Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(8), 98-103
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.158224

Hans汉斯

$K_{6,6}-6K_2$覆盖变换群为S_4的正则覆盖的分类

严 红

北方工业大学理学院，北京

收稿日期：2025年6月29日；录用日期：2025年7月29日；发布日期：2025年8月27日

摘 要

对称图的正则覆盖是图论于代数的重要研究内容，在多个领域有广泛的应用。本文对$K_{6,6}-6K_2$的正则覆盖进行研究，其中覆盖变换群是S_4，且保纤维自同构群的作用是2-弧传递的，应用群扩张的理论证明了满足条件的覆盖图是不存在的。

关键词

2-弧传递，正则覆盖，提升

2-Arc-Transitive Regular Covers of $K_{6,6}-6K_2$ with the Covering Transformation Group S_4

Hong Yan

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: Jun. 29th, 2025; accepted: Jul. 29th, 2025; published: Aug. 27th, 2025

Abstract

The regular coverings of symmetric graphs are important research contents in graph theory and algebra, which have been widely applied in many fields. This paper studies the regular coverings of $K_{6,6}-6K_2$, where the covering transformation group is S_4, and the action of the fiber-preserving automorphism group is 2-arc-transitive. By using the theory of group extensions, it is proved that there is no covering graph satisfying the conditions.

Keywords

Arc-transitive, Regular Covering, Lifting

文章引用: 严红. $K_{6,6}-6K_2$ 覆盖变换群为 S4 的正则覆盖的分类[J]. 理论数学, 2025, 15(8): 98-103.
DOI: 10.12677/pm.2025.158224

1. 引言

1.1. 研究背景

图论是离散数学的重要分支。1736 年，瑞典数学家欧拉解决了著名的柯尼斯堡七桥问题，自此拉开了图论研究的序幕。1936 年，匈牙利数学家整理了近 200 年的图论成果，出版了第一本图论专著《有限图与无限图理论》，这成为图论发展史上第一座里程碑。后来随着电子计算机的出现，图论得到了迅速发展，被广泛应用于理论物理，几何学，电路设计等方面，成为数学学科的一个重要分支。

群论起源于数学家对高阶代数方程求解问题的思考。自诞生以来，群论经历了从基础理论的构建到现代数学中的广泛应用，再到前沿领域的深入探索的历程。在这个过程中，群论不仅为数学研究提供了强大的工具和方法，还为其他科学领域的发展提供了重要的支撑。在现代数学中，群论的应用已经渗透到各个分支领域。例如，在代数几何中，群论被用来研究几何对象的对称性和变换性质，为几何学的发展提供了新的视角和方法。在拓扑学中，群论被用来研究空间的连续变换和拓扑结构，为拓扑学的研究提供了有力的工具。

很多数学家很早以前就将图和群作为重要的研究对象，但并没有将二者有效地结合起来。直到 1938 年，Robert Fracht 指出：任一抽象群都是某个图的自同构群，自此拉开了用群论研究图论的序幕，见文献[1]。1960 年以后这个领域得到了迅速的发展，如对图的点传递性，边传递性，弧传递性，有向路传递性，距离传递性，局部本原性等的研究。此外，Cayley 图和陪集图也是应用群论来研究图论的典型例子。s-弧传递图的研究起源于 Tutte 对 3 阶 s-弧传递图的研究。1947 年，W. T. Tutte 证明了当 $s>5$ 时，不存在 s-弧传递的 3 度对称图，见文献[2]，这也是群在图中的第一个精彩应用。后来，Weiss 对这一结论进行了推广，他证明了当 $s>8$ 时，不存在 s-弧传递图，见文献[3]。从群论的视角出发，若一个群在某个图上的作用满足 2-弧传递性，那么该群中任意单个顶点的稳定化子群，在对于顶点处的作用必然也具备 2-弧传递着一特征。由于该条件对于弧传递群来说是充要的。故而依托群论的理论框架，对所有的有限 2-弧传递性传递图展开系统性的分类研究，成为一个极具挑战性且引人入胜的重要课题。澳大利亚数学家 Praeger 最先开始研究这个问题，获得了一些重要成果。

在群论和图论的研究体系中，对于有限 s-弧传递图的分类，Praeger 教授构建了系统的理论框架，将其划分为下述三类：

(1) 拟本原型(Quasi-Primitive Type)：图 X 的自同构群 $Aut(X)$ 的中，任意一个非平凡正规子群作用于图的点集时，具有传递性，即该正规子群可通过群作用遍历点集的所有元素，此类图归为拟本原型。

(2) 二部图型(Bipartite Type)：$Aut(X)$ 的每一个非平凡的正规子群作用于点集，产生的轨道数量至多为两个，并且至少存在一个正规子群作用在点集上恰好形成两个轨道，满足这两个条件的图属于二部图型；

(3) 覆盖型(Covering Type)：当 $Aut(X)$ 存在某个正规子群，该子群作用于点集产生的轨道数量不少于三个时，图 X 可视为子类(1)或者(2)中某个图型中某一个图的正则覆盖，此类图称为覆盖型。

此外，在文献[3] Praeger 还得到了一个非常重要的结论：一个非二部的弧传递图都是某个拟本原图的覆盖图。因此为了对 2-弧传递图进行分类，首先应该考虑(G, 2)-弧传递图具有拟本原或二部的 2-弧传递图具有极小正规子群的情况，即 G 有一个非传递的极小正规子群 K，使得关于 K-轨道是拟本原的或者二

部的 2-弧传递图。因为完全图 K_n，完全二部图 $K_{n,n}$ 以及去掉一个匹配的完全二部图 $K_{n,n}-nK_2$ 分别是拟本原，二部 2-弧传递图的标准例子，研究它们的 2-弧传递图能为 2-弧传递图的整体研究提供范例和基础。

近年来，图的正则覆盖问题也成为了 2-弧传递图领域数学工作者非常关注的问题。研究对称图的正则覆盖是刻画一般对称图的关键环节，有助于构造出新的 2-弧传递图，拓展 2-弧传递图的种类，完善图论中关于对称图的理论体系。在文献[4]中，已对完全图的正则覆盖进行了分类，覆盖变换群 K 为循环群或 Z_p^2（p 为素数)。文献[5]将分类扩展到 K 为 Z_p^3（p 为素数)。后来，文献[6]进一步将分类推广到覆盖变换群为亚循环群的情形。这是第一篇关于完全图的非交换覆盖变换群的完整分类。文献[7]-[9]确定了覆盖变换群为循环群，Z_p^2 和 Z_p^3（p 为素数))，$K_{n,n}-nK_2$ 的所有 2-弧传递图的正则覆盖。在文献[10]和[11]中得到了 $K_{n,n}$ 覆盖变换群为循环群和，Z_p^2（p 为素数)的 2-弧传递的正则覆盖，得到了其完整分类。在目前对 $K_{n,n}-nK_2$ 的覆盖图研究中，覆盖变换群大多是交换群，而对于覆盖变换群是非交换群的研究成果相对较少。

1.2. 主要结果

本文主要对 $K_{6,6}-6K_2$ 的正则覆盖的分类进行研究，得到如下结论。

定理 1 设 X 是 $Y=K_{6,6}-6K_2$ 的连通正则覆盖，其中覆盖变换群 K 同构于 S_4，且保纤维自同构群的作用是 2-弧传递的，则满足条件的覆盖图 X 是不存在的。

2. 基本概念

本文所研究的图均为简单的，无向且连通的。对于群和图的相关基础知识，读者可以阅读参考文献[12]-[14]。在图论研究中，对于给定图 X，其点集，边集，弧集以及全自同构群分别记为 $V(X)$，$E(X)$，$A(X)$，$Aut(X)$ 来表示。$K_{n,n}-nK_2$ 表示一个完全图减去一个完美匹配，该图的点集定义 $V(K_{n,n}-nK_2)=\{1,2,\cdots,n\}\cup\{1',2',\cdots,n'\}$，边集 $E(K_{n,n}-nK_2)=\{ij' \mid i\neq j, 1\le i,j'\le n\}$。在图 X 中，2-弧是由三个不同的点构成的序列 (v_0,v_1,v_2)，需满足 (v_0,v_1) 与 (v_1,v_2) 均为弧。若全自同构群 $Aut(X)$ 在 X 的所有 2-弧构成的集合上具有传递性，则称图 X 是 2-弧传递图。若 $Aut(X)$ 的子群 G 在 X 的全体 2-弧组成的集合上具有传递性，则称子群 G 在 X 上是 2-弧传递的。

接下来介绍图的划分，商图以及覆盖的相关概念。假设 X 是一个图，对其顶点集进行一个划分，设为 p，将其分割成大小相同的 m 独立集 $\mathcal{P}$。由此得到商图 $Y:=X/\mathcal{P}$。其点集集是 $\mathcal{P}$，商图 Y 中两个点集 P_1 和 P_2 相邻，意味着在 X 中 P_1 和 P_2 之间至少有一条边。如果 $P_1P_2\in E(Y)$ 时，二者间的边集呈现匹配的特性，则定义 X 是 Y 的 m-重覆盖。此时 Y 称为 X 的基图，集合 P_i 称为 X 的纤维。对于图 X 中能将一个纤维映射到另一个纤维自同构，称为保纤维的自同构。进一步，把图中所有固定每个纤维集合不变的自同构所组成的群 K，则称为 X 的覆盖变换群。进一步的推导可知，当图 X 是一个连通图时，覆盖变换群 K 在 X 的纤维上的作用满足半正则的特点，即对于任意的 $v\in V(X)$，都有 $K_v=1$ 这一等式成立。特别地，若覆盖变换群 K 在每个纤维上的作用都是正则的，则称 X 是 Y 的一个正则覆盖。

下面命题是群论中一些基本结论。

命题 2.1 [[15] Satz 4.5]设 H 是 G 的一个子群，$C_G(H)$ 表示 H 在 G 中的中心化子，$N_G(H)$ 表示 H 在 G 中的正规化子，则商群 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。

设 G 是一个有限群，$H<G$，且满足 $Core(H)=1$。设 D 是 $G-H$ 中若干 H 双陪集的并集，同时满足 $D=D^{-1}$ 时，可构造陪集图 $X=X(G;H,D)$。其点集定义为 $X(X)=\{Hg \mid g\in G\}$，边集定义为 $E(X)=\{Hg_1,Hg_2 \mid g_2g_1^{-1}\in G\}$。则从定义可知，图 X 的顶点数对应 H 在 G 中右陪集的个数，度数对应 H 在 D 中右陪集的个数。显然，G 在 $V(X)$ 上的右乘作用具有传递性，且该作用的核是 H 在 G 中所有共轭

的交。反之，任意一个点传递图都与某一个陪集图是同构的，相关内容可参考文献[16]。

另外，对于有限群 G，若 L 和 R 均为 G 的子群，D 是 R 和 L 在 G 中若干双陪集图的并(即 $D=\bigcup_i Rd_iL$)。用 $[G:L]$ 和 $[G:R]$ 来分别表示 G 关于 L 和 R 的陪集数，此时可定义一个双陪集图 $X=(G,L,R;D)$，它的点集为 $V(X)=[G:L]\cup[G:R]$，边集为 $E(X)=\{Lg,Rdg\,|\,g\in G,d\in D\}$。该图就称作 G 关于 L，R 和 D 的双陪集图，具体可见文献[17]。

命题 2.2 [17] 引理 2.3、2.4

(i) 双陪集图 $X=B(G,L,R;D)$ 是连通的当且仅当 G 可由 $D^{-1}D$ 生成。

(ii) 设 Y 是一个双陪集图，它的两个部集分别为 $U(Y)$，$W(Y)$。则 $V(Y)=U(Y)\cup W(Y)$。设 $G\le Aut(Y)$，并且 G 在 Y 的两个部集 U 和 W 上的作用是传递的。设 $u\in U(Y)$ 和 $w\in W(Y)$，并且设 $D=\{g\in G\,|\,w^g\in Y_1(u)\}$，则 D 是 G_w 和 G_u 在 G 中的若干双陪集的并，且有 $Y\cong B(G,G_u,G_w;D)$，特别地，对于任意的 $uw\in E(Y)$，若 G_u 在 u 这个点的邻域上的作用是传递的，则 $D=G_uG_w$。

3. $K_{6,6}-6K_2$ 的正则覆盖

在这一节我们证明定理 1，即基图 $Y=K_{6,6}-6K_2$，X 是 Y 的一个连通覆盖，其中覆盖投影为 $p:X\to Y$，且覆盖变换群 K 同构于 S_4，保纤维的自同构群的作用是 2-弧传递的。下面我们证明定理 1。

定理 1 设 X 是 $Y=K_{6,6}-6K_2$ 的连通正则覆盖，其中覆盖变换群 K 同构于 S_4，且保纤维自同构群的作用是 2-弧传递的，那么满足条件的覆盖图 X 是不存在的。

证明 设基图 $Y=K_{6,6}-6K_2$，则 $Aut(Y)\cong S_6\times Z_2$。设覆盖变换群为 K，则 $K\cong S_4$。显然，$Aut(K)\cong S_4$ 且 $Z(K)=1$。

A_6 作为 6 元集合上的偶置换群，其置换作用能自然对应基图 Y 中对应的两个顶点集内部的对称变换，保持图的二分结构。A_6 是单群，没有非平凡的正规子群，结构比较特殊。在覆盖空间中，提升群需能保持覆盖的连通性和对称性，A_6 的置换作用具有传递性恰好满足这一条件。所以对于基图 Y，考虑 A_6 的提升。设 $G\cong A_6\le Aut(Y)$，$\tilde{G}$ 为 G 的提升，即 $\tilde{G}/K=G\cong A_6$。由于 $Z(K)=1$，故有 $C_{\tilde{G}}(K)\cap K=1$。又由引理 2.1 可知：

$$\tilde{G}/C_{\tilde{G}}(K)\le Aut(K)\cong S_4\text{。}$$

因此，$C_{\tilde{G}}(K)\ne 1$。由第二同构定理可知

$$1\ne C_{\tilde{G}}(K)=C_{\tilde{G}}(K)/C_{\tilde{G}}(K)\cap K\cong C_{\tilde{G}}(K)K/K\text{。}\tag{1}$$

又由于

$$C_{\tilde{G}}(K)K/K\lhd\tilde{G}/K,\tag{2}$$

由(1)和(2)可得

$$1\ne C_{\tilde{G}}(K)\lhd\tilde{G}/K\cong A_6\text{。}\tag{3}$$

因为 A_6 是单群，所以由(3)可得 $C_{\tilde{G}}(K)\cong A_6$。因此 $\tilde{G}=C_{\tilde{G}}(K)\times K$。

设 $V(Y)=\{1,2,3,4,5,6\}\cup\{1',2',3',4',5',6'\}$，$E(Y)=\{ij'\,|\,i\ne j,1\le i,j'\le 6\}$。由于 $C_{\tilde{G}}(K)\cong A_6$，可把 $C_{\tilde{G}}(K)$ 等同于 A_6。下面我们要找 A_6 的生成元。在 $C_{\tilde{G}}(K)$ 中，因为 A_6 的在 6 个点上是传递的，所以它的点稳定子群是 A_5。因此设

$$x=(23456),\quad y=(23)(45),$$

则 x，y 固定点 1，在其他五个点上是传递的，接下来我们只需另外找一个点 b，能够将点 1 传递到

其他点上，所以可设

$$b=(16)(2543),$$

则 x，y，b 即为 A_6 的生成元，并且我们可以得到 $\tilde{G}_F=\langle x,y\rangle\times K$，其中 F 是点 1 的纤维。任取 $\tilde{u}\in F$，则可得 $L:=\tilde{G}_{\tilde{u}}=\langle x,y\rangle$，又因为 $\tilde{G}_F=\tilde{G}_{F'}$，其中 F' 是点 $1'$ 的纤维，所以可以可得 $R:=\langle x,y\rangle$。

由引理 2.2 可知，覆盖图 X 一定同构于某一个双陪集图 $X'=B(\tilde{G},L,R;D)$，其中 $D=RbkL$ 且 $k\in K$，并且双陪集图 D 的两个部集分别为：

$$\tilde{U}'=\{Lk|k\in K\}\cup\{Lbx^ik|i=0,1,2,3,4;k\in K\},$$

$$\tilde{W}'=\{Rk|k\in K\}\cup\{Rbx^ik|i=0,1,2,3,4;k\in K\}。$$

同时，X' 要满足下列两个条件：

(1) $d(X')=5$；

因为 L 包含点 Rbk 的次轨道长为 5，则 y 必固定点 Rbk，即 $Rbky=Rbk$，则 $Rbkyk^{-1}b^{-1}=R$，进而有 $bkyk^{-1}b^{-1}=yb^{-1}\in R$，显然成立。

(2) 连通性：

由于

$$\langle D^{-1}D\rangle=\langle x,y,x^{bk},y^{bk}\rangle=\langle x,y,x^b,y^b\rangle\le A_6\cong C_{\tilde{G}}(K)<\tilde{G}$$

由命题 2.2 (i)可知，此时 $\langle D^{-1}D\rangle<\tilde{G}$，$G$ 不能由 $D^{-1}D$ 生成，所以双陪集图 X' 是不连通的。故而满足条件的覆盖图 X 是不存在的。

4. 结语

本论文主要利用群扩张理论来讨论基图的自同构子群的提升，最后得到结论：$K_{6,6}-6K_2$ 的正则覆盖图是不存在的，其中覆盖变换群为 S_4，且保纤维的自同构群的作用是 2-弧传递。这个方法能够有效应用于确定小阶数对称图的循环和初等交换正则覆盖，为深入理解小阶数对称图的结构和性质提供了新的视角。此外该方法还为探索覆盖变换群是其他对称群时的正则覆盖提供理论参考。$K_{6,6}-6K_2$ 是较为典型的高对称性图，S_4 属于“小阶数”非交换群，对于 $K_{n,n}-nK_2$，当 n 取更大的数值时，覆盖变换群是非交换群的分类问题尚未得到完全分类。而将此方法应用 n 更大的情形中有待解决的问题有：

(1) 群的结构会更复杂：n 变大，$K_{n,n}-nK_2$ 对称群和交错群的阶数也会相应地增加，内部结构也会很复杂，不像小阶数群的结构那么清晰，可能没有办法直接套用低阶的方法进行分析。

(2) 陪集图的构造和验证会更难：当 n 变大，陪集图的生成元不好找。陪集图存在性的各种条件，例如度数，连通性这些条件验证会更加复杂，可能需要应用更多群论中的其他知识和计算来解决。

致　谢

感谢参考文献中的知识对于本文提供的理论支持和我的导师在本论文中给予的写作帮助，也非常感谢评审老师提出的宝贵修改意见。

参考文献

[1] Frucht, R. (1938) Herstellung von Graphen mit Vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compositio Mathematica*, **6**, 239-250.

[2] Praeger, C.E. (1993) An O'nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 227-239.

https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[3] Praeger, C.E. (1993) Bipartite 2-Arc-Transitive Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **7**, 21-36.

[4] Du, S., Marušič, D. and Waller, A.O. (1998) On 2-Arc-Transitive Covers of Complete Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **74**, 276-290. https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1847

[5] Du, S., Kwak, J.H. and Xu, M. (2005) 2-Arc-Transitive Regular Covers of Complete Graphs Having the Covering Transformation Group Z_p^3. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **93**, 73-93. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.09.003

[6] Xu, W., Du, S., Kwak, J.H. and Xu, M. (2015) 2-Arc-Transitive Metacyclic Covers of Complete Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **111**, 54-74. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.09.004

[7] Xu, W. and Du, S. (2013) 2-Arc-Transitive Cyclic Covers of $K_{n,n}-nK_2$. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **39**, 883-902. https://doi.org/10.1007/s10801-013-0471-8

[8] Xu, W., Zhu, Y. and Du, S. (2016) 2-Arc-Transitive Regular Covers of $K_{n,n}-nK_2$ with the Covering Transformation Group Z_p^2. *Ars Mathematica Contemporanea*, **10**, 269-280. https://doi.org/10.26493/1855-3974.560.5be

[9] Du, S. and Xu, W. (2016) 2-Arc-Transitive Regular Covers of $K_{n,n}-nK_2$ Having the Covering Transformation Group Z_p^3. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **101**, 145-170. https://doi.org/10.1017/s1446788716000057

[10] Xu, W. and Du, S. (2018) 2-Arc-Transitive Cyclic Covers of $K_{n,n}$. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **48**, 647-664. https://doi.org/10.1007/s10801-017-0810-2

[11] Du, S., Xu, W. and Yan, G. (2017) 2-Arc-Transitive Regular Covers of $K_{n,n}$ Having the Covering Transformation Group Z_p^2. *Combinatorica*, **38**, 803-826. https://doi.org/10.1007/s00493-016-3511-x

[12] Gross, J.L. and Tucker, T.W. (1987) Topological Graph Theory. Wiley Interscience, 361.

[13] Biggs, N. (1993) Algebraic Graph Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press, 205.

[14] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, 796.

[15] Malnič, A. (1998) Group Actions, Coverings and Lifts of Automorphisms. *Discrete Mathematics*, **182**, 203-218. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(97)00141-6

[16] Sabidussi, G. (1964) Vertex-Transitive Graphs. *Monatshefte für Mathematik*, **68**, 426-438. https://doi.org/10.1007/bf01304186

[17] Du, S. and Xu, M. (2000) A Classification of Semisymmetric Graphs of Order 2*pq*. *Communications in Algebra*, **28**, 2685-2715. https://doi.org/10.1080/00927870008826987