

柱壳法及其应用

贾屹峰

中国劳动关系学院计算机学院, 北京

收稿日期: 2025年7月8日; 录用日期: 2025年8月8日; 发布日期: 2025年8月15日

摘要

柱壳法是计算旋转体体积的重要方法之一, 而且在物理学等多个领域也具有广泛的应用。对柱壳法的原理及其应用进行系统分析, 不仅有助于学生深入理解并熟练运用该方法, 还能有效培养学生数学建模能力, 提升其运用数学知识解决实际问题的能力。更为重要的是, 这种分析能够激发学生对高等数学的学习兴趣, 为他们进一步学习数学知识提供动力。

关键词

柱壳法, 旋转体, 元素法

Cylindrical Shell Method and Its Application

Yifeng Jia

School of Computer Science, China University of Labor Relations, Beijing

Received: Jul. 8th, 2025; accepted: Aug. 8th, 2025; published: Aug. 15th, 2025

Abstract

Cylindrical shell method is one of the important methods for calculating the volume of a body of revolution, and it is also widely used in many fields such as physics. A systematic analysis of the principle and application of the cylindrical shell method not only helps students to deeply understand and skillfully apply the method, but also effectively cultivates students' mathematical modeling ability and improves their ability to use mathematical knowledge to solve practical problems. More importantly, this analysis can stimulate students' interest in learning advanced mathematics and provide motivation for them to further learn mathematical knowledge.

Keywords

Cylindrical Shell Method, Body of Revolution, Element Method



1. 引言

旋转体体积计算是定积分应用的重要内容，而柱壳法作为一种重要求解方法，具有独特的理论价值和实践意义[1]。该方法对以下两种情形展现出显著优势：其一。当旋转轴与积分变量垂直时；其二，当需要借助反函数确定边界方程时。与传统的切片法相比[2]，柱壳法能有效简化积分运算。从几何角度来看，该方法采用薄圆柱壳作为体积元素，特别适用于处理径向分布不均匀的旋转体问题，如半径变化剧烈或横向延伸范围较大的情形。通过沿横向维度进行积分运算。柱壳法能大幅降低计算复杂度，提高求解效率。

柱壳法的应用领域十分广泛：在几何学中，它不仅可用于计算旋转体体积，还能求解旋转体的侧面积；在物理学领域，柱壳法的应用更为广泛，涉及流体动力学中的流速计算[3]、刚体力学中的转动惯量求解[4]，以及电磁场理论、热传导分析等多个重要研究方向。

然而值得关注的是，在当前高等数学的教学体系中，柱壳法尚未获得应有的重视。该方法仅以课后习题的形式用于计算旋转体的体积[2]，缺乏系统的理论阐述和实际应用示范。这种教学安排不仅削弱了学生对元素法统一性的理解，也不利于培养他们的跨学科应用能力。因此，有必要重新审视柱壳法的教学价值，深入探讨其原理及应用，以帮助学生全面掌握这一方法，进而提升其跨学科应用能力。

2. 柱壳法的理论基础

本柱壳法是一种专门用于处理与旋转体相关问题的数学方法，是元素法的一种特殊应用形式。作为元素法在旋转体问题中的具体实现，该方法不仅适用于旋转体的体积、侧面积等几何量的计算，还可广泛应用于与旋转体相关的物理量的求解。

其数学原理可表述为：将旋转体沿轴向分割为无限多个同轴薄圆柱壳(空心圆柱壳)，将目标量表示为各微元柱壳对应量的积分和。具体实施过程严格遵循微积分的基本步骤：分割→近似→求和→取极限。

以曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a, x = b (0 < a < b)$ 与 x 轴所围平面区域绕 y 轴旋转形成的旋转体为例(见图 1 所示)，设所求量为 U ，其计算过程可严格表述为：

分割：将区间 $[a, b]$ 划分为 n 个子区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ，其中 $x_0 = a, x_n = b$ 。对应旋转体被分割为 n 个薄圆柱壳，每个薄圆柱壳上的部分目标量记为 ΔU_i ，则

$$U = \sum_{i=1}^n \Delta U_i$$

近似：部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $g(\xi_i) \Delta x_i$ ，即

$$\Delta U_i \approx g(\xi_i) \Delta x_i$$

其中函数 $g(x)$ 是与母线方程 $y = f(x)$ 相关的径向分布函数， ξ_i 是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任一点。

求和：

$$U = \sum_{i=1}^n \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

取极限：当分割无限细化时，得到定积分表达式

$$U = \int_a^b g(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

在实际应用中, 关键在于确定合适的微元表达式 $dU = g(x)dx$ 。需要特别说明的是, 图 1 中阴影部分并不总是看作薄圆柱壳, 有时需要被视为圆台模型进行更精确的近似。

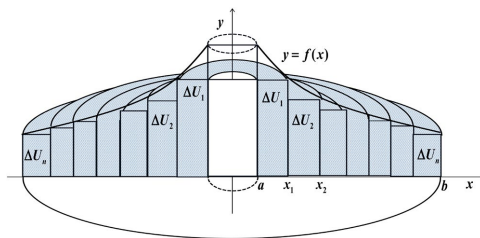


Figure 1. Shell method
图 1. 柱壳法

3. 柱壳法在几何学中的应用

3.1. 计算旋转体体积

定理 1. (绕 y 轴旋转体积公式) 设平面区域连续曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴围成, 见图 2, 其中 $0 \leq a < b$ 。则该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx \quad (1)$$

证明: 任取小区间 $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$, 设该区间对应的曲边梯形绕 y 轴所形成的旋转体体积 ΔV 。由积分中值定理, 存在 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 使得该区间上曲边梯形的面积等于以区间长度为底, 高为 $f(\xi)$ 的矩形(见图 2 中阴影部分)的面积。将该阴影矩形绕 y 轴旋转形成一个柱壳体(见图 3 中阴影部分), 则 ΔV 的近似值等于该柱壳体的体积, 即:

$$\Delta V \approx \left[\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2 \right] f(\xi) = 2\pi x f(\xi) \Delta x + \pi f(\xi) (\Delta x)^2$$

由于 $\pi f(\xi) (\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小, 且 $f(\xi) \rightarrow f(x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 因此体积元素为

$$dV = 2\pi x f(\xi) dx$$

因此平面区域绕 y 轴所得旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

证毕。

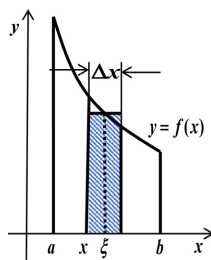


Figure 2. Integral mean value theorem
图 2. 积分中值定理

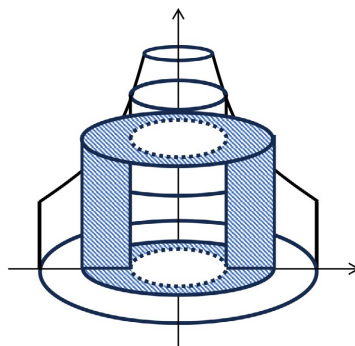


Figure 3. Shell method for volumes of revolution

图 3. 柱壳法计算旋转体体积

定理 2. (绕 x 轴旋转体积公式) 设平面区域连续曲线 $x = g(y)$ 及直线 $y = c, y = d$ 与 y 轴围成, 其中 $0 \leq c < d$ 。则该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_x = 2\pi \int_a^b y f(y) dy \quad (2)$$

应用示例

例 1. 求曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴所围区域绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

解: 为了比较柱壳法与切片法孰优孰劣, 我们分别用两种方法求解该例题。

(1) 柱壳法: 平面图形见图 4 所示。直接利用公式(1):

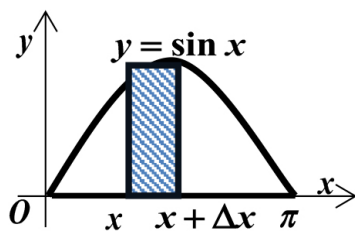
$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = 2\pi^2$$

(2) 切片法: 旋转体可以看成是曲线 $x = \arcsin y$ 与 x 轴围成的平面图形与曲线 $x = \pi - \arcsin y$ 与 x 轴围成的平面图形(见图 5)分别绕 y 轴旋转而成旋转体体积之差, 因此

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy \\ &= \left[y \arcsin^2 y + 2(\sqrt{1-y^2} - y) \arcsin y + (\pi^2 - 2\pi)y \right]_0^1 - \left(y \arcsin^2 y + 2\sqrt{1-y^2} \arcsin y - 2y \right)_0^1 \\ &= \left(\frac{\pi^3}{4} + 2\pi^2 - 2\pi \right) - \left(\frac{\pi^3}{4} - 2\pi \right) \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

切片法的积分过程涉及反三角函数平方的积分, 计算过程较为复杂。

比较两种解法可见, 柱壳法不仅公式简洁, 计算过程也更为简便, 充分体现了其在求解此类旋转体体积问题中的优势。

Figure 4. Shell method for volumes of solid generated by $y = \sin x$ revolving y axis图 4. 柱壳法求 $y = \sin x$ 绕 y 轴旋转体体积

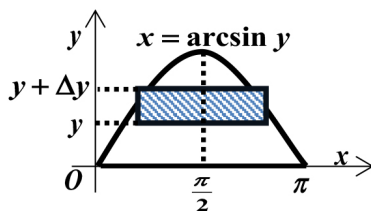


Figure 5. Disk method for volumes of solid generated by $y = \sin x$ revolving y axis

图 5. 圆盘法求 $y = \sin x$ 绕 y 轴旋转体体积

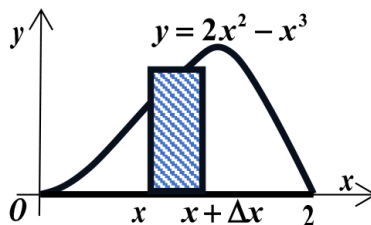


Figure 6. Shell method for volumes of solid generated by $y = 2x^2 - x^3$ revolving y axis

图 6. 柱壳法求 $y = 2x^2 - x^3$ 绕 y 轴旋转体体积

例 2. 求曲线 $y = 2x^2 - x^3$ 与 x 轴所围区域绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

解：平面区域见图 5，解方程 $2x^2 - x^3 = 0$ 可得与 x 轴交点为 $(0,0)$ 和 $(0,2)$ ，由公式(1)

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx = \frac{16}{5}\pi$$

由于 $y = 2x^2 - x^3$ 反函数的求解极其复杂，切片法难以实施，而柱壳法则可避免这一问题，使计算更加简便。

3.2. 计算旋转体侧面积

定理 3. 设平面区域由连续曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴围成，见图 7，其中 $0 \leq a < b$ 。该平面区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3)$$

证明：任取小区间 $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$ ，该区间对应柱壳(见图 7 阴影部分)在旋转体侧面截下一条狭带(见图 8 阴影部分)。当 Δx 很小时，狭带的面积 ΔA 近似等于上半径为 x ，下半径为 $x + \Delta x$ ，母线长为 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的圆台的侧面积，见图 7，即：

$$\Delta A \approx \pi [(x + \Delta x) + x] \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \pi [2x + \Delta x] \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

进一步化简得

$$\Delta A \approx \pi [2x + \Delta x] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

由于

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

因此，侧面积的面积元素为

$$dA = 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

从而，平面区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

证毕。

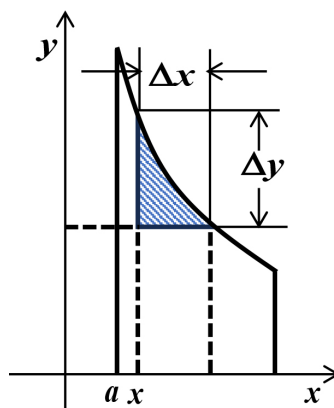


Figure 7. Differential triangle
图 7. 微分三角形

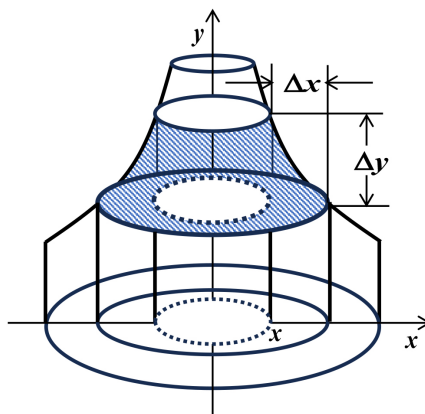


Figure 8. Shell method for area of a surface of revolution
图 8. 柱壳法计算旋转体侧面积

例 3. 求曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ ，直线 $y = 1$ 与 y 轴围成的图形(见图 9)绕 y 轴旋转一周所得旋转体的侧面积。

解：与例 1 类似，我们分别采用柱壳法和切片法这两种方法求解侧面积。

(1) 柱壳法：见图 9 所示，旋转体可视为由 $x \in [0, 1]$ 区间内的曲线绕 y 轴旋转形成。由于 $y = x^2$ ， $y' = 2x$ ，代入公式(3)可得：

$$A = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{6} (1 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \pi$$

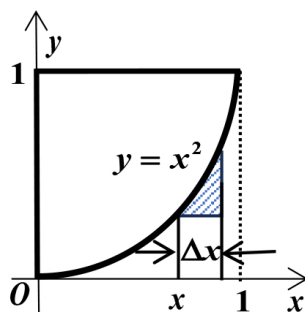


Figure 9. Shell method for area of surface generated by $y = x^2$ revolving y axis

图 9. 柱壳法求 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转体的侧面积

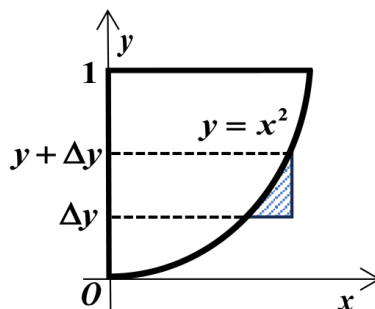


Figure 10. Disk method for area of surface generated by $y = x^2$ revolving y axis

图 10. 切片法求 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转体的侧面积

(2) 切片法：切片法计算侧面积的公式为[5]：

$$A = 2\pi \int_a^b f(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (4)$$

见图 10 所示，将旋转体沿 y 轴方向切片平面图形。由 $y = x^2$ 可得 $x = \sqrt{y}$ ，则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ，带入(4)式有

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4y} dy = \frac{\pi}{6} (1 + 4y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \pi$$

两种方法计算结果一致。但柱壳法的积分过程更为简洁，体现了其在处理此类问题时的优势。

4. 柱壳法在物理学中的应用

4.1. 泊肃叶定律

泊肃叶定律最早由法国生理学家泊肃叶于 1842 年在研究血液流动时提出，后由德国科学家魏德曼于 1852 年完成理论推导。该定律描述了不可压缩粘性流体在水平圆管中的稳态层流运动。

考虑不可压缩粘性流体(如血液)在半径为 R 、长度为 L 的水平圆柱形管道中的自左向右流动，见图 11。由于粘滞阻力的作用，流速 $v(r)$ 随半径 r 变化，在管壁处流速为零，即 $v(R) = 0$ ；最大流速出现在管轴中心，即 $r = 0$ 。在半径为 r 的圆柱面上，受到的粘滞阻力为

$$f = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

其中 η 为粘滞系数；负号是因为粘滞阻力的方向与流速 v 的方向相反。为了维持流动，液体两端必须有压强差，在半径 r 处产生的压力差为

$$F_2 = (P_1 - P_2) \pi r^2$$

在稳定流动时，液体水平方向所受合力为零，即

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

整理可得

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r dr$$

上式两边积分，可得

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + C$$

当 $r = R$ 时 $v = 0$ ，因此 $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2$ ，最终得到速度的径向分布

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

由上述速度分布方程可知，流体速度 v 具有以下重要特征：流速分布不随时间变化；流体呈现分层流动状态，这种流速分布导致不同半径处的流体具有不同的运动状态，相同半径圆柱面上流速相等，见图 11。因此流量计算必须采用柱壳法。假设在半径为 r ，厚度为 dr 的柱壳内，液体的流速是均匀的，并且等于半径为 r 的层面上的流速，见图 12。那么该柱壳内的流量(即流量元素)可以表示为

$$dQ = v \cdot 2\pi r dr = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L} (R^2 r - r^3) dr$$

通过该柱壳层的体积流量为

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L} (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L}$$

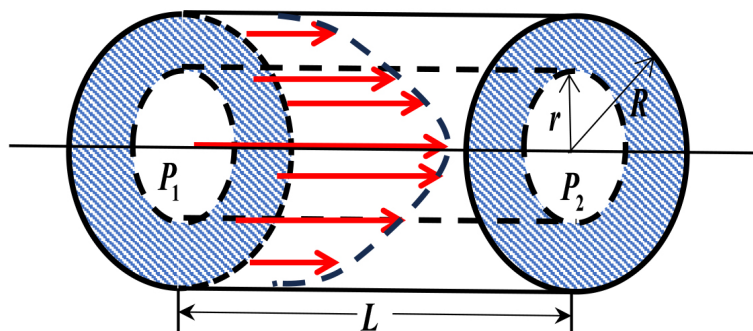


Figure 11. Velocity distribution

图 11. 流速分布

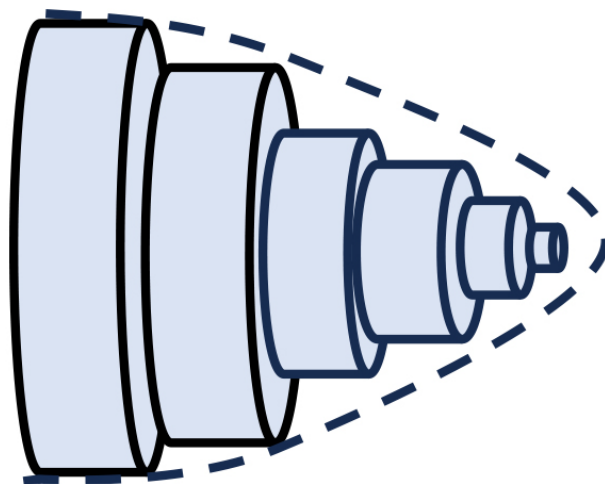


Figure 12. Shell method for volumetric flow rate

图 12. 柱壳法计算流速

综上所述，可得哈根 - 泊肃叶定律：在刚性水平圆管内，不可压缩的层流粘性液体的流量与圆管两端的压强差成正比，与圆管半径的四次方成正比，与圆管的长度成反比。

4.2. 刚体转动惯量的柱壳法计算

在物理学中，质量为 M 的质点绕与其距离为 r 的轴旋转时，其转动惯量为：

$$I = r^2 M$$

对于刚体而言，由于其由无数个质点组成，因此需要通过积分来计算其转动惯量：

$$I = \int_0^R r^2 dM \quad (6)$$

其中 dM 是质量元素， r 是质量元素 dM 到旋转轴的距离。

例 4. 求密度为 ρ 的均匀球对于过球心的一条轴的转动惯量。

解：取球心为坐标原点，将旋转轴 l 作为 z 轴。设球的半径为 a ，则球的方程为：

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

图 13 展示了球在第一卦限的部分。以 z 轴为中心，将球分割成无数个薄圆柱壳， x 轴上的区间 $[0, a]$ 也相应地被分割为无数个小区间。任取一小区间 $[x, x+dx] \subset [0, a]$ ，该区间对应的柱壳的半径为 x ，厚度为 dx ，高为 $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ ，则其体积为

$$dv \approx 2\pi x \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

因此，对应柱壳的质量为

$$dM = \rho dv \approx 2\pi \rho x \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

从而转动惯量元素

$$dI = x^2 dM = 2\pi \rho x^3 \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

于是，由对称性，球的转动惯量 $I = 2 \int_0^a dI = 4\pi \int_0^a \rho x^3 \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 = \frac{2}{5} M a^2$ 其中 $M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ 是球的质量。

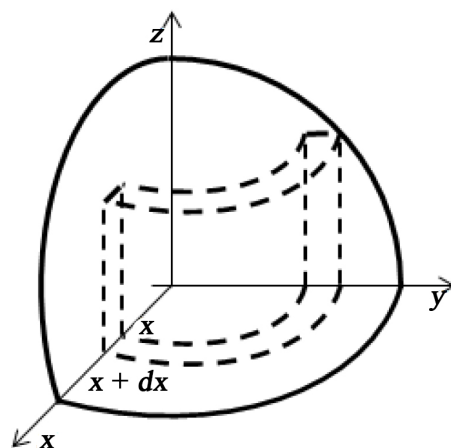


Figure 13. Shell method for moment of inertia

图 13. 柱壳法计算转动惯量

注：该例题源自文献[2]第 168 页的例 6，其中使用三重积分中的球坐标系来计算球的转动惯量，属于选讲内容。显然，利用柱壳法计算转动惯量比文献[2]中使用三重积分的方法更为简洁高效。

柱壳法不只用于流体力学和转动惯量，还在电磁学、热力学、引力场等多个领域有着广泛的应用。

5. 结论

柱壳法作为一种重要的积分应用方法，具有极为广泛的适用性。它不仅在几何领域中用于计算旋转体的体积和侧面积，还在物理学中用于计算转动惯量、液体流量等。此外，在电磁学、热力学、引力场等多个领域，柱壳法也发挥着重要作用。

柱壳法的优势在于其广泛的适用性和灵活性。它不仅适用于几乎所有标准的旋转体，还能有效处理由形状不规则或边界复杂的平面区域旋转而成的旋转体。由于无需求解反函数，柱壳法可以显著简化计算过程，甚至将复杂的三重积分简化为单积分，从而提高计算效率。

然而，柱壳法并非旨在取代其他计算方法，而是与其他方法相互补充，丰富了数学计算的工具箱。在实际应用中，柱壳法可以与其他方法结合使用，以进一步提升计算效率和准确性。

在高等数学教学中，柱壳法不仅有助于培养学生的空间想象力，还能在解决实际问题、提高数学建模能力以及理解物理现象等方面发挥重要作用。它为学生提供了一种直观且高效的方法，帮助他们更好地掌握复杂的数学和物理概念。

基金项目

中国劳动关系学院 2025 年教育教学改革项目(JG25068)。

参考文献

- [1] Varberg, D., Purcell, E.J. and Rigdon, S.E. (2014) Calculus Early Transcendentals. First Edition, Pearson Education Limited.
- [2] 同济大学数学系. 高等数学(上下册) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [3] 梁励芬, 蒋平. 大学物理简明教程[M]. 第 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2011.
- [4] 崔薇薇. 定积分“元素法”在求转动惯量时的运用[J]. 数学学习, 1995(4): 36-39.
- [5] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(上下册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.