

GeoGebra及其在几类二次问题中的应用

马莉娟

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年7月3日; 录用日期: 2025年8月12日; 发布日期: 2025年8月21日

摘要

GeoGebra是全面且实用的教学软件, 不仅能帮助学生理解抽象的数学概念, 提高学生的听课效率、提升学生的数学思维能力, 而且便于老师的讲解。二次问题是我们数学学习过程中一个十分重要的板块, 它包括中学已经学习过的二次函数以及在大学中学习的二次曲面, 并且在现实情境中二次问题的应用十分广泛。随着GeoGebra在国内的使用范围不断扩大, 许多学者都对其应用做了一定的研究, 并发表了自己的观点, 他们中的许多人都涉及了GeoGebra在二次问题中的应用。本文通过对GeoGebra及其使用方法的简单介绍, 发现使用GeoGebra能够方便快速地画出复杂的函数图像, 这对于我们理解数学中抽象函数具有深刻的现实意义。因此本文首先介绍GeoGebra在中学中所学习的一元二次函数和一元二次方程的应用, 再进一步地利用GeoGebra探讨大学中所学习的抽象难懂的二次曲线的类型, 把一个抽象的二次函数的表达式输入GeoGebra的命令窗口, 就可以在几何区得到直观的函数图像, 进而判断二次曲线的类型。对于二次曲面来说, 先利用二次型的知识将二次曲面的类型将二次曲面化为标准形, 再通过输入函数的标准方程得到其图形, 让我们快速直观地判断出二次曲面的类型并且会发现平时晦涩难懂的在二次型正定问题下的极值问题、不等式问题也可以利用GeoGebra画出其立体图形, 让我们更形象地感受到二次问题的直观, 另外在数学分析中的积分问题中也可以利用GeoGebra画出函数图像, 明确积分区域, 进而进行积分计算。研究表明GeoGebra在我们大学所学习到的诸多二次问题中的应用是十分广泛的。

关键词

GGB与二次曲线, GGB与二次曲面, GGB与积分问题, GGB与极值问题, GGB与不等式问题

GeoGebra and Its Application to Some Kinds of Quadratic Problems

Lijuan Ma

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jul. 3rd, 2025; accepted: Aug. 12th, 2025; published: Aug. 21st, 2025

Abstract

GeoGebra is a comprehensive and practical teaching software, which can not only help students understand abstract mathematical concepts, improve students' listening efficiency, improve students' mathematical thinking ability, but also facilitate teachers' explanation. Quadratic problem is a very important part in our mathematics learning process. It includes the quadratic function we have learned in middle school and the quadric surface we have learned in university, and it is widely used in real situations. With the continuous expansion of GeoGebra's application in China, many scholars have done some research on its application and published their own opinions, and many of them are involved in the application of GeoGebra in quadratic problems. Through a brief introduction of GeoGebra and its application method, this paper finds that it is convenient and fast to draw complex function images with GeoGebra, which has profound practical significance for us to understand abstract functions in mathematics. Therefore, this paper first introduces the application of quadratic functions of one variable and quadratic equations of one variable that GeoGebra learned in middle school, and then further discusses the abstract and difficult types of conic curves that GeoGebra learned in university by using GeoGebra. The expression of an abstract quadratic function is input into the command window of GeoGebra. You can get the intuitive function image in the geometric area, and then judge the type of conic curve. For quadric surface, firstly use the knowledge of quadric form to convert the type of quadric surface into standard form, and then get its graph by input function standard equation. Let us quickly and intuitively judge the type of quadric surface and find the extreme value problem and inequality problem under the quadratic positive definite problem which are difficult to understand at ordinary times. We can also use GeoGebra to draw its three-dimensional graph, so that we can feel the intuition of quadratic problem more vividly. In addition, in the integral problem of mathematical analysis, GeoGebra can also be used to draw the function image, clear the integral region, and then carry out the integral calculation. Research has shown that GeoGebra has a wide range of applications in quadratic problems that we learn in universities.

Keywords

GGB and Conic Curve, GGB and Quadric Surface, GGB and Integral Problem, GGB and Extreme Value Problem, GGB and Inequality Problem

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

GGB 在全球众多国家的教育行业中具有很大的应用市场,是众多国家教师职业技能培训中不可或缺的一项重要内容。目前全球共设立有 159 所 GGB 研究院,专门进行 GGB 开发、应用和推广。在国内,同类软件使用更为广泛的是几何画板,而 GGB 使用的广度和深度都远不如几何画板,有许多老师和学生对于这个软件的了解不是太深入,但是 GGB 确实有许多优于几何画板的地方,它是一款免费的、可以找到许多免费上课资源、可以利用编程语言进行复杂的二次开发,并且在近几年在国内的发展越来越好,有许多老师、学者关于其应用做了许多研究,逐步发现其应用领域之多,希望可以在未来不断推广该软件,探索研究其更多的应用,比如说 GGB 与二次问题的联系与应用就具有非常重要的现实意义,值得我们不断学习与探究。

GGB 与中学数学内容的联系是十分紧密的。俞如燕[1]谈到 GGB 应用于初中数学中的函数的学习,

有助于培养学生的数学建模的思维方式。在文献[2]里李琨在高中数学教学里使用 GeoGebra (在本文中简称 GGB)的作图与计算,可以让高中生们在考试中不再害怕圆锥曲线这一类型的题目,提升学生们的自信心。同时项俊[3]发现了 GGB 在高中数学教学中圆锥曲线和统计方面的一些应用。郝建秀[4]在其硕士论文里研究了 GGB 应用于高中数学教学无论是对老师的教,还是学生的学都有一定的优点。GGB 对于提升中学学生的学习能力与中学老师的教学效率是十分有效的。

GGB 在大学数学专业课程的学习中应用也是十分广泛的。路云和褚鹏飞[5]在研究中发现 GGB 也可以用于条件极值的求解过程。潘伟云[6]在她的研究中发现当二次型是正定时可以用于二次曲线或者二次曲面的化简。在文献[7]中施永新通过使用 GGB 的 3D 绘图功能可以让我们对空间解析几何中学习的二次曲线、曲面有进一步深刻地认识与理解。习长新[8]对于利用 MATLAB 来绘制空间曲面的交线,让我对利用 GGB 来绘制空间曲面的交线有了新的思考,比如在进行积分计算时,我们找到交线之后,再确定投影区域,进而确定积分区域,就可以进行计算了。

该研究基于一些学者对于 GGB 与中学数学内容的结合与应用,进一步探索 GGB 与一些大学数学学习中的二次问题的联系,更加直观、简捷地利用图像使得抽象问题形象具体化,对于大学生更加直观地理解抽象的二次问题以及其与实际问题的联系具有深刻的现实意义。

首先对于 GGB 及其简单的使用方法进行介绍,其次对 GGB 在二次曲线与二次曲面中的应用进行分类,具体来说大致可以分为 GGB 在判断二次曲线与二次曲面的类型的应用,还有在进行积分计算找积分区域时可以利用 GGB 作出其函数图像,有利于我们直观观察,并清晰地看到积分区域,最后论述了 GGB 在二次型正定的条件下可以通过图形直观地解决极值问题和不等式问题。

2. GGB 简介及其使用

2.1. GGB 软件简介

GGB 来源于“几何 + 代数”,说明它不仅具有作几何图形的功能,还有其他与代数相关的功能。GGB 绘图软件是一个免费的动态数学教学画图软件,具有支持几何、计算、函数、微积分、概率分布图、代数、向量等多种功能。GGB 可以起到优化课堂教学,化简为繁的作用,提升学生们对数学学习的兴趣,它是由美国 Markus Hohenwarter 设计的,曾经得到过多个美国和欧洲的教育类软件的大奖。GGB 在 2019 年最新的人教版高中数学教材里被作为信息技术应用推荐的软件。GGB 几乎可以涵盖从小学到大学数学教材的相关内容。

目前 GGB 不仅可以在任何型号的电脑上使用,也适用于任何型号的平板和手机上,现在也可以在智能电视上使用,当然也可以直接在网页上使用,我们就可以做的随时随地使用 GGB,是十分方便的。GGB 对数学建模也有一定的作用:1) 函数模型可以进行数形结合,更直观地看到函数图像与表达式;2) 动态几何模型,要比我们之前使用的几何画板更加简捷、方便;3) 概率模型,可以对一些经常使用的概率模型进行 3D 仿真实验;4) 可以利用 GGB 的多变量分析功能进行模型模拟。

2.2. GGB 软件使用入门

GGB 一共分为代数窗口、几何窗口、工作表窗口和指令窗口四个窗口。

代数窗口:在 GGB 的命令区里输入代数表达式,然后按下 Enter 键,就可以在几何区看到对应的函数图像。在代数区里,我们不仅可以使用的英文命令,而且可以使用中文命令,我们也可以对函数表达式利用滑动条这个工具,通过改变滑动条的取值可以在几何窗口看到函数图像的动态变化过程,可以进一步直观体会到抽象的数学表达式也有简单、灵动的一面。

几何窗口:该窗口最大特点是直观,我们可以直观地观察到我们在代数区输入的内容所对应的图像,

我们可以利用工具栏里面已经提供的作图工具，在几何区里使用鼠标便可以进行作图。具体作图步骤如下：第一，在工具栏选择一种作图工具；第二，学习工具的使用提示来操作我们已经选择的工具。任何在几何区产生的内容，都会在代数区有一个与之对应的代数特征。如果我们想要进一步改变代数区的代数特征，只需要通过鼠标来移动几何区的对象，会发现代数区的代数特征会同时更新。

工作表窗口：在 GGB 的工作表区域中有一个特点和 office 工作表很类似，即每一个单元格都会有它特定的名称，以表示单元格的位置。单元格的数据引用是：如果单元格名称用在命令中或者表达式中时，单元格名称则表示该单元格的内容数据。GGB 的工作表可以进行单变量分析、多变量分析、双变量回归分析，还可以进行一些计算，比如说对表格中的一组或者多组数据进行求和、求平均值、求最大、小值等，也可以进行回归分析得到它的一个图像，该图像使用起来也十分方便，我们可以直接导出，这点是比 office 工作表更加方便。在 GGB 中工作表窗口对于代数窗口来说起到一个辅助的作用，体现在工作表窗口中，不仅可以输入数值，还可以输入 GGB 所支持的一切数学对象，例如矩阵、点列等。如果我们在工作表里输入一个数学对象，GGB 将在几何区中显示它的图像，并且对象名称与工作表中的位置相对应。

指令窗口：是比工作表窗口更常用的一个窗口。在指令窗口输入指令可以生成需要的数学对象，如果对指令不熟悉，可以点击指令窗口右侧的一个问号按钮，就会立刻给我们一些提示。比如说利用指令可以作出一个圆的内接正多边形，可以通过很多指令得到结果，首先做一个单位圆，其次创建一个滑动条 n ，确定 n 的取值范围比如说是从 3 到 50，然后可以在指令窗口输入描点，几何对象选择刚刚输入的单位圆，再确定路径值为 e ，最后通过改变滑动条 n 的取值，就可以得到圆的内接正多边形，当然也可以使用序列指令，表达式为描点，几何对象是单位圆，路径值为 $\frac{i}{n}$ ，其中变量是从 1 到 n ，同样通过移动滑动条的取值就可以得到与上述一样的圆的内接正多边形，也可以利用多边形指令得到结果。发现使用不同的指令也会有一样的结果，对 GGB 的认识与理解越深入就会发现 GGB 使用起来就越方便。

3. GGB 在二次曲线和二次曲面中的应用

3.1. GGB 在二次曲线中的应用

二次曲线和二次曲面是解析几何中一个十分重要的问题，特别是它们的分类问题，是这两部分的核心内容，十分重要同时又相对抽象难懂，利用 GGB 直接作出函数图像，可以通过图形直观感受其性质，对二次曲线、二次曲面有更深一步的认识，并明确它的类型。

3.1.1. 基于 GGB 的一元二次函数性质研究

在中学学习里，一元二次函数既是中招考试中的一个重点内容，也是初中与高中衔接比较紧密的一部分内容，初中对该问题掌握透彻就显得尤为重要。随着信息技术的发展与进步，有了 GGB 这款绘图软件，利用 GGB 绘图，就可以清晰地看到一元二次函数的一些性质，便于学生的学习与进一步理解。

比如说在解决下面问题时，利用 GGB 进行解答就可以更加方便、清晰，可以直观地感受到 GGB 功能的强大，可以直接在图像上看到问题的答案。

例 3.1.1 考虑下面两个一元二次函数与 x 轴是否有交点，并写出对应一元二次方程是否有根，如果有根，求出其根。

$$(1)y = x^2 - 3x + 4 \quad (2)y = x^2 - 5x + 6 \quad (1)y = x^2 - 3x + 4 \quad (2)y = x^2 - 5x + 6$$

解：利用 GGB 画出这两个一元二次函数的图像，就可以直观地看出它们与 x 轴是否有交点，并且可以看到交点的坐标，在图中可以看到第二题中函数与 x 轴有交点，并且交点为 $A(2,0), B(3,0)$ 这与我们下

面利用代数的方法求解的结果是一样的,并且可以看出这两个函数开口方向都是向上,但开口大小不同,也可以看到对称轴分别为 $x = \frac{3}{2}, x = \frac{5}{2}$, 如图 1 所示。

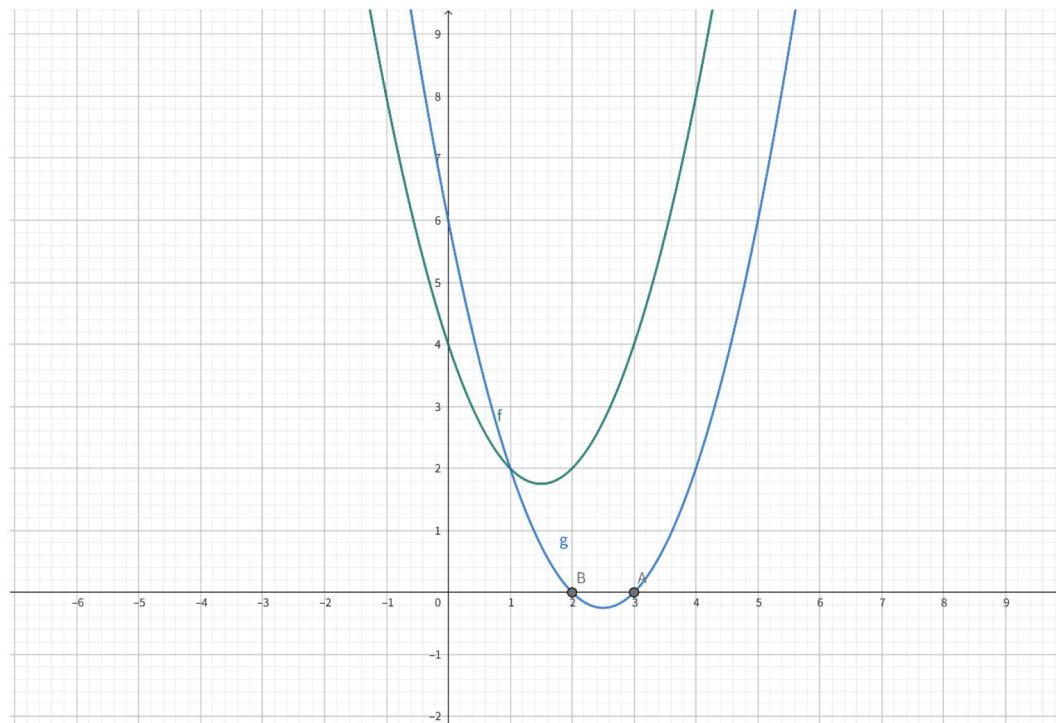


Figure 1. Quadratic function of one variable
图 1. 一元二次函数

利用计算的方法: 经分析可知一元二次函数中, 如果令 $y = 0$, 就可以得到对应的一元二次方程, 并且 $y = 0$ 时对应的 x 的取值就是对应一元二次方程的根。

(1) 该一元二次函数对应的一元二次方程为 $x^2 - 3x + 4 = 0$, 该方程的判别式 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$, 从而该方程没有根, 与之对应的一元二次函数与 x 轴没有交点。

(2) 该一元二次函数对应的一元二次方程为 $x^2 - 3x + 4 = 0$, 判别式为 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$, 则该方程有根, 解出方程根为 $x = 2, x = 3$, 从而可以此函数与 x 轴有交点。

在中学中 GGB 的应用, 不仅在一元二次函数与一元二次方程方面有应用, 而且在一些三角形的全等、相似, 正比例函数、一次函数、反比例函数、三角函数、指数函数、对数函数、幂函数在单调性、增减性、凹凸性、周期性和奇偶性等方面的应用。

3.1.2. GGB 与二次曲线的分类

在解析几何中对于二次曲线类型的判断, 其实没有很万能的方法, 不过如果利用 GGB 作出其图像, 我们可以通过其图像进而判断其类型。一般情况下, 我们可以通过二次型的正、负定来判断二次曲线、曲面的类型。

引理 1 [9] 当二次曲线或二次曲面方程中的二次型部分是正定时, 对应的二次曲线、曲面是椭圆, 当二次型部分负定时, 对应的二次曲线、曲面是椭球面。

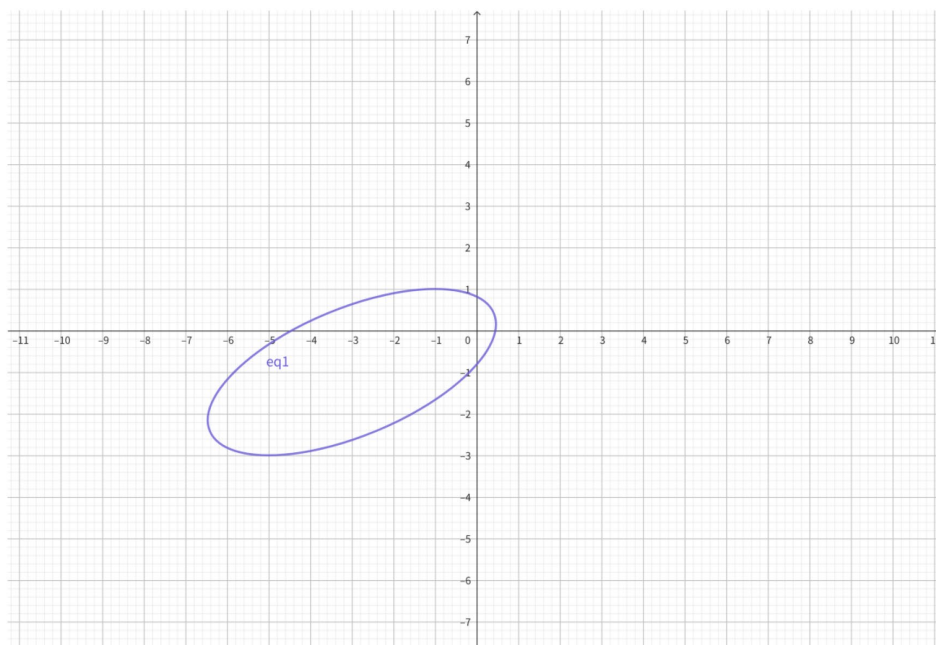
查看文献[10]发现常见的二次曲线的分类如表 1 所示。

Table 1. Common classification of quadratic curves [10]**表 1.** 常见的二次曲线分类[10]

序号	标准方程	曲线类型
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	椭圆
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	虚椭圆
3	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	双曲线
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	点或称两相交于实点的共轭虚直线
5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	两相交直线
6	$y^2 = 2px$	抛物线
7	$y^2 = a^2$	两平行直线
8	$y^2 = -a^2$	两平行共轭虚直线
9	$y^2 = 0$	两重合直线

例 3.1.2 判断二次曲线 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2 - 2xy + 4x = 0$ 为何种二次曲线。

解：利用 GGB 的绘图功能可以直接作出该二次曲线的图像，在命令窗口输入二次曲线的函数表达式即可，直接看出其为椭圆如图 2 所示。

**Figure 2.** Ellipse**图 2.** 椭圆

如果我们不能利用上述方法解题，就需要一定的技巧把该问题转化为与二次型相关的问题，然后再

利用二次型的相关理论进行求解。

先记 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2 - 2xy + 4x$,
然后再构造二次型 $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 2xy + 4xz$
$$g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 2xy + 4xz$$

则可知 $f(x, y) = g(x, y, 1)$ 。
记二次型 $g(x, y, z)$ 对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

把矩阵 A 经过非退化线性替换化为标准形, 并且该变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

通过该线性替换, 二次型的标准形为 $g(x, y, z) = x_1^2 + 2y_1^2 - 8z_1^2$,
从而 $f(x, y) = g(x, y, 1) = x_1^2 + 2y_1^2 - 8 = 0$,
即 $\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{4}y_1^2 = 1$ $\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{4}y_1^2 = 1$ 。

则利用表 1 可知二次曲线是椭圆。

通过上述例题的解题方法, 我们可以看出如果我们已经对 GGB 的使用比较了解, 我们便可以快速地得出题目的答案, 与此同时我们也看到了使用 GGB 软件方便、快捷的优点。当然, 如果在考试过程遇到这种题目, 不能使用 GGB 直接作图, 我们也可以利用已经学习过的二次型的相关内容来解答。

3.2. GGB 与二次曲面的分类

对应二次曲面的分类, 是我们在学习解析几何过程中的一个难点也是一个重点内容, 使用 GGB 绘图, 可以直观看到二次曲面的图像, 通过图像可以看出该曲面是否是有心或者无心曲面, 是否为旋转曲面, 还有一些对称方面的性质, 从而对二次曲面相关性质的理解更为深刻。可以通过数学计算先得到二次曲面的标准方程, 再利用 GGB 作出函数图像, 然后可以根据图像进而对该二次曲面有更深刻的理解, 也可以通过表 2 曲面类型[10]就可以知道其曲面的类型, 也通过查找资料了解到, 大致可以分为如下几种, 如表 2 [10]所示:

Table 2. Surface types [10]
表 2. 曲面类型[10]

序号	标准方程	曲面类型
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	椭球面(包括球面)
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	单叶双曲面
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	双叶双曲面

续表

4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	虚椭球面
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	椭圆柱面
6	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	双曲柱面
7	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	虚椭圆柱面
8	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	椭圆抛物面
9	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	双曲抛物面
10	$x^2 = 2py$	抛物柱面

例 3.2.1 [11] 由方程 $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4yz + 4x - 2y + 12z + 10 = 0$ 确定的二次曲面, 通过线性变换, 把它化为标准形, 并说明它是什么曲面。

解: 首先把二次曲面通过正交变换化为标准形, 再确定其曲面类型。

把二次曲面方程先化简为矩阵的形式即 $X^T AX + b^T X + 10 = 0$,

$$\text{其中 } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

因为 $|A - \mu E| = -\mu^3 + 9\mu^2 - 18\mu = -\mu(\mu - 3)(\mu - 6)$,

则 A 的特征值分别为 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3, \mu_3 = 6$, 分并求出它们对应的特征向量, 并把它们标准正交化可以得到,

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

取 $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$, 则 P 为正交矩阵, 做正交变换 $X = PY$,

其中 $Y = (x_1, y_1, z_1)^T$, $Y = (x_1, y_1, z_1)^T$, 则有 $X^T AX = 6x_1^2 + 3y_1^2, b^T X = 8x_1 - 6y_1 + 8z_1$,

因此, 原方程可化为 $6x_1^2 + 3y_1^2 + 8x_1 - 6y_1 + 8z_1 + 10 = 0$,

通过配方得

$$6\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)^2 + 3(y_1 - 1)^2 + 8z_1\left(z_1 + \frac{13}{24}\right) = 0$$

$$\text{令 } \tilde{x} = x_1 + \frac{2}{3}, \tilde{y} = y_1 - 1, \tilde{z} = z_1 + \frac{13}{24}, \tilde{x} = x_1 + \frac{2}{3}, \tilde{y} = y_1 - 1, \tilde{z} = z_1 + \frac{13}{24},$$

则原方程可以化为标准方程 $6\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 8\tilde{z} = 0$ 即 $\tilde{z} = -\left(\frac{3}{4}\tilde{x}^2 + \frac{3}{8}\tilde{y}^2\right)$,

利用表 2 可知该曲面为椭圆抛物面。

利用 GGB 作出其函数图像, 在代数窗口输入该二次曲面的标准方程, 可以清晰地看到椭圆抛物面的图像, 可以看出该二次曲面关于 z 轴、 XOZ 、 YOZ 坐标面对称, 该二次曲面是无心二次曲面, 如图 3 所示。

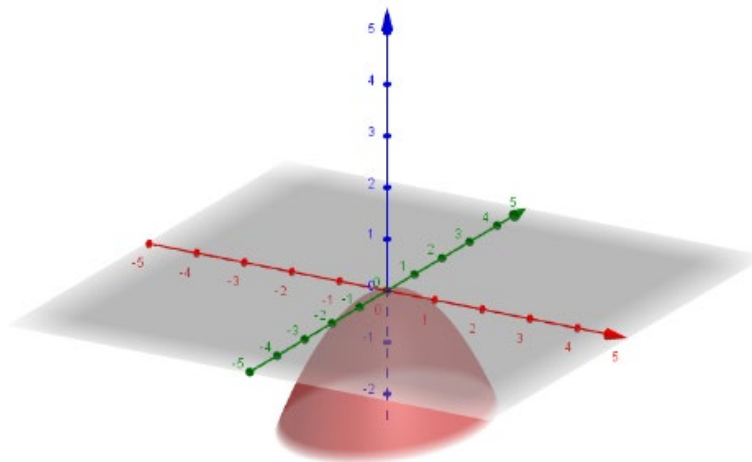


Figure 3. Elliptic paraboloid
图 3. 椭圆抛物面

二次曲面类型的确定是一类比较难的问题, 我们通过计算可以先化简为标准形, 再利用 GGB 对二次曲面进行作图, 不仅可以判断二次曲面的类型, 而且可以让我们对其一些图像性质的认识与掌握更加深刻, 为以后进行积分运算打下好的基础。

3.3. GGB 辅助积分计算

我们在数学分析里学习曲线、曲面积分的相关内容时, 需要明确积分区域, 故大多数是需要通过作图, 得到曲线或者曲面的图像, 来确定该题目具体的积分区域。我认为在解答曲线、曲面的积分的相关内容时, 把图像的积分区域找到是第一步, 即找到两个曲面的交面, 再进行投影可以得到积分区域, 积分区域确定正确, 是解对题目的第一步, 如果积分区域不对, 一般情况下不能得到正确答案。

下面给出数学分析上面的一个求积分的题目, 通过 GGB 的绘图功能就可以看出该题目的积分区域, 进而更好地进行积分计算。

例 3.3.1 [12] 计算曲面所围立体 V 的体积, V 是由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = x + y$ 所围的立体。

解: 由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = x + y$ 联立可得, $x^2 + y^2 = x + y$,

经分析可知积分区域为 $x^2 + y^2 \leq x + y$ 。

我们可以利用 GGB 画出函数图像, 直观地看出函数图像与积分区域, 如图 4 所示。

图像说明: 左侧红色区域的圆是 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = x + y$ 的交面在 XOY 面的投影区域, 右侧红色部分是方程为 $z = x^2 + y^2$ 的锥面, 青绿色部分是平面 $z = x + y$, 深灰色部分是锥面与平面的交面, 其在 XOY 面的投影为左侧的圆域记为 D , 其中圆的标准方程为 $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 0.5$ 。

利用数学分析中积分的相关内容, 就可以知道体积为 $V = \iint_D [x + y - (x^2 + y^2)] dx dy = \frac{\pi}{8}$ 。

其中在计算过程中利用了换元即 $x = 0.5 + r \cos \theta, y = 0.5 + r \sin \theta$ 。

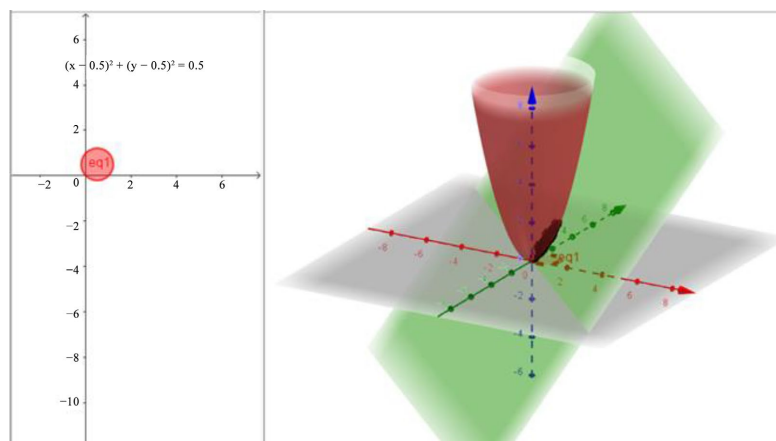


Figure 4. Cone
图 4. 锥面

利用 GGB 的绘图功能可以对积分问题中涉及的函数图像有进一步的理解, 更好地确定积分区域, 积分区域确定正确是做积分题目做对的第一步, 可以提升计算的正确率。

4. GGB 在极值和不等式中的应用

4.1. 多元函数极值的判断

在实际问题中, 我们常常会遇到求解多元函数的最大、最小值的问题, 我们在数学分析中也学习过该问题的解决方法, 就是通过梯度与内积的相关内容, 同时该问题也是数学分析在考研中的一个重点与难点, 多元函数因为维数之大, 在进行研究其性质和应用时会有很大难度, 对于二元或者三元函数来说, 通过 GGB 作出其图像可以直观地看出函数的一些性质, 并对函数有进一步的理解, 更好地解决相关问题。

引理 2 [9]: 驻点: 如果 M_0 是 n 元实函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的驻点, 则需要满足

(1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的邻域内有连续的二阶偏导数;

(2) M_0 满足 $\left. \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| = 0, (j=1, 2, \dots, n)$ 。

引理 3 [9]: 若 n 元实函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的邻域内有连续的二阶偏导数, 如果 M_0 满足 $\left. \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| = 0, (j=1, 2, \dots, n)$, 并且

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_n x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial^2 x_n^2} \end{pmatrix}$$

则(1) 当 A 正定时, M_0 是极小值点;

(2) 当 A 负定时, M_0 是极大值点;

(3) 当 A 不定时, M_0 不是极值点;

(4) 当 A 为半正定或者半负定时, M_0 是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的“可疑”的极值点。

比如说在三元函数 $f(x, y, z) = x^2 + 3x + y^2 + 5y + z^2 - 7z$

求极值时, 直接利用 GGB 作出其函数图像, 可以直观地看到该极值点, 利用 GGB 作出如下图像, 如图 5 所示。

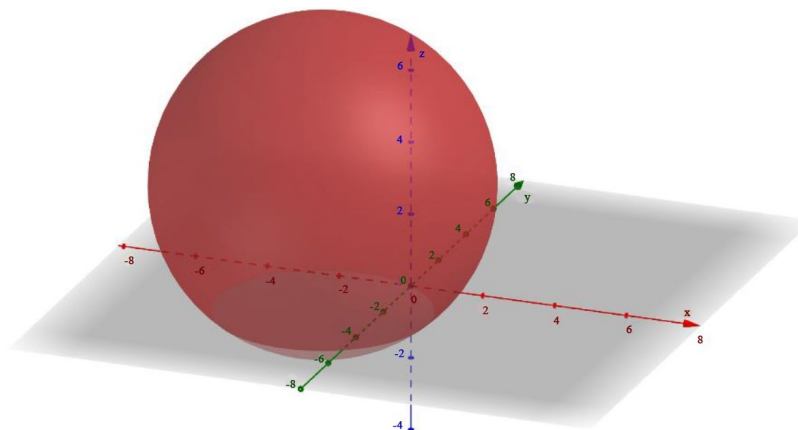


Figure 5. Sphere

图 5. 球面

其大致作图步骤为: 打开 GGB 之后, 先从视图里找到 3D 绘图区, 然后打开, 并且在代数区输入该函数表达式, 输入之后, 代数区会自动把该函数表达式进行配方变为

$$(x+1.5)^2 + (y+2.5)^2 + (z-3.5)^2 = 20.75$$

容易看出这是一个球体的标准方程。极小值点是在球心位置取得, 并且计算结果也与下面利用引理中利用二次型的相关理论进行计算所得结果一样。

利用上述引理方式进行解答:

$$\text{因为 } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x+3, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+5, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z-7,$$

$$\text{所以 } f \text{ 的驻点是 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

$$\text{又可以求得 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2,$$

$$\text{于是 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{即可以知道 } A \text{ 是正定矩阵, 则 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ 是极小值点, 并且极小值为 } f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = -\frac{83}{4}.$$

例 4.1.1 求双曲线 $xy=4$ 上离原点距离最近点的坐标。

利用 GGB 的方法: 经过分析可知该问题可以看作求解所有以原点为圆心的圆中, 与双曲线 $xy=4$ 相切的圆的切点的坐标。

作图步骤: 先打开 GGB, 然后直接在代数区输入双曲线的函数表达式 $xy=4$, 为了找到与之相切的

圆，我们需要先制作一个滑动条 r ，并且在代数区输入 $x^2 + y^2 = r^2$ ，其中 r 是一个变量，随着我们不断改变 r 的取值时，并观察圆与双曲线的位置关系，就发现当 $r^2 = 8$ 时的圆是与双曲线相切的，并且发现切点坐标是 $A(-2, -2), B(2, 2)$ 。作出图形，如图 6 所示。

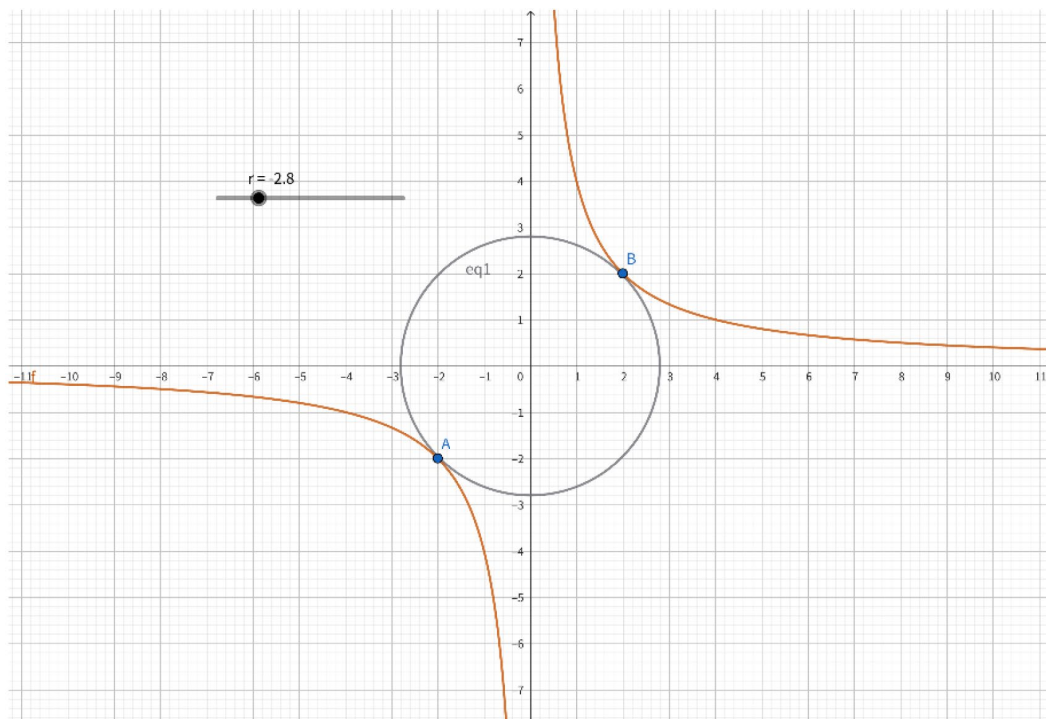


Figure 6. Hyperboloid
图 6. 双曲面

通过代数的方法计算，先分析：该问题相当于求解 $xy = 4$ 满足且 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 最小的 x, y 的坐标。

解：我们可以利用数学分析里学习的条件极值的求解方法，先构造拉格朗日函数为

$$L(x, y, \mu) = x^2 + y^2 + \mu(xy - 4) \quad L(x, y, \mu) = x^2 + y^2 + \mu(xy - 4)$$

再让拉格朗日函数分别关于变量 x, y, μ 求导，并令其为零。

解出方程组的解，当 $\mu = -2$ 时， $x = y = -2, x = y = 2$ ，当 $\mu = 2$ 时，方程组无解。故可以得到两个驻点 $M_1(2, 2), M_2(-2, -2)$ ，且这两个点离原点的距离为 $2\sqrt{2}$ 。

利用拉格朗日乘数法计算的结果与利用 GGB 方法计算的结果是一样。对于多元函数求极值的问题，由于函数中参量比较多，难以解决，但是对于二元、三元函数求极值的问题，通过 GGB 的绘图功能，根据图像分析就可以快速进行解决。

4.2. GGB 在证明不等式中的应用

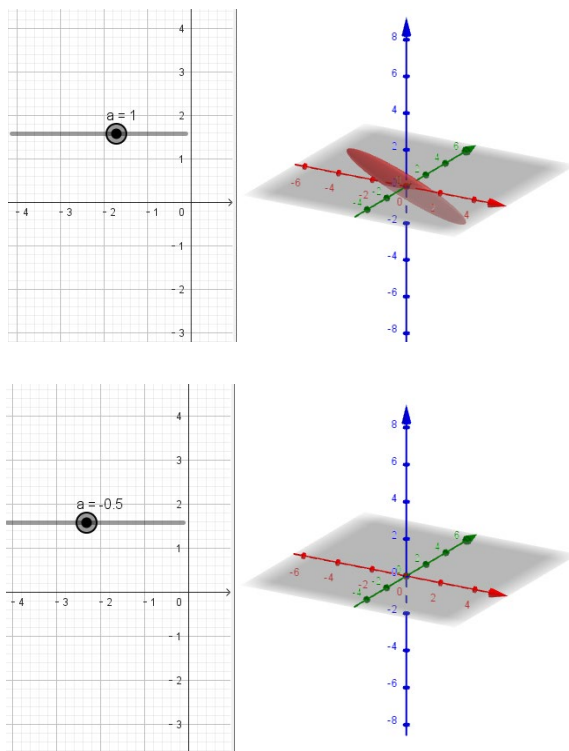
不等式问题是数学学习体系中十分重要的一部分，证明不等式的常用方法有：数学归纳法、构造法、比较法、放缩法、数形结合法、反证法、综合分析法等。GGB 也可以运用到不等式的证明中，回顾我们大学学习的高等代数中二次型正定性的相关内容，并通过查找文献[13]中二次型正定在不等式中的应用案例之后，我们将会有新的方法来证明不等式，就是利用二次型的正定性来证明不等式。

例 4.2.1 证明 $x^2 + 10y^2 + 2z^2 > 4xy - 2xz$ (其中 x, y, z 是不全为零的实数)恒成立。

解：先利用 GGB 来考虑该问题，构造函数为

$$f(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz$$

把函数的表达式输入代数区，并用滑动条 a 来命名，通过改变 a 的取值，我们直接可以看到函数图像的动态变化过程，其中截取的图形如下图所示。



可以看出当 a 取任意非正数时，如图中 $a = -0.5$ 时，该二次型是没有函数图像的，即说明函数小于等于零是不成立的，当 a 取任意正数时，如图中 $a = 1$ 时，此时函数是有函数图像的，即函数大于零是成立的，故我们可以从图像中大致看出函数的性质，即该问题已证。

也可以通过高等代数二次型的相关内容来证明该问题，

证明：我们先构造下面的二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz$ ，

把二次型对应的矩阵记为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，

该矩阵对应的各级顺序主子式分别为 $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 6 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$,

因为矩阵 A 的各级顺序主子式全大于零，从而 A 为正定矩阵，故矩阵 A 所对应的二次型 $f(x, y, z)$ 正定，从而利用正定二次型的性质就会有，对于任意不全为零的实数 x, y, z 都有 $f(x, y, z) > 0$ ，故原不等式是恒成立的。

有时候利用 GGB 作出函数图像通过函数图像的性质就可以快速地解决一些问题，比如说上面的例题一样，通过慢慢分析，构造函数，通过函数图像的动态变化过程，就可以证明一些类似的问题。

5. 结束语

本论文主要存在如下不足：对 GGB 的认识和学习的广度与深度是不够的，在论文中有许多 GGB 的内容与应用并没有涉及，比如概率模型的 3D 仿真实验、java 脚本的使用、还有许多关于经济学的内容；对应二次问题的学习和理解不够深入；对于 GGB 与二次问题的结合与应用掌握得不够透彻。

对于论文的未来展望：希望在以后的学习中能对 GGB 有更进一步的认识，学习一些 GGB 在概率统计方面、在脚本的使用方面的应用的例子，能够在更多方面了解 GGB 的使用与应用，在未来的研究生学习中对于二次问题有更加深刻的理解，能把 GGB 与二次问题的应用更加贴近现实生活。

参考文献

- [1] 俞如燕. 新课标视野下基于 GGB 软件的初中函数教学创新[J]. 新课程导学, 2022(18): 81-83.
- [2] 李琨. GeoGebra 软件在高中教学数学课堂中的应用——以“圆锥曲线”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2022(27): 25-26.
- [3] 项俊. GeoGebra 软件在高中数学教学中的应用探究[J]. 上海中学数学, 2019(4): 25-27.
- [4] 郝建秀. GeoGebra 辅助高中立体几何教学的研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2021.
- [5] 路云, 褚鹏飞. GeoGebra 软件在条件极值问题求解中的应用举例[J]. 科教导刊, 2022(21): 59-62.
- [6] 潘伟云. 探讨正定二次型的应用[J]. 吕梁学院学报, 2012, 4(2): 16-17.
- [7] 施永新. GeoGebra 软件在空间解析几何教学中的应用探析[J]. 宁德师范学院学报(自然科学版), 2018, 30(3): 330-336.
- [8] 习长新. 利用 MATLAB 表现, 空间曲面的交线[J]. 荆门职业技术学院学报, 2007, 22(9): 46-48.
- [9] 西北工业大学高等代数编写组. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [10] 杜娟. 空间解析几何理论应用与计算机实现研究[M]. 长春: 吉林出版集团股份有限公司, 2019.
- [11] 陈东升. 线性代数与空间解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [12] 华东师范大学数学科学学院, 编. 数学分析第五版下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [13] 王瑾滢, 廖小莲. 正定二次型的几个应用案例[J]. 教育现代化, 2018, 5(52): 239-241.