

涉及零点和微分多项式的全纯函数族的正规规定则

谭代明, 杨锦华*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年6月25日; 录用日期: 2025年7月30日; 发布日期: 2025年8月11日

摘要

本文结合值分布和正规族理论研究了与零点个数和微分多项式有关的一类全纯函数族的正规规定则。文章利用经典引理, 使用反证法和分类讨论, 将涉及零点个数有关的全纯函数正规规定则推广到一般的微分多项式, 得到一个新的结果, 丰富了全纯函数正规族理论。

关键词

全纯函数, 微分多项式, 正规规定则, 零点个数

Normality Criterion Concerning Zeros and Differential Polynomials for Families of Holomorphic Functions

Daiming Tan, Jinhua Yang*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 25th, 2025; accepted: Jul. 30th, 2025; published: Aug. 11th, 2025

Abstract

In this paper, the normality criterion of a class of families of meromorphic functions related to the number of zeros and differential polynomials is studied by combining the theories of value distribution and normal families. The article makes use of classical lemmas, and combines the method of proof by contradiction with classification discussion, the normal criteria of meromorphic functions involving the number of zeros is extended to general differential polynomials, and a new result is

*通讯作者。

obtained, which enriches the theory of normal families of meromorphic functions.

Keywords

Holomorphic Function, Differential Polynomial, Normality Criterion, Zero Numbers

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1969 年, Drasin, D [1] 证明了:

定理 A [1] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的一族全纯函数, n 为正整数, a, b 为两个常数, 满足 $a \neq 0, \infty$ 且 $b \neq \infty$ 。若 $n \geq 3$, 对于 $\mathcal{F}$ 中的每个函数 f , $f' - af^n \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

当定理 A 中的函数族为亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 时, 在其他条件不变的情况下, 得到相应的正规定理。

当 $n \geq 5$ 时, 由李先进[2]证明得到; 当 $n = 4$ 时, 由庞学诚[3]证明得到; 当 $n = 3$ 时, 由陈怀惠和方明亮[4]证明得到。

同时叶亚盛[5]将定理 A 中的函数从低阶导数推广到高阶导数, 得到了如下结论。

定理 B [5] 设 $n \geq 2, k$ 是正整数, $a (\neq 0), b$ 为两个有限常数, 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数。若对于每个函数 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)} - af^n \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

然后叶亚盛和庞学诚[6]将定理 B 中的 f' 替换为 f 的微分多项式 $f^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z)f^{(k-i)}(z)$, 得到了亚纯函数族的正规性。

2014 年, 邓炳茂[7]在亚纯函数零点对其正规性影响方面进行了深入研究, 降低例外函数的条件, 研究了一类特殊的微分多项式的正规定理, 得到了如下结论。

定理 C [7] 设 m, n, k 为正整数满足 $n \geq m+1$, 设 $a (\neq 0), b$ 为两个有限常数, 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数, 其所有零点的重数至少为 k 。若对于每个函数 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)} - af^n - b$ 在 D 内至多有 mk 个不同的零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

当函数族为亚纯函数族时, 在其他条件不变的情况下, 若 $n \geq k+m+2$, $f^{(k)} - af^n - b$ 在 D 内至多有 m 个不同的零点, 则亚纯函数族也正规。

在亚纯函数族的情形下, 王琮[8]将正整数 n 的条件降低, 同时附加 $f(z)$ 极点重级至少为 k 的条件下, 得到了亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 是正规的。

本文考虑将定理 C 中的微分多项式推广到更一般的微分多项式方程:

$$f^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z)f^{(k-i)}(z) + \sum_{s=1}^{n-1} b_s(z)f^s(z) - af^n(z) = b(z)$$

当方程有解时, 讨论全纯函数族的正规定理。

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的零点重级至少为 k 的全纯函数族, a 是非零有限复数, 给定三个正整数 m, n, k 满足 $n \geq m+1$ 。若对于任意 $f \in \mathcal{F}$, $L_f(z) - P_f(z)$ 至多有 mk 个不同的零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。其中:

$$L_f(z) = f^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z)f^{(k-i)}(z), \quad P_f(z) = \sum_{s=1}^{n-1} b_s(z)f^s(z) - af^n(z) - b(z),$$

$a_i(z), b_s(z), b(z) (i=1, 2, \dots, k-1; s=1, 2, \dots, n-1)$ 为区域 D 内的全纯函数。

2. 引理

引理 1 [9] 设 $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 $\Delta = \{z: |z| \leq 1\}$ 的一族亚纯函数, z_0 是 Δ 内任意一点, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 其中函数 f 的零点至少是 p 重, 极点至少是 q 重。若 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则对每一个 α $-q < \alpha < p$, 存在:

(1) 点列 $z_j \in \Delta, z_j \rightarrow z_0$; (2) 函数列 $\{f_j(z)\} \subseteq \mathcal{F}$; (3) 正数列 $\rho_j, \rho_j \rightarrow 0^+$,

使得 $g_j(\zeta) = \frac{f_j(z_j + \rho_j \zeta)}{\rho_j^\alpha}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重级

至少是 p , 极点重级至少是 q 且级至多是 2。

引理 2 [7] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数整函数, a 是一个非零有限常数, n 是一个正整数且 $n \geq 2$ 。那么 $f'(z) - ag^n(z)$ 至少有两个不同的零点。

3. 定理证明

定理 1 证明

证明 不妨设 $D = \Delta$, 其中 $\Delta = \{z: |z| < 1\}$, z_0 为单位圆盘 Δ 内任意一点, 假设函数族 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 1, 取 $\alpha = k/1 - n$, 存在函数列 $f_j \in \mathcal{F}$, 点列 $z_j \rightarrow z_0$, 正数列 $\rho_j \rightarrow 0^+$, 使得

$$g_j(\zeta) = \rho_j^{\frac{k}{n-1}} f_j(z_j + \rho_j \zeta) \Rightarrow g(\zeta),$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛。其中 $g(\zeta)$ 为非常数整函数且其零点重级至少是 k 。为书写方便, 不妨设 $\hat{\zeta}_j = z_j + \rho_j \zeta$, 则

$$\begin{aligned} \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} [L_{f_j}(\hat{\zeta}_j) + P_{f_j}(\hat{\zeta}_j)] &= g_j^{(k)}(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(\hat{\zeta}_j) \rho_j^{k-i} g_j^{(s)}(\zeta) + \sum_{s=1}^{n-1} b_s(\hat{\zeta}_j) \rho_j^{\frac{k(n-s)}{n-1}} g_j^{(s)}(\zeta) - ag_j^n(\zeta) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} b(\hat{\zeta}_j) \\ &\Rightarrow g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta), \end{aligned}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛。显然, $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta) \neq 0$ 。否则 $g^{(k)}(\zeta) \equiv g^n(\zeta) (n \geq m+1)$, 有

$$nT(r, g) = T(r, g^n) = T(r, g^{(k)}) + O(1) = m(r, g^{(k)}) + N(r, g^{(k)}) + O(1) \leq T(r, g) + S(r, g),$$

即 $(n-1)T(r, g) \leq S(r, g)$, 因此 g 为常数, 矛盾。

接下来, 证明两个断言成立。

断言(1): $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 至多有 mk 个不同零点。

断言(2): $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 至少有 $mk+1$ 个不同零点。

显然, 由以上两个矛盾的断言可知全纯函数族 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规, 即 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规。下面开始证明断言(1)和断言(2)成立。

首先证明断言(1)。

假设 $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 有 $mk+1$ 个不同零点 $\zeta_i (i=1, 2, \dots, mk+1)$ 。根据 Hurwitz 定理, 那么存在 $\zeta_{j,i} (i=1, 2, \dots, mk+1)$, 满足 $\zeta_{j,i} \rightarrow \zeta_i$ 和 $L_{f_j}(\hat{\zeta}_{j,i}) + P_{f_j}(\hat{\zeta}_{j,i}) = 0$ 。这与条件 $L_{f_j}(\hat{\zeta}_j) + P_{f_j}(\hat{\zeta}_j)$ 在 Δ 内至多有 mk 个不同零点, 且 $z_j + \rho_j \zeta_{j,i} \rightarrow z_0$ 相矛盾。所以 $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 至多有 mk 个不同零点。断言(1)证明完毕。

其次证明断言(2)。

若 $mk=1$, 则 $m=1, k=1$, 由引理 2 可得 $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 至少有两个不同的零点, 得证。

若 $mk \geq 2$, 假设 $g^{(k)}(\zeta) - ag^n(\zeta)$ 有 $l(\leq mk)$ 个不同的零点。再设 $\psi(z) = \frac{g^{(k)}(z)}{ag^n(z)}$, 其中 $g^{(k)}(z) \neq 0$ 。

否则, 若 $g^{(k)}(z) \equiv 0$, 这与 g 的零点重级至少为 k , 矛盾。由此, $\psi(z) \neq 0$ 。计算可得 $ag^n(z) = \frac{g^{(k)}(z)}{\psi(z)}$,

进而有:

$$nm(r, g) = m(r, g^n) = m\left(r, \frac{g^{(k)}}{a\psi}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + m(r, g) + S(r, g), \quad (1)$$

$$nN(r, g) = N(r, g^n) = N\left(r, \frac{g^{(k)}}{a\psi}\right) \leq N(r, g) + k\bar{N}(r, g) + N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) - \bar{N}_0(r), \quad (2)$$

其中 $\bar{N}_0(r)$ 是关于 ψ 和 $g^{(k)}$ 共同零点的计数函数, 不计其重数。

可以推导出:

$$\bar{N}(r, \psi) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}(r, g) + \bar{N}_0(r). \quad (3)$$

显然 $\psi(z) \neq 1$, 再由(1)~(3), 可以推导出

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, g) &\leq k\bar{N}(r, g) + T\left(r, \frac{1}{\psi}\right) - \bar{N}_0(r) + S(r, g) \\ &= (k+1)\bar{N}(r, g) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g^{(k)} - ag^n}\right) + S(r, g). \end{aligned}$$

考虑到 $g^{(k)} - ag^n$ 有 $l(\leq mk)$ 个不同的零点, 又因为 g 是整函数, 由上式可得

$$(n-1)T(r, g) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + l \log r + S(r, g),$$

由于

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{k}N\left(r, \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{k}T(r, g) + S(r, g).$$

再由以上两式可得

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, g) &\leq k\bar{N}(r, g) + T\left(r, \frac{1}{\psi}\right) - \bar{N}_0(r) + S(r, g) \\ &\leq k\bar{N}(r, g) + \left[\bar{N}(r, \psi) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi-1}\right) + S(r, \psi)\right] - \bar{N}_0(r) + S(r, g) \\ &\leq k\bar{N}(r, g) + \left[\bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}(r, g) + \bar{N}_0(r)\right] + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g^{(k)} - ag^n}\right) - \bar{N}_0(r) + S(r, g) \\ &= (k+1)\bar{N}(r, g) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g^{(k)} - ag^n}\right) + S(r, g), \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $n \geq m+1$, $mk \geq 2$, 结合(4)式可得

$$T(r, g) \leq \frac{kl}{mk-1} \log r + S(r, g) \leq \frac{mk^2}{mk-1} \log r + S(r, g). \quad (5)$$

由此, 断定 g 是一个非常数有理函数, 且 $\deg g \leq \frac{mk^2}{mk-1}$ 。

下面, 分两种不同的情形进行讨论。

情形 1 当 $k \geq 2$, $m \geq 1$ 时。然后再分两种不同的情形讨论。

情形 1.1 当 $m \geq 1$, $k = 2$ 时, 即 $\deg g \leq \frac{4m}{2m-1} \leq 4$ 。

情形 1.1.1 $m = 1$ 。由(5)式, 可得 $T(r, g) \leq 4 \log r + S(r, g)$, 所以 $\deg g \leq 4$, 再分两种情形讨论。

情形 1.1.1.1 $\deg g = 4$, 因为 g 的所有零点重数至少为 2, 所以断言 g 至多有两个不同的零点。当 g 只有一个零点, 设 $g(z) = A(z - \alpha)^2$, 其中 A 是非零常数, 那么

$$g''(z) - ag''(z) = 12A(z - \alpha)^2 - A''(z - \alpha)^4 = (z - \alpha)^2 [12A - (z - \alpha)^{4n-2}],$$

显然, $g'' - ag''$ 有 $4m + 2 = 6 > 2$ 个不同的零点, 矛盾。

当 g 有两个不同的零点时, 由 $n \geq m + 1 \geq 2$, 即 $n \geq 3$, 由 $m = 1$, $k = 2$ 并结合(5)式, 有 $T(r, g) \leq 2 \log r + S(r, g)$, 这与 $\deg g = 4$ 矛盾。

若 $n = 2$, 记 $g(z) = A(z - \alpha_1)^2(z - \alpha_2)^2$, A 是非零常数且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。设 $\psi(z) = \frac{1}{B(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$, 其中 $B^2 = A$ 。那么 $g'' - ag^2 = \frac{-2\psi''\psi + 6(\psi')^2 - a}{\psi^4}$ 。显然, $g'' - ag^2$ 与 $-2\psi''\psi + 6(\psi')^2 - a$ 有相同的零点。

$$\text{由 } \psi(z) \text{ 知, } \psi'(z) = \frac{P_1(z)}{(z - \alpha_1)^2(z - \alpha_2)^2}, \quad P_1(z) = -\frac{1}{B}[2z - (\alpha_1 + \alpha_2)]; \quad \text{且 } \psi''(z) = \frac{P_2(z)}{(z - \alpha_1)^3(z - \alpha_2)^3},$$

其中 $P_2(z)$ 是 $\deg P_2 \leq 2$ 的多项式。

由以上几式整理可得,

$$\phi(z) = -2\psi''(z)\psi(z) + 6(\psi'(z))^2 = \frac{(-2/B)P_2(z) + 6P_1^2(z)}{(z - \alpha_1)^4(z - \alpha_2)^4} = \frac{q_1(z)}{(z - \alpha_1)^4(z - \alpha_2)^4}, \quad (6)$$

其中 $q_1(z)$ 是 $\deg q_1 \leq 2$ 的多项式。显然, $\phi - a$ 至少有两个不同的零点。假设 $\phi - a$ 仅有两个不同的零点 β_1 ,

β_2 , 设 $\phi(z) - a = \frac{C(z - \beta_1)^{l_1}(z - \beta_2)^{l_2}}{(z - \alpha_1)^4(z - \alpha_2)^4}$, 其中 C 是非零常数, 且 $l_1 + l_2 = 8$ 。所以

$$\phi'(z) = \frac{C(z - \beta_1)^{l_1-1}(z - \beta_2)^{l_2-1}q_2(z)}{(z - \alpha_1)^5(z - \alpha_2)^5}, \quad (7)$$

其中 $q_2(z)$ 是 $\deg q_2 \leq 2$ 的多项式。

由(6)式, 可得

$$\phi'(z) = \frac{q_3(z)}{(z - \alpha_1)^5(z - \alpha_2)^5}, \quad (8)$$

其中 $q_3(z)$ 是 $\deg q_3 \leq 3$ 的多项式。

注意到 α_1 、 α_2 与 β_1 、 β_2 是不同的, 由(7)和(8)式, 有 $l_1 + l_2 - 2 \leq \deg q_3 \leq 3$, 那么 $l_1 + l_2 \leq 5$, 这与 $l_1 + l_2 = 8$ 矛盾。

因此, $\phi - a$ 至少有三个不同的零点, 即 $g''(z) - ag^2(z)$ 至少有 $3 = mk + 1$ 个不同的零点, 矛盾。

情形 1.1.1.2 $\deg g \leq 3$ 。因为 g 的所有零点重数至少为 2, 那么可知 g 只有一个零点, 假设

$g(z) = A_1(z-c)^3$, 有 $g''(z) - ag^n(z) = 6A_1(z-c) - aA_1^n(z-c)^{3n} = (z-c)[6A_1 - aA_1^n(z-c)^{3n-1}]$ 。显然, $g'' - ag^n$ 有 $3m+2=5>2$ 个不同的零点, 矛盾。

情形 1.1.2 当 $m \geq 2$ 时, 由(5)式可知, $T(r, g) \leq \frac{4m}{2m-1} \log r + S(r, g) \leq \frac{8}{3} \log r + S(r, g)$, 即 $\deg g \leq 2$,

如同情形 1.1.1.2 很容易得到一个矛盾。

情形 1.2 当 $m \geq 1$, $k > 2$ 时, 下面分两种情形讨论。

情形 1.2.1 当 $m=1$ 时, 则由(5)式, $T(r, g) \leq \frac{k^2}{k-1} \log r + S(r, g) \leq (k+2) \log r + S(r, g)$, 可得 $\deg g \leq k+2$ 。可知 g 只有一个零点。假设 $g(z) = A(z-c)^l$, 其中 $k \leq l \leq k+2$ 。那么,

$$g^{(k)}(z) - ag^n(z) = \frac{Al!}{k!} (z-c)^{l-k} - aA^n (z-c)^{nl} = (z-c)^{l-k} \left\{ \frac{Al!}{k!} - aA^n (z-c)^{nl-l+k} \right\},$$

显然, $g^{(k)} - ag^n$ 有 $mk+k=2k>k$ 个不同的零点, 矛盾。

情形 1.2.2 当 $m \geq 2$ 时, 则由(5)式, $T(r, g) \leq \frac{mk^2}{mk-1} \log r + S(r, g) \leq (k+1) \log r + S(r, g)$, 于是 $\deg g \leq k+1$ 。那么 g 也只有一个零点, 如同情形 1.2.1 很容易得到一个矛盾。

情形 2 当 $k=1$, $m \geq 2$ 时。由(5)式, 有 $T(r, g) \leq \frac{m}{m+1} \log r + S(r, g)$, 再分两种情形进行讨论。

情形 2.1 当 $m=2$ 时, 那么 $T(r, g) \leq 2 \log r + S(r, g)$, 我们断言 $\deg g \leq 2$, 然后再分两种情形进行讨论。

情形 2.1.1 当 $\deg f=1$ 时, 令 $g(z) = Az+B$, 其中 $A \neq 0$ 。所以 $g' - ag^n = A - aA^n(Az+B)^n$ 。

显然, $g' - ag^n$ 至少有 $n \geq m+1 = mk+1$ 个不同的零点, 矛盾。

情形 2.1.2 当 $\deg f=2$ 时, 设 $g(z) = B_1(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$, $B_1 \neq 0$ 。当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 那么

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{2} T(r, g)。由(5)式并且注意到 $m=2$, $k=1$, 有 $(n-1)T(r, g) \leq \frac{1}{2} T(r, g) + 2 \log r + S(r, g)。$$$

所以, $T(r, g) \leq \frac{4}{3} \log r + S(r, g) < 2 \log r + S(r, g)$, 矛盾。

当 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时。由于 $n \geq m+1 \geq 3$ 。若 $n \geq 4$, 由(5)式且 $m=2$, $k=1$, 则 $T(r, g) \leq \log r + S(r, g)$, 矛盾。

若 $n=3$, 则 $g(z) = B_1(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$, 其中 $B_1 \neq 0$ 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。设 $\varphi = 1/g$, 则 $g' - ag^3 = -\frac{\varphi' \varphi + a}{\varphi^3}$ 。

显然, $g' - ag^3$ 和 $\varphi' \varphi + a$ 有相同的零点。设 $\psi = \varphi^2/2$, 则 $\psi' = \varphi \varphi'$ 。于是有 $\psi(z) = \frac{B}{(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2}$,

其中 $B = 1/(2B_1^2)$ 是非零常数。进而 $\psi'(z) = \frac{h_1(z)}{(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^3}$, 其中 $h_1(z)$ 是 $\deg h_1 = 1$ 的多项式。

由引理 2, 可知 $g' - ag^3$ 至少有两个不同的零点, 那么 $\psi' + a$ 至少有两个不同的零点。假设 $\psi' + a$ 仅有两个不同的零点 β_1 、 β_2 , 设

$$\psi'(z) + a = \frac{C(z-\beta_1)^{l_1}(z-\beta_2)^{l_2}}{(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^3}, \quad C \text{ 是非零常数, } l_1+l_2=6。所以 \psi''(z) = \frac{C(z-\beta_1)^{l_1-1}(z-\beta_2)^{l_2-1}h_2(z)}{(z-\alpha_1)^4(z-\alpha_2)^4},$$

$h_2(z)$ 是 $\deg h_2 \leq 2$ 的多项式。由 $\psi'(z)$ 可得, $\psi''(z) = \frac{h_3(z)}{(z-\alpha_1)^4(z-\alpha_2)^4}$, $h_3(z)$ 是 $\deg h_3 \leq 2$ 的多项式。

注意到 α_1 、 α_2 与 β_1 、 β_2 是互不相同的, 由以上两式, 有 $l_1 + l_2 - 2 \leq \deg h_3 \leq 2$, 那么 $l_1 + l_2 \leq 4$, 这与 $l_1 + l_2 = 6$ 矛盾。

因此 $\psi' + a$ 至少有三个不同的零点, 所以 $g'(z) - ag^3(z)$ 至少有 $3 = mk + 1$ 个不同的零点, 矛盾。

情形 2.2 当 $k = 1$, $m \geq 3$ 时。由(5)式, 可得 $T(r, g) \leq 2 \log r + S(r, g)$, 所以有 $\deg g = 1$ 。如同情形 2.1.1 很容易得到一个矛盾。

至此, 断言(2)证明完毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061077); 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2022D01A217)。

参考文献

- [1] Drasin, D. (1969) Normal Families and the Nevanlinna Theory. *Acta Mathematica*, **122**, 231-263. <https://doi.org/10.1007/bf02392012>
- [2] Li, X.J. (1985) Proof of Hayman's Conjecture on Normal Families. *Science in China Series A*, **6**, 596-603.
- [3] Long, H. (1990) On Normal Criterion of Meromorphic Functions. *Science in China Series A—Mathematics, Physics, Astronomy & Technological Science*, **33**, 521-527. <https://doi.org/10.1360/ya1990-33-5-521>
- [4] Chen, H.H. and Fang, M.L. (1995) The Value Distribution of $f''f'$. *Science in China Series A*, **7**, 789-798.
- [5] Ye, Y.S. and Pang, X.C. (1997) On the Zeros of a Differential Polynomial and Normal Families. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **205**, 32-42. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.5187>
- [6] 叶亚盛. 一个新的正规定则及其应用[J]. 数学年刊(A 辑), 1991, 12(B06): 44-49.
- [7] Deng, B., Qiu, H., Liu, D. and Fang, M. (2013) Hayman's Question on Normal Families Concerning Zero Numbers. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **59**, 616-630. <https://doi.org/10.1080/17476933.2012.750307>
- [8] 王琼, 陈玮, 袁文俊, 等. 与零点个数有关的亚纯函数正规定则[J]. 数学物理学报, 2017, 37(1): 7-17.
- [9] Zalcman, L. (1998) Normal Families: New Perspectives. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35**, 215-230. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-98-00755-1>