Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(8), 38-45
Published Online August 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.158218

级数的重排以及收敛性

柳彦军*，席梦圆

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2025年6月30日；录用日期：2025年7月31日；发布日期：2025年8月15日

摘 要

无穷级数理论是微积分学的重要内容，它在数学的许多领域都有着广泛的应用，例如函数表示等。本文通过无穷级数的重排问题，论述了绝对收敛级数的重排和条件收敛级数重排的相关理论，同时，阐述了交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$的重排，给出了交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/\sqrt{n}$的收敛条件。

关键词

无穷级数，重排，收敛性，交错级数

Rearrangement of Series and Convergence

Yanjun Liu*, Mengyuan Xi

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Jun. 30th, 2025; accepted: Jul. 31st, 2025; published: Aug. 15th, 2025

Abstract

The theory of infinite series is an important content of calculus, which has a wide range of applications in many fields of mathematics, such as function representation and so on. In this paper, through the problem of rearrangement of infinite series, the related theories of rearrangement of absolutely convergent series and rearrangement of conditionally convergent series are discussed, meanwhile, the rearrangement of $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ intersecting series is elaborated, and the convergence condition of $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ intersecting series is given.

Keywords

Infinite Series, Rearrangement, Convergence, Staggered Series

*通讯作者。

文章引用：柳彦军，席梦圆．级数的重排以及收敛性[J]．理论数学, 2025, 15(8): 38-45. DOI: 10.12677/pm.2025.158218

1. 引言

无穷级数在数学史上的出现非常早，在古希腊时期，亚里士多德就已经知道公比小于$1/4$且大于零的几何数可以求出和数。然而，直到微积分被发明的时代，人们才开始把级数作为一个独立的概念。17世纪到18世纪，牛顿发表论文《用无限多项方程的分析学》，格雷戈里、泰勒发展了泰勒定理，拉格朗日、斯特林等数学家也在研究级数理论方面做出了卓越贡献。十八世纪的数学家们广泛地使用无穷级数，Four超几何级数收敛性的第一个重要而严谨的研究。在这篇文章中，他发现对于不同的α，β和γ，超几何级数可以代表许多不同的函数。因此，他想要提出一个确切的收敛判别准则。尽管费尽心思地得到了判别准则，但这仅仅解决了原来想到的级数的收敛性问题。Gauss证明了对于实ier、Gauss和Bolzano开始进行对无穷级数的研究。

Fourier在他1811年的论文中和他的《热的解析理论》中给出了一个收敛的无穷级数的定义，虽然他通常会随意地使用发散级数。在这些著作中，他所讲的“收敛”的意思是指，当n逐渐增加时，前n项的和趋近于一个固定的值，并且与该值的差异变得小于任何给定的量。他还指出，只有在x值的某个区间内才能保证函数级数的收敛性。此外，他强调收敛的必要条件是通项趋近于零。然而，级数$1-1+1-1+\cdots$仍然使他感到困惑；他曾认为这个级数的和是1/2。

Gauss在他的论文《无穷级数的一般研究》中，进行了对数和复数，$|x|<1$时超几何级数收敛，$|x|\geq 1$在则时发散。此外，当时，级数仅在$\alpha+\beta<\gamma+1$时收敛；当$x=-1$时，级数仅在$\alpha+\beta<\gamma+1$时收敛。然而，他的论文的严谨性使得当时的数学家们失去了兴趣。此外，他只关心特定的级数，而没有探讨级数收敛的一般原则。

尽管Gauss是第一个意识到需要将级数的使用限制在其收敛区域内的人，但他没有采取决定性的态度。他太过专注于使用数学计算来解决具体问题，以至于他使用了Γ函数的Stirling发散展开式。当他在1812年决定研究超几何级数的收敛性时，他说他这样做是为了使那些喜欢古代几何学家的严谨性的人们高兴，但他没有表明自己在这个问题上的立场。在他的论文中，他使用$\log(2-2x)$展为的x倍数的余弦的展开式，但没有证明该级数的收敛性按照当时可用的技术，也许无法证明。像18世纪的人一样，Gauss在他的天文学和测地学工作中，沿用旧有的习惯，只取无穷级数的有限项，而省略其余项。当他发现后面的项在数值上很小时，他就停止取项。当然，他最后没有估计误差。Poisson持有独特的观点，他拒绝使用发散级数，并举出了使用这种级数进行计算会导致错误的例子。但是，当他将任意函数表示为三角函数和球面函数级数时，他仍然广泛地使用了发散级数。Bolzano在他1817年的著作中已经对序列收敛的条件有了正确的理解，尽管这一成就通常归功于Cauchy。Bolzano对级数收敛的概念也非常清晰准确。Cauchy是这个主题中第一个具有广泛意义的关于级数收敛性的论述者。他在《分析教程》中说：“令S_n表示我们研究的无穷级数的前n项之和，其中是自然数。如果对于逐渐增大的值，和无限趋近于某个极限s，则级数是收敛的，而该极限值称为该级数的和。相反，如果当n无限增加时，S_n不趋近于固定的极限，那么级数就是发散的，并且没有和。”

在定义了级数的收敛和发散后，Cauchy提出了著名的Cauchy收敛准则，即对于序列$\{S_n\}$，如果对于任意指定的量，对于充分大的n和任意的r，绝对值$|S_{n+r}-S_n|$都小于该指定量，则该序列收敛于极限s。Cauchy证明了这个条件是充分而必要的，他在证明中也暴露出了他缺乏关于实数性质的知识的问题。

在过去，人们曾经假设级数的项可以随意地重新排列。然而，1827 年，Dirichlet 在一篇论文中证明了对于绝对收敛的级数项的重新组合或重新排列并不会改变级数的和。他还给出了例子，说明对于任何条件收敛的级数，通过重新排列其项，可以使得级数的和不同。随后，Riemann 在 1854 年的论文中证明了，对于适当重排条件收敛级数的项，可以使级数的和等于任何给定的数值。在 18 世纪到 19 世纪末期，许多一流的数学家都提出了无穷级数收敛的各种判别法。

2. 预备知识

定义 1 [1]给定一个数列$\{a_n\}$，把它的各项依次相加，连接起来的表达式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

称为级数(数项级数或常数项无穷级数)，其中a_n称为数项级数(1)的通项或一般项。常把数项级数(1)记作$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，数列级数(1)前n项依次相加，作和

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \tag{2}$$

称它为数列级数(1)的第n个部分和，也简称部分和。

定义 2 [2]若数项级数(1)的部分和$\{S_n\}$当$n \to \infty$时收敛于s，(即$\lim S_n = S$)，则称数(1 是收敛的，称 s 为数列级数(1)的和，记作：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

若$\{S_n\}$发散，则称数项级数(1)发散。

定理 1 若级数(1)各项的绝对值所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{3}$$

收敛，称级数(1)为绝对收敛级数。

如果级数(1)收敛，而级数(3)不收敛，这时称级数(1)为条件收敛级数。

3. 收敛级数的重排

定义 **3** 收敛的级数如果不改变级数项的排序，通过加括弧直接组合成的新级数，仍收敛且和不变。

下面来讨论改变级数项的排序的重排级数，设$\sigma : N \to N$是自然数列到自身的双方单值映射。那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的重排。

有限个数的和满足交换律，而对于满足交换律的无穷级数，有以下结论：

定理 2 [3]对于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，将它的所有正项组成一个新的级数记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$。将它的所有负项取绝对值，也组成了一个新的正项级数记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$。即：

$$u_n = \frac{|a_n| + a_n}{n} = \begin{cases} a_n, 当 a_n > 0 \\ 0\ \ , 当 a_n \le 0 \end{cases}$$

$$v_n = \frac{|a_n| + a_n}{n} = \begin{cases} -a_n, 当 a_n < 0 \\ 0\ \ , 当 a_n \geq 0 \end{cases}$$

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛。

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散。

定理 3 绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，在任意重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ 依然绝对收敛，且原级数和 A 也是重排级数的和。

定理 4 (关于条件收敛级数重排的 Riemann 定理)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，无论 S 取任何的实数，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重排级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$，都可以使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = S$。根据黎曼定理的结果表明，由于正项和负项的相互抵消才有了条件收敛的性质，而且由正项和负项的次序来决定的，这点是与绝对收敛的不同之处。

定义 4 若级数的各项符号正负相间，即形如

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

$$u_n \geq 0, n = 1, 2, 3 \cdots n\ 。$$

的级数叫做交错级数。

定理 5 若交错级数满足 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 满足条件：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，那么交错级数收敛。本文为了叙述简洁，我们称满足莱布尼兹定理的交错级数为莱布尼兹型级数。

由判定极限存在的单调有界定理知，数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 是收敛的，其极限值称为欧拉常数。至今，我们仍然判断不出欧拉数 γ 是有理数，还是无理数。记：

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3 \cdots \tag{4}$$

称 H_n 为调和数。由 $H_n = \ln n + \gamma + \alpha_n$，其中 α_n 满足：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n \to 0$ 因此 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} H_n$，即有：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \alpha_n \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} &= H_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2n + \gamma + \alpha_{2n} - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \alpha_n \\ &= \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + \alpha_{2n} - \frac{1}{2} \alpha_n \end{aligned}, \tag{6}$$

然后我们证明：

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

证明：用 S_n 表示上面级数的前 n 项部分和，则

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

(i) $= H_{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$= H_{2n}-H_{n}=\left(\ln 2n+\alpha_{2n}\right)-\left(\ln n+\gamma+\alpha_{n}\right)$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$

由(i)，(ii)可得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n}=\ln 2$，从而

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln 2，$$

现在我们把上面级数按如下方式重新排列：按顺序每取 3 个正项，再取 2 个负项，重复下去，得级数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots \tag{7}$$

下面证明级数(7)的和为 $\ln 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ 即

$$\ln 2\sqrt{\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

证明：在级数(7)中依次把 3 个正项和 2 个负项都结合起来得级数

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \tag{8}$$

记级数(8)的前 n 项部分和为 A_n，由(5)和(6)则

$$\begin{aligned}A_{2k}&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{6k-5}+\frac{1}{6k-3}+\frac{1}{6k-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln 3k+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma+\alpha_{6k}-\frac{1}{2}\alpha_{3k}-\frac{1}{2}\left(\ln 2k+\gamma+\alpha_{2k}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln 2+\alpha_{6k}-\frac{1}{2}\alpha_{3k}-\frac{1}{2}\alpha_{2k}\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}A_{2k}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln 2=\ln 2\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \lim_{k\to\infty}A_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(A_{2k}+\frac{1}{6k+1}+\frac{1}{6k+3}+\frac{1}{6k+5}\right)=\lim_{k\to\infty}A_{2k}=\ln 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

故级数(8)的部分和为 $\ln 2\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}B_{n}=\ln 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ 。

$$\ln 2\sqrt{\frac{3}{2}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

例题可以一般化，把所讨论的级数按顺序，先取s个正项，再取t个负项得级数的和为 $\ln 2\sqrt{\frac{s}{t}}$，即有 $\ln 2\sqrt{\frac{s}{t}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2s-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2t}+\cdots$特别地有，取 1 个正项，2 个负项$(s=1,t=2)$，得级数和 $\frac{1}{2}\ln 2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots$ 。

4. 交错级数 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的重排

对任意的正整数 k，$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$，所以，

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}。\tag{9}$$

对任意的正整数 n，让 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$，则有：

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\left(2\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}\right)>0$。

故数列 x_n 单调递增。又由(9)式得：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\left(2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}},$$

数(7)的部分和为 B_n，则其必介于级数(8)的两个连续的部分和之间，因此有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-1<2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}},\tag{10}$$

且 $-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}<-1$，故数列 x_n 有界，$-2<x_n<-1$。由单调有界定理，数列 x_n 有极限，不妨

$$记，\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}\right),\tag{11}$$

由(11)式得 $-2\le\gamma\le-1$，让：

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1},\tag{12}$$

则

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}-\gamma,$$

则当

$$n\to\infty,\quad \alpha_n\to 0。且\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\sqrt{n+1}+\gamma+\alpha_n,\tag{13}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2n+1}+\gamma+\alpha_n\tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{2n+2}+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha_{2n}}{\sqrt{2}}\tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}=2\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\gamma+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha_{2n},\tag{16}$$

设交错级数

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}+\cdots \tag{17}$$

的前 n 项和为 S_n，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}$$
$$=2\sqrt{2n+1}+\gamma+\alpha_{2n}-\left(2\sqrt{2n+2}+\sqrt{2}\gamma+\sqrt{2}\alpha_n\right)$$
$$=\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma-\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+2}}+\alpha_{2n}-\sqrt{2}\alpha_n,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma$$
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma。$$

故交错级数(17)的和为 $\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma$，把交错级数(17)的项按依次先取 s 个正项，再取 t 个负项，重复下去得级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2s-1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{2t}}+\cdots。 \tag{18}$$

对于级数(18) $s\neq t$ 时，其发散到 ∞，当 $s=t$ 时，其收敛于 $\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma$。

证明：记 $\mathrm{m}=s+t$。级数(18)的前 n 项和为则

$$A_{nm}=\sum_{n=1}^{ns}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\sum_{k=1}^{nt}\frac{1}{\sqrt{2k}}\ A_n$$
$$=2\sqrt{2ns+1}-2\sqrt{2ns+2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\gamma+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha_{2ns}$$
$$-(\sqrt{2nt+2}+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{nt}$$
$$=\left(2\sqrt{2ns+1}-\sqrt{2ns+2}-\sqrt{2nt+2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha_{2ns}-\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{2nt}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2ns+1}+\sqrt{2ns+2}}+\left(\sqrt{2ns+1}-\sqrt{2ns+2}\right)$$
$$+\left(1-\sqrt{2}v\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha_{2ns}-\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{2nt},$$

$$s=1,t=1,\sqrt{4n+1}-\sqrt{2n+2}=\frac{2n-1}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{2n+2}}=\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{4n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n+2}{n^2}}}。$$

由此可得，

(1) $s\neq t$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_{nm}=0$，级数(18)发散。

(2) 当 $s=t$ 时，给定正整数 $j(1\le j<m)$ 当 $1\le j\le s$ 时，

$$A_{nm+j}=A_{nm}+\frac{1}{\sqrt{2ns+1}}+\frac{1}{\sqrt{2ns+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2ns+2j-1}},$$

当 $s<j<m$ 时，

$$A_{nm+j}=A_{nm}+\frac{1}{\sqrt{2ns+1}}+\frac{1}{\sqrt{2ns+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2ns+2j-1}}+\frac{1}{\sqrt{2nt+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2nt+2(j-s)}},$$ 因此可得，

$$\lim_{n\to\infty}A_{nm+j}=\lim_{n\to\infty}A_{nm}=\left(1-\sqrt{2}\right)\gamma,$$

于是，结论可得证。

5. 讨论与展望

级数重排揭示了无穷求和与有限求和的根本差异。绝对收敛级数如同“刚体”，其结构稳定不受扰动，条件收敛级数则类似“流体”，其形态随容器(重排规则)而变化，而交错级数提供了理想的实验模型，验证了理论预言，可以看出，重排内在的数学美感持续启发着对无穷本质的探索。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第四版. 北京: 高等教育社, 2016.

[2] 克莱因. 古今数学思想(二) [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.

[3] 卓里奇. 数学分析(第二卷) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.