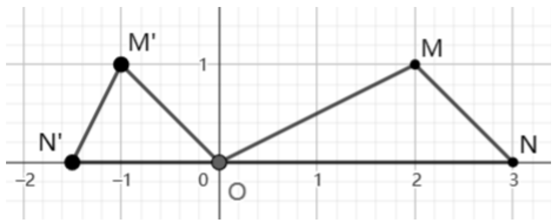
下面来探究一下矩阵的初等变换对这个三角形产生哪些变换，做矩阵等式 $\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{P}(i(c))\boldsymbol{A}$ 与

$\boldsymbol{P}(i, j(k))\boldsymbol{A}$，记 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

Table 1. Types of geometric transformations corresponding to elementary row operations with examples
表 1. 初等行变换对应的几何变换类型及实例

变换	矩阵等式	图形变换
反射变换	$\boldsymbol{P}(1,2)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	
	$\boldsymbol{P}(1(-1))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
	$\boldsymbol{P}(2(-1))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	
缩放变换	$\boldsymbol{P}(1(2))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
	$\boldsymbol{P}(2(2))\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	

续表

错切变换	$\boldsymbol{P}(1,2(1))\boldsymbol{A}$ $=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}3&3\\1&0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{P}\left(2,1\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\boldsymbol{A}$ $=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2&3\\-2&-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$	 
复合变换	$\boldsymbol{P}\left(1\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\boldsymbol{A}$ $=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}-1&-\frac{3}{2}\\1&0\end{pmatrix}$	

对于 $\boldsymbol{AP}(i,j)$、$\boldsymbol{AP}(i(c))$ 以及 $\boldsymbol{AP}(j,i(k))$ 类似，并且对于其他阶的矩阵亦是如此。通过上述具体的例子不难看出，对于矩阵乘积 $\boldsymbol{AP}(i,j)$ 而言，只不过把图形做了一些反射变换，关于 x 轴、y 轴或 $y=x$ 等；对于矩阵乘积 $\boldsymbol{AP}(i(c))$ 而言，相当于把图形进行了缩放变换，当 $c>1$ 时，图形放大，当 $0<c<1$ 时，图形缩小，当 $c<0$ 时，在缩放的基础上会进行反射变换，也就是复合变换；对于矩阵乘积 $\boldsymbol{AP}(j,i(k))$ 而言，相当于把图形进行错切变换，通过计算不难看出，当 $k<0$ 时，图形向下或向左进行错切，当 $k>0$ 时，图形向上或向右进行错切。通过具体矩阵的初等变换与图形的变换对比巧妙地把代数与图形加以结合起来，更加直观地展示了矩阵初等变换的几何意义。

5. 几何视角下线性方程组的解

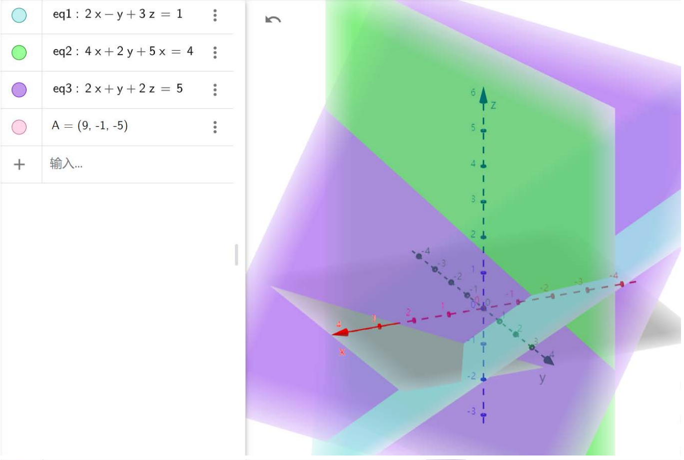
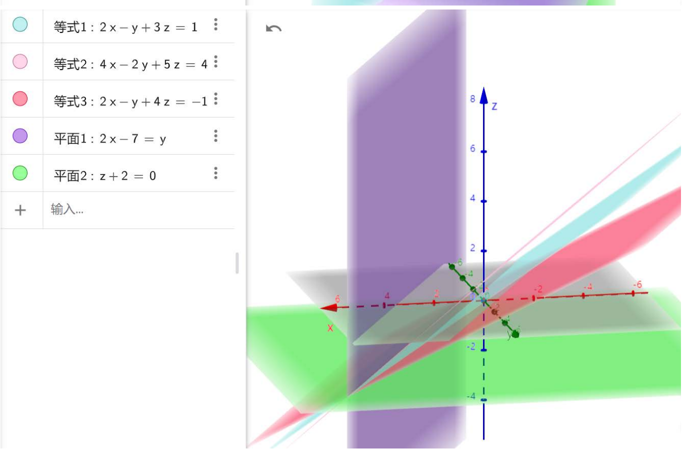
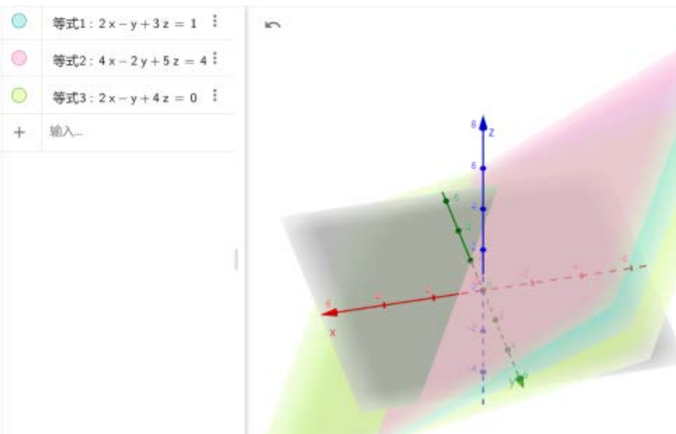
在中学了解到，二元一次方程组的解可以理解成平面中两条直线的交点。对于 n 元线性方程组可以理解成 n 维空间中的图形的交集。

下面以三个维数较低的线性方程组为例，利用 GeoGebra 做出它们的图形，见表 2。

首先，对于第一个方程组，得到的解为 $(x_1,x_2,x_3)=(9,-1,6)^{\mathrm{T}}$，那么三个平面有一个公共的交点 $A(9,-1,6)$。对于第二个方程组，得到的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}x_2$，那么三个平面交于一条直线，该直

线的参数方程为$\begin{cases} x_1-\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}t \\ x_2-0=t \\ x_3+2=0 \end{cases}$，$t$ 为参数，化为标准方程为$l:\dfrac{x_1-\dfrac{7}{2}}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{x_2-0}{1}=\dfrac{x_3+2}{0}$。对于第三个方程组，它是无解的，换言之三个平面没有交线或交点。对于多元线性方程组亦是如此。

Table 2. Solution types of linear systems and their geometric correspondence
表 2. 线性方程组解的类型与几何对应

线性方程组	方程组的解	方程中等式对应的图形
$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1+x_2+2x_3=5. \end{cases}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$	
$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1. \end{cases}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_2$	
$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases}$	无解	

下面从几何上观察解线性方程组的情况，对于第二个方程组，做出增广矩阵 $\bar{A}$，进行初等行变换，有如下过程。

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ -r_2}]{\substack{①\\ r_2-2r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_1]{\substack{②\\ r_1-3r_2}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

对于方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ 4x_1-2x_2+5x_3=4\\ 2x_1-x_2+4x_3=-1\end{cases}$，首先，这三个方程可视为空间中的三个平面，分别是 $\pi_1:2x-y+3z=1$、$\pi_2:4x-2y+5z=4$、$\pi_3:2x-y+4z=-1$，对于矩阵的初等变换过程中，① 表示着把平面 π_2 与平面 π_3 进行错切变换，同时得到了平面 $\pi_4:z=-2$。② 表示着先把平面 π_1 进行剪切得到了平面 $\pi_5:2x-y=7$，再把平面 π_5 进行缩放变换，得到了平面 $\pi_6:x-\frac{1}{2}y=\frac{7}{2}$。现在便得到了两个平面的交线，即 l 为 $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=\frac{7}{2}\\ z=-2\end{cases}$，化为直线的标准方程为 $l:\frac{x-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+2}{0}$，参数方程为 $\begin{cases}x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}t\\ y-0=t\\ z+2=0\end{cases}$，即为方程组的解。

6. 结语

数与形是数学中两个最古老，也是最基本的研究对象，它们在一定条件下可以相互转化。由于代数学是一门较为抽象的学科，因此利用较为直观的图形加以理解对于学习较为抽象的理论具有一定的辅助作用。本研究基于线性变换理论，严格证明了矩阵初等行变换与基本几何变换的数学等价性：行交换对应超平面反射(如 $R_i\leftrightarrow R_j$ 等价于 $x_i=x_j$ 平面的反射)，行缩放诱导轴向缩放，行倍加实现定向错切。通过构建“初等变换即坐标系变换”的几何诠释框架，揭示了行变换本质是对线性方程组超平面系的线性变换，其解集不变性获得直观几何支撑。进一步结合 GeoGebra 开发“代数－几何”双轨教学模型，动态可视化变换过程与解空间结构，有效降低认知负荷并培育空间推理能力。研究为线性代数教学提供了兼具理论严谨性与实践可行性的新范式，未来需突破高维可视化瓶颈并深化教学实证。

参考文献

[1] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] Lay, D.C., Lay, S.R., McDonaid, J.J. 线性代数及其应用[M]. 第 5 版. 北京: 机械工业出版社, 2018.

[3] 郭文燕, 徐爱芸. 二维变换[J]. 高等函授学报(自然科学版), 1999(3): 5-8.

[4] 黄述亮. 矩阵的广义初等变换[J]. 保山学院学报, 2024, 43(2): 47-55.

[5] 欧阳毅, 张神星. 善用初等变换展开线性代数理论教学[J]. 大学数学, 2023, 39(5): 68-75.

[6] 吴敏, 卜天明. 面向新工科的线性代数教学探索与实践[J]. 高等数学研究, 2025, 28(3): 31-40.

[7] Dahal, N., Pant, B.P., Shrestha, I.M. and Manandhar, N.K. (2022) Use of GeoGebra in Teaching and Learning Geometric Transformation in School Mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 16, 65-78. https://doi.org/10.3991/ijim.v16i08.29575