Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(7), 90-98
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.157211

Hans汉斯

一类奇异纽结的着色Jones多项式

郭延泽，李　佳，冷旭东

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2025年6月19日；录用日期：2025年7月10日；发布日期：2025年7月22日

摘　要

本文计算了一类*m*股奇异排叉结的2*n*着色Jones多项式，该算法的核心技巧在于对Temperley-Lieb代数中的融合、三角等变换的合理运用。

关键词

Jones多项式，奇异纽结，排叉结

Colored Jones Polynomials of a Class of Singular Knots

Yanze Guo, Jia Li, Xudong Leng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jun. 19th, 2025; accepted: Jul. 10th, 2025; published: Jul. 22nd, 2025

Abstract

This paper computes the 2*n*-colored Jones polynomial of a class of m-strand singular pretzel links. The core technique of the algorithm lies in the judicious application of fusion, triangular transformations, and related operations in the Temperley-Lieb algebra.

Keywords

Jones Polynomial, Singular Knots, Pretzel Knots

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

文章引用: 郭延泽, 李佳, 冷旭东. 一类奇异纽结的着色 Jones 多项式[J]. 理论数学, 2025, 15(7): 90-98.
DOI: 10.12677/pm.2025.157211

1. 引言

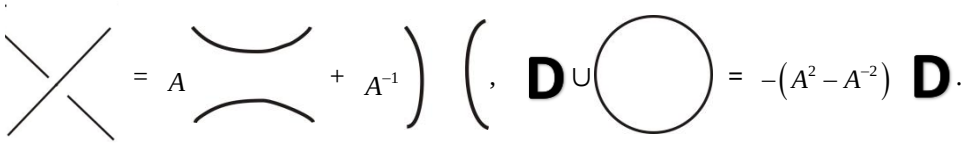
纽结的着色 Jones 多项式(Colored Jones Polynomial)是著名纽结不变量 Jones 多项式[1]的推广，它可由 Reshetikhin 和 Turaev [2]的量子群表示理论或者 Temperley-Lieb 代数[3]得到，是最具代表性的量子不变量。2018 年，Elhamdadi 和 Hajij [4]定义了奇异纽结(Singular Knot)，即空间四价图的 2n 着色琼斯多项式。本文将沿用这一定义并运用 Temperley-Lieb 代数的技巧计算一类奇异纽结的着色 Jones 多项式。

2. 预备知识

定义 2.1 [4]：一个图 G 被称为嵌入四价图，如果图中每个顶点的度数都为 4 (即每个顶点连接 4 条边)，并且这个图被嵌入到空间 R^3 中。如果其顶点连接各边的顺序不能改变，那么这种图就被称为刚性四价图，刚性四价图称为奇异纽结。如图 1 为一个奇异交叉点。

Figure 1. Singular crossing
图 1. 奇异交叉点

定义 2.2 [5]：Kauffman 关系式



这里 $\mathbf{D}$ 表示任意纽结或者缠结图。

为了阐明下面的 Temperley-Lieb 代数，我们首先定义基本缠结 $U_1,U_2,\cdots,U_{n-1}$。

定义 2.3 [3]：我们定义基本缠结 $U_1,U_2,\cdots,U_{n-1}\in T_n$，这里 T_n 表示 n 股的 Temperley-Lieb 代数，即每个 U_i 是 n 条输入和 n 条输出链的缠结，如图 2 所示为 T_4 中的缠结 $1_4,U_1,U_2,U_3$。

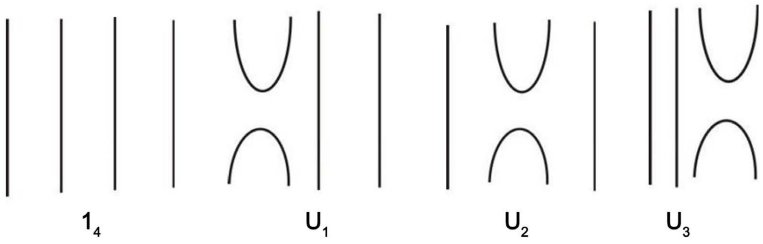


Figure 2. The tangles $1_4,U_1,U_2,U_3$ of T_4
图 2. T_4 中的缠结 $1_4,U_1,U_2,U_3$

U_i 的乘积完全由输入端和输出端的连接确定，通过将第一个纽结的输出股线连接到第二个纽结的输入股线。

Temperley-Lieb 代数是 $Z\left[A,A^{-1}\right]$ 上的自由加性代数，具有生成元 $1_n,U_1,U_2,\cdots,U_{n-1}$ 且满足以下给出

的关系：

(1) $U_i^2 = dU_i$，这里 d 表示封闭圆环的值；

(2) $U_i U_{i\pm1} U_i = U_i$；

(3) $U_i U_j = U_j U_i$。这里 $|i-j|>1$。

我们取 $d=-A^2-A^{-2}$，这里 A 和 A^{-1} 与 T_n 中的所有元素可交换。

引理 2.4 [3]：T_n 中的元素 f_i $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$由以下公式归纳定义：

$$f_0 = 1_n$$

$$f_{k+1} = f_k - \mu_{k+1} f_k U_{k+1} f_k$$

这里 $\mu_1 = d^{-1}$，$\mu_{k+1} = (d-\mu_k)^{-1}$，$d=-A^2-A^{-2}$，$U_i^2 = dU_i$。

通常我们用一个小方盒子表示 T_n 中的元素 f_n。

定义 2.5 [3]：定义元素 $\Delta_n \in \mathrm{S}(\mathrm{R}^2)$ 为 $f^{(n)}$ 的闭包，如图 3 所示。

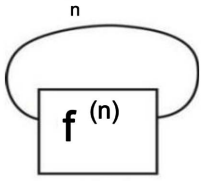


Figure 3. The closures of $f^{(n)}$

图 3. $f^{(n)}$ 的闭包

命题 2.6 [3]：T_n 中的元素 f_i 有以下性质：

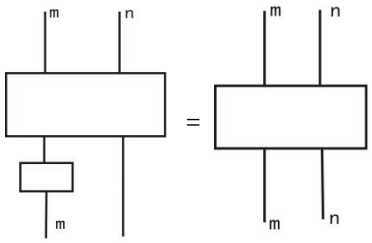
(1) 幂等性：$f_i^2 = f_i$，其中 $i=0,1,\cdots,n-1$。

(2) $f_i U_j = U_j f_i = 0$，其中 $j \geq i$。

(3) $\mathrm{tr}(f_{n-1}) = \Delta_n = \Delta_n(-A^2)$，其中 $\mu_{k+1} = \Delta_k / \Delta_{k+1}$，$\Delta_0 = 1$。

这里 $\Delta_n(x) = \left(\dfrac{x^{n+1} - x^{-n-1}}{x - x^{-1}} \right)$ 是 n 阶切比雪夫多项式。

命题 2.7 [3]：元素 f_i 的幂等性可以延伸出以下结果。



定义 2.8 [4]：在纽结理论中，着色是指对图的每一条边 e 赋予一个颜色，颜色取自某个特定的集合或代数结构。

为了将三价顶点与 Temperley-Lieb 代数中的元素联系起来，我们做以下定义：

定义 2.9 [3]：将顶点上的每条线标记为正整数 a、b 或 c，假设 $(a+b-c)$、$(a+c-b)$ 和 $(b+c-a)$ 都是正偶数。那么令 $i = \dfrac{(a+b-c)}{2}$，$j = \dfrac{a+c-b}{2}$，$k = \dfrac{b+c-a}{2}$，则三价顶点由以图 4 等式定义：

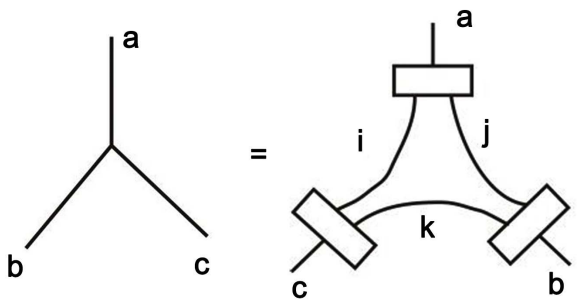
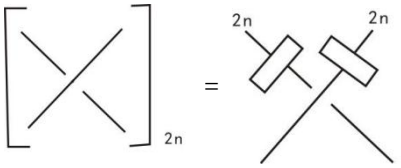
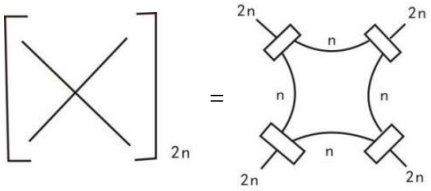


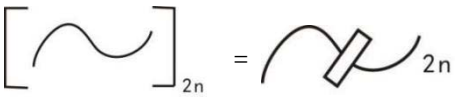
Figure 4. 3-valent vertex
图 4. 三价顶点

当(a,b,c)是可容许的，三价图中的$i=\frac{(a+b-c)}{2}$、$j=\frac{a+c-b}{2}$、$k=\frac{b+c-a}{2}$被称为内部着色。

定义 2.10 [4]：设L是一个奇异链环，对于任意整数$n\geq 1$，$[L]_{2n}$按以下规则定义：

(1) 

(2) 

(3) 

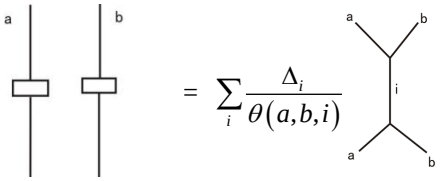
定义 2.11 [4]：定义奇异纽结K的标准着色琼斯多项式：

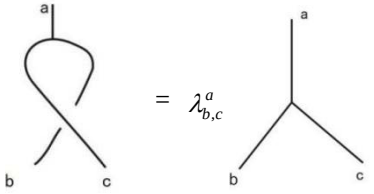
$$J_{2n+1,K(q)}=\frac{1}{\Delta_{2n}}[K]_{2n}$$

定义 2.12 [4]：一个非负三元组(a,b,c)是可容许的，如果$a+b+c$是偶数并且$a+b\geq c\geq|a-b|$。

以下事实是我们在论文计算中要用到的。

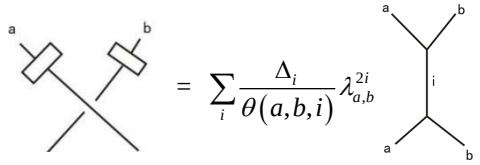
命题 2.13 [4]：一些恒等式

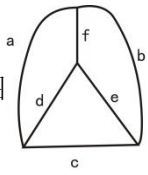
(1) 融合等式： 

(2) 恒等式： 

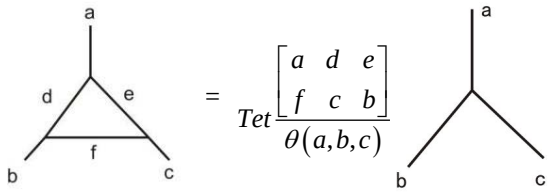
这里 $\lambda_{b,c}^{a}=(-1)^{\frac{a+b-c}{2}}A^{\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}$，$x'=x(x+2)$，$\begin{cases}x=(a,b,c)\\x'=(a',b',c')\end{cases}$。

(3) 交叉融合等式：此等式对于将交叉点转化为 Temperley-Lieb 代数中的元素至关重要。



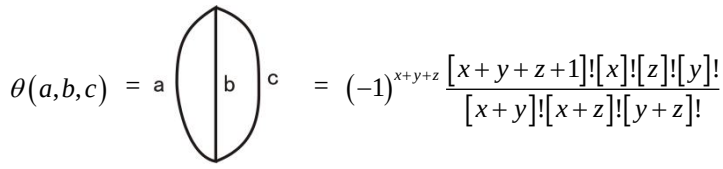
(4) 三角变换：四面体图 

可以用 $Tet\begin{bmatrix}a&d&e\\f&c&b\end{bmatrix}$ 表示，那么有下面恒等式成立。

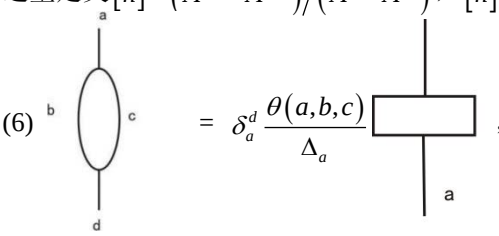


其中 $Tet\begin{bmatrix}a&d&e\\f&c&b\end{bmatrix}$ 的具体取值见参考文献[5]。

(5) 一个关于 θ 系数的具体公式，记为 $\theta(a,b,c)$：



这里定义 $[n]=\left(A^{2n}-A^{-2n}\right)/\left(A^{2}-A^{-2}\right)$，$[n]!=[1][2]\cdots[n]$。

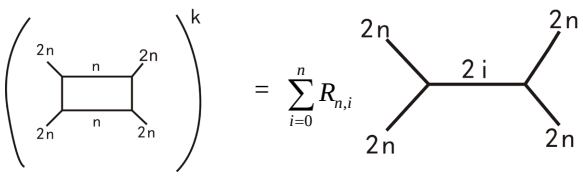
(6) 

，这里 $\delta_a^d=\begin{cases}1 & \text{若 } a=d\\0 & \text{若 } a\neq d\end{cases}$。

3. 奇异纽结的着色琼斯多项式例子

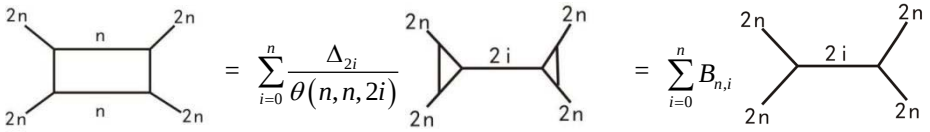
下面引理 Elhamdadi 和 Hajij 在参考文献[4]中已给出证明，但因原文证明简略，本文后续计算内容需要，在此详细证明。

引理 3.1 [4]：



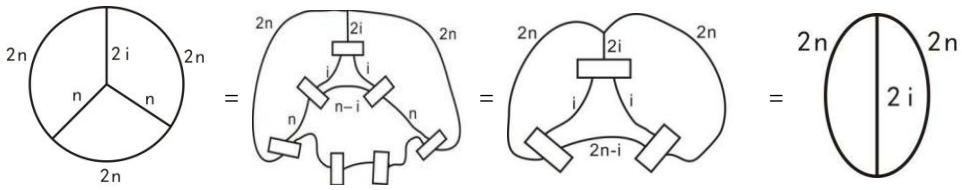
这里 $R_{n,i}=\dfrac{\theta(2n,2n,2i)^{k-1}}{\theta(n,n,2i)^{k}}\Delta_{2i}$。

证明：由命题 2.13 中的等式(1)和(4)，我们可以得到：



其中，$B_{n,i}=\left(\dfrac{Tet\begin{bmatrix}2i,n,n\\n,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2n,2n,2i)}\right)^{2}\dfrac{\Delta_{2i}}{\theta(n,n,2i)}$。

而

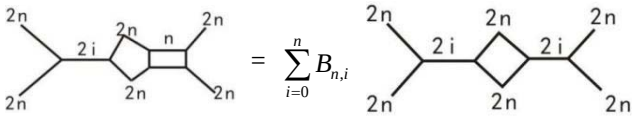


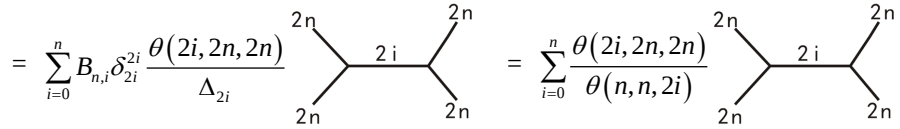
注意：第二个等号可由命题 2.7 得出。

所以

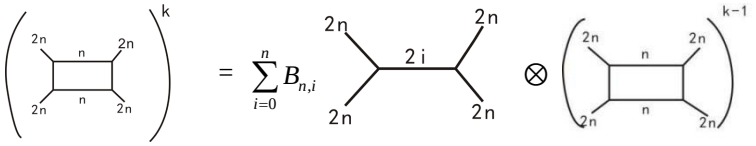
$$Tet\begin{bmatrix}2i,n,n\\n,2n,2n\end{bmatrix}=\theta(2n,2n,2i),\quad B_{n,i}=\frac{\Delta_{2i}}{\theta(n,n,2i)}$$

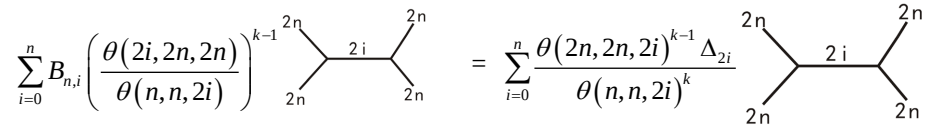
另外，因为

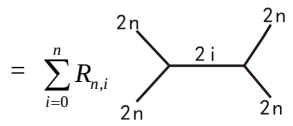




所以







。其中 $R_{n,i}=\dfrac{\theta(2n,2n,2i)^{k-1}}{\theta(n,n,2i)^{k}}\Delta_{2i}$。

下面我们计算如图 5 所示的着色琼斯多项式，记图 5 为 $G_{l_1l_2\cdots l_m}^{k_1k_2\cdots k_m}$。注意：所有未标注着色均为 $2n$。

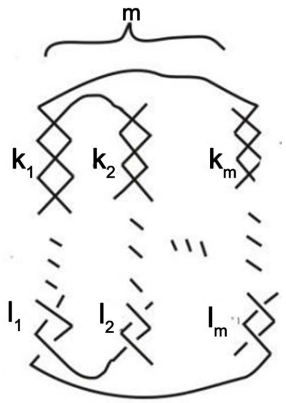


Figure 5. *m*-strand pretzel singular knots
图 5. *m* 股排叉奇异纽结

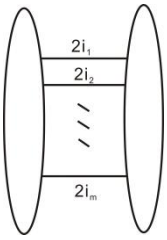
定理 3.2：

$$J_{2n}\left(G\begin{matrix}k_1k_2\cdots k_m\\ l_1l_2\cdots l_m\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\Delta_{2j}}{\theta(2n,2n,2j)}\right)^{m-1}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_1,2n,2n\end{bmatrix}Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_2,2n,2n\end{bmatrix}\cdots Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_m,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j,2n,2n)^2\Delta_{2j}^{m-2}}\theta(2n,2n,2j)$$

证明：由引理 3.1 和命题 2.13 中的交叉融合等式：

$$J_{2n}\left(G\begin{matrix}k_1k_2\cdots k_m\\ l_1l_2\cdots l_m\end{matrix}\right)=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m$$

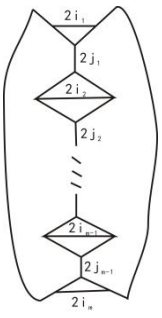


其中，$C_a=\sum_{i_a=0}^{n}\frac{\theta(2n,2n,2i_a)^{k-1}\Delta_{2i_a}}{\theta(n,n,2i_a)^{k}}\left(\lambda_{2n,2n}^{2i_a}\right)^{l}$。

我们可以运用命题 2.13 中的融合等式，得到以下等式：

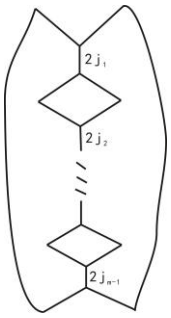
$$J_{2n}\left(G\begin{matrix}k_1k_2\cdots k_m\\ l_1l_2\cdots l_m\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j_1=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_1}}{\theta(2n,2n,2j_1)}\sum_{j_2=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_2}}{\theta(2n,2n,2j_2)}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_{m-1}}}{\theta(2n,2n,2j_{m-1})}$$



$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j_1=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_1}}{\theta(2n,2n,2j_1)}\sum_{j_2=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_2}}{\theta(2n,2n,2j_2)}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{n}\frac{\Delta_{2j_{m-1}}}{\theta(2n,2n,2j_{m-1})}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j_1,2n,2n\\2i_1,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j_1,2n,2n)}$$

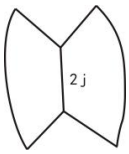
$$\frac{Tet\begin{bmatrix}2j_2,2n,2n\\2i_2,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j_2,2n,2n)}\cdots\frac{Tet\begin{bmatrix}2j_{m-1},2n,2n\\2i_{m-1},2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j_{m-1},2n,2n)}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j_{m-1},2n,2n\\2i_m,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j_{m-1},2n,2n)}$$



在上一步中，我们根据命题 2.13 中的(4)做了 m 次三角变换。

由命题 2.13 的(6)，当且仅当 $j_1=j_2=\cdots=j_{m-1}$ 时，上式中图形才不为 0，所以令 $j=j_1=j_2=\cdots=j_{m-1}$，则 $J_{2n}\left(G\begin{matrix}k_1k_2\cdots k_m\\l_1l_2\cdots l_m\end{matrix}\right)$

$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\Delta_{2j}}{\theta(2n,2n,2j)}\right)^{m-1}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_1,2n,2n\end{bmatrix}Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_2,2n,2n\end{bmatrix}\cdots Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_m,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j,2n,2n)^m}\left(\frac{\theta(2j,2n,2n)}{\Delta_{2j}}\right)^{m-2}$$



$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\Delta_{2j}}{\theta(2n,2n,2j)}\right)^{m-1}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_1,2n,2n\end{bmatrix}Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_2,2n,2n\end{bmatrix}\cdots Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_m,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j,2n,2n)^m}$$

$$\left(\frac{\theta(2j,2n,2n)}{\Delta_{2j}}\right)^{m-2}\theta(2n,2n,2j)$$

$$=\frac{1}{\Delta_{2n}}C_1C_2\cdots C_m\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\Delta_{2j}}{\theta(2n,2n,2j)}\right)^{m-1}\frac{Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_1,2n,2n\end{bmatrix}Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_2,2n,2n\end{bmatrix}\cdots Tet\begin{bmatrix}2j,2n,2n\\2i_m,2n,2n\end{bmatrix}}{\theta(2j,2n,2n)^2\Delta_{2j}{}^{m-2}}\theta(2n,2n,2j)$$

4. 总结

本文研究了一类奇异纽结的着色 Jones 多项式的计算方法，通过对奇异纽结投影图与 Temperley-Lieb 代数中的元素建立关系，运用融合等式、三角变换等方法，给出了 m 股奇异排叉结的 $2n$ 着色 Jones 多项式的计算公式。此算法具有一定普适性，可以用来计算其他具有类似结构的奇异纽结的着色 Jones 多项式。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001255)。

参考文献

[1] Jones, V.F.R. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2

[2] Reshetikhin, N. and Turaev, V.G. (1991) Invariants of 3-Manifolds via Link Polynomials and Quantum Groups. *Inventiones*

Mathematicae, **103**, 547-597. https://doi.org/10.1007/BF01239527

[3] Kauffman, L.H. and Lins, S.L. (1994) Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400882533

[4] Elhamdadi, M. and Hajij, M. (2018) Foundations of the Colored Jones Polynomial of Singular Knots. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **55**, 937-956.

[5] Masbaum, G. and Vogel, P. (1994) 3-Valent Graphs and the Kauffman Bracket. *Pacific Journal of Mathematics*, **164**, 361-381. https://doi.org/10.2140/pjm.1994.164.361