

一类向量变分不等式解的存在性研究

张琦霞

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年7月14日; 录用日期: 2025年8月8日; 发布日期: 2025年8月15日

摘要

向量变分不等式作为重要的数学工具, 在交通、能源与资源调度等领域中具有广泛应用。本文针对一类有限维空间上的经典向量变分不等式, 借助KKM原理证明了在不同条件下其解的存在性, 并将该模型应用于城市地铁多线路调度优化问题。

关键词

向量变分不等式, KKM原理, 存在性

Existence of Solutions for a Class of Vector Variational Inequalities

Qixia Zhang

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Jul. 14th, 2025; accepted: Aug. 8th, 2025; published: Aug. 15th, 2025

Abstract

The vector variational inequality, as an important mathematical tool, has found wide applications in fields such as transportation, energy, and resource scheduling. This paper investigates a class of classical vector variational inequalities defined in finite-dimensional spaces. By employing the KKM principle, we establish the existence of solutions under various conditions. Furthermore, we apply the proposed model to optimize the scheduling of multiple lines in an urban subway system.

Keywords

Vector Variational Inequality, KKM Principle, Existence



1. 引言

1.1. 研究背景

变分不等式是优化理论和非线性分析中的重要课题。1933 年, Signorini [1] 在研究线性弹性体和刚性体的无摩擦问题时, 首次导出了变分不等式问题。1966 年, Stampacchia 等 [2] 首次在有限维空间中提出了第一个变分不等式, 称为 Hartman-Stampacchia 变分不等式, 该形式的变分不等式是指: 寻找 $x^* \in K$, 满足

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in K$$

其中 $F: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个映射, K 是 $\mathbb{R}^n$ 空间上的非空闭凸子集。此后经众多学者的研究、拓展、创新和延伸, 变分不等式进一步发展。

向量变分不等式作为变分不等式的重要分支, 其概念始于 1980 年, Giannessi [3] 在有限维欧式空间首次引入: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续向量值映射, C 是 $\mathbb{R}^m$ 中闭凸锥, 找到 $x^* \in K$ 使得

$$F(u)^T(v-u) \notin -\text{int } C, \forall v \in K$$

其中 $\text{int } C$ 是锥 C 的内部。此后, 大量学者对向量变分不等式开展了广泛而深入的研究。

向量变分不等式解的存在性是所研究的基本问题之一。1992 年, Chen [4] 在凸假设下研究了向量变分不等式解的存在性, 并对一类特殊的向量变分不等式, 在不考虑凸性的假设条件下, 得到了向量变分不等式解的存在性。2001 年, Chen 等学者 [5] 研究了在凸锥拟函数假设下的两种广义向量变分不等式, 利用非标准化方法和不动点定理, 得到了向量变分不等式的存在性。2005 年, Li 等学者 [6] 研究了一类具有广义向量变分不等式解的存在性。

向量变分不等式不仅在理论层面丰富了变分不等式与多目标优化之间的联系, 更为复杂系统中的冲突目标建模提供了统一框架。通过引入锥偏序结构, 向量变分不等式能够自然刻画多个目标函数之间不可比的偏好关系, 尤其适用于多目标决策、非合作博弈与资源调度等问题, 具体参见 [7]-[9]。在多目标优化与决策分析问题中, 决策者往往需要权衡多个相互冲突的目标, 如成本最小化、效率最大化、公平性等。向量变分不等式可通过引入偏序关系, 将多目标优化问题转化为向量变分不等式, 从而寻找非支配解。博弈论与均衡问题中, 常涉及多个决策者的策略交互。向量变分不等式可用于描述多主体竞争或协作下的均衡状态, 如在交通网络均衡问题中不同出行者的路径选择行为如何影响整体拥堵。

1.2. 本文主要工作

本文的主要工作是证明向量变分不等式的存在性, 并给出向量变分不等式该性质实际应用。

第一章介绍了向量变分不等式及其存在性的研究背景。

第二章给出本文用到的常用符号, 基本概念和引理。

第三章以两个定理的形式介绍向量变分不等式在不同条件下的存在性。

第四章介绍了向量变分不等式在车辆资源调度问题的实际应用。

2. 预备知识

在本文中 $\mathbb{R}^n$ 表示有限维的欧几里得向量空间, $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 空间上的范数, K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集, K 的内部和凸包分别用 $\text{int } K$ 和 $\bar{K}$ 表示, “ $\rightarrow$ ” 表示强收敛, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的双线性映射。

定义 2.2 [10]: 设 C 是向量空间 V 中的集合, 如果满足

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in C$$

则称集合 C 为锥。

定义 2.3 [10]: 若给定一个集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$, 则所有包含 C 的凸集的交集称为集合 C 的凸包, 记作 $\text{co } C$, 等价地表示为

$$\text{co } C = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

即 C 中所有有限凸组合生成的集合。

此外, 我们回顾将用于证明向量变分不等式存在性的重要结果: KKM 原理。

引理 2.4 [11]: 设 K 是 Hausdorff 拓扑向量空间 V 中的非空子集, 若 $G: K \rightarrow P(V)$ 是一个集值映射且满足如下条件:

- (1) G 是一个 KKM 映射, 即对于任意 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset K$, 其凸包 $\text{co}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G(v_i)$;
 - (2) 对任意 $v \in K$, $G(v)$ 是在 V 上的闭集;
 - (3) 对某些 $v_0 \in K$, $G(v_0)$ 是 V 上的紧集。
- 则 $\bigcap_{v \in K} G(v) \neq \emptyset$ 。

3. 向量变分不等式解的存在性

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集, $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续向量值映射, C 是 $\mathbb{R}^m$ 中闭凸锥。本文考虑如下形式的经典向量变分不等式(VVI): 找到 $x^* \in K$ 使得

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \notin -\text{int } C, \forall y \in K \quad (1)$$

下面给出关于该向量变分不等式的存在性证明。

定理 3.1: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸有界子集, $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续向量值映射, C 是 $\mathbb{R}^m$ 中具有非空内部的闭凸锥, 则存在 $x^* \in K$ 是 VVI 的一个解。

证明: 考虑集值映射 $G: K \rightarrow P(K)$ 定义如下

$$G(y) := \left\{ x \in K \mid \langle F(x), y - x \rangle \notin -\text{int } C \right\}, \forall y \in K \quad (2)$$

我们利用 KKM 原理证明解的存在性。

首先证明对于任意 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset K$, 其凸包 $\text{co}\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G(y_i)$ 。我们采用反证法证明, 假设存在 $x = \text{co}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 但 $x \notin \bigcup_{i=1}^n G(y_i)$ 。因此 x 可表示为

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

那么

$$\langle F(x), x - x \rangle = \langle F(x), \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle F(x), y_i - x \rangle = 0$$

而 $x \notin \bigcup_{i=1}^n G(y_i)$, 由(2)可知

$$\langle F(x), y_i - x \rangle \in -\text{int } C,$$

由 C 的凸性可知 $-\text{int } C$ 为凸, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle F(x), y_i - x \rangle \in -\text{int } C,$$

与 $0 \notin \text{int } C$ 矛盾, 因此条件成立。

其次证明对 $y \in K$, $G(y)$ 是在 K 上的闭集, 即对于 $G(y)$ 上任意收敛序列 $\{x_n\}$ 满足 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow x$, 有 $x \in G(y)$ 。由 $x_n \in G(y)$,

$$\langle F(x_n), y - x_n \rangle \notin -\text{int } C,$$

而根据向量值映射 F 及内积的连续性, 当 $n \rightarrow \infty$ 时下式成立

$$\langle F(x_n), y - x_n \rangle \rightarrow \langle F(x), y - x \rangle.$$

由于 C 是具有非空内部的闭凸锥, 可说明 $-\text{int } C$ 是开集, 若 $\langle F(x), y - x \rangle \in -\text{int } C$, 则存在 N 使得对 $n \geq N$ 时,

$$\langle F(x_n), y - x_n \rangle \in -\text{int } C,$$

与 $x_n \in G(y)$ 矛盾, 故 $\langle F(x), y - x \rangle \notin -\text{int } C$, 即 $x \in G(y)$, 因此条件成立。

此外, K 是有界集, 故 $G(y) \subseteq K$ 是有界集, 同时 $G(y)$ 是闭集, 因此 $G(y)$ 是紧集。

最后, 由引理 2.5 可知

$$\bigcap_{x \in K} G(y) \neq \emptyset$$

即存在 $x^* \in K$, 使得

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \notin -\text{int } C, \forall y \in K,$$

因此向量变分不等式 VVI 的解存在。

定理 3.2: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集, $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续向量值映射, C 是 $\mathbb{R}^m$ 中具有非空内部的闭凸锥, 若存在 $x_0 \in K$ 满足强制性条件, 即存在 $r > 0$, 使得对任意 $x \in K$ 当 $\|x\| > r$ 时有 $\langle F(x), x - x_0 \rangle \in \text{int } C$, 则存在 $x^* \in K$ 是 VVI 的一个解。

证明: 对于任意正数 $R > 0$, 定义有界闭凸子集:

$$K_R = K \cap \overline{B}(0, R)$$

则由定理 3.1 可知在每一个 K_R 上, 存在一个解 $x_R^* \in K_R$, 使得

$$\langle F(x_R^*), y - x_R^* \rangle \notin -\text{int } C, \forall y \in K_R \quad (3)$$

下面说明解序列 $\{x_R^*\}$ 有界, 我们利用反证法, 假设当 $R \rightarrow \infty$ 时 $\|x_R^*\| \rightarrow \infty$, 因此存在 $r > 0$, 当 $\|x_R^*\| > r$ 时, 由强制性条件可知, 存在 $x_0 \in K_R$ 满足

$$\langle F(x_R^*), x_R^* - x_0 \rangle \in \text{int } C,$$

而 $x_0, x_R^* \in K_R$, 令 $y = x_0$, 代入(3)有

$$\begin{aligned} & \langle F(x_R^*), x_0 - x_R^* \rangle \notin -\text{int } C \\ \Rightarrow & -\langle F(x_R^*), x_R^* - x_0 \rangle \notin -\text{int } C \\ \Rightarrow & \langle F(x_R^*), x_R^* - x_0 \rangle \notin \text{int } C. \end{aligned}$$

推出矛盾, 故解序列 $\{x_R^*\}$ 有界。因此存在一个子列, 我们同样记作 $\{x_R^*\}$, 它满足 $x_R^* \rightarrow x^*$, 其中 $x^* \in K$, 接着证明该极限点 x^* 是 VVI 的解, 即证明

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \notin -\text{int } C, \forall y \in K,$$

对任意的 $y \in K$, 定义 $y_R := P(y) \in K_R$, 即 y_R 为 y 在 K_R 上的投影, 使得 $y_k \rightarrow y$ 。因为 $y_R, x_R^* \in K_R$, 令 $y = y_R$, 代入(3)有

$$\langle F(x_R^*), y_R - x_R^* \rangle \notin -\text{int } C.$$

由 $x_R^* \rightarrow x^*$, $y_k \rightarrow y$ 以及 F 的连续性可推断

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \notin -\text{int } C, \forall y \in K,$$

得证。

4. 向量变分不等式的应用

在大型城市地铁系统中, 不同线路之间共享部分轨道或换乘站点, 这对车辆调度存在很大挑战, 往往需要在多个目标之间进行平衡与协调。其中出行效率与能源消耗是比较重要的一环, 可将其作为需优化的两个目标。因此, 我们在理想假设下进行理论建模, 旨在抽象出调度系统中的目标冲突与资源约束结构, 从而利用向量变分不等式理论进行解的存在性分析与均衡性刻画。

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示地铁系统中每条线路在高峰期每小时的发车频率, 其中 x_i 表示第 i 条线路在高峰期每小时安排的发车次数, 即调度频率。由于每条线路调度能力有限, 故存在发车频率上限 $x_i^{\max}$, 同时, 总系统负荷不超出阈值 R , 线路会受容量限制约束。因此可设置可行集为

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq x_i^{\max}, \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \leq R, Ax \leq b \right\},$$

其中 γ_i 表示第 i 条线路单位频率所需的资源负荷指标, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 反映线路间换乘站及区域共线情况, $b \in \mathbb{R}^m$ 表示该换乘区域的最大调度负载能力。

考虑两个调度优化目标: 首先是乘客通勤时间目标函数 $f_1(x)$; 假设乘客平均等待时间和拥挤度随发车频率 x_i 减小, 用下列凸函数近似模拟其效率损失:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{x_i + \varepsilon} + \sum_{(i,j) \in T} a_{ij} |x_i - x_j|,$$

其中 $\varepsilon > 0$, β_i 表示第 i 条线路乘客流量规模, T 表示存在换乘关系的线路, a_{ij} 表示线路不同步时引起的换乘延误代价。其次是系统总能量消耗目标函数 $f_2(x)$, 假设单位调度消耗能量 p_i , 则

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i,$$

于是构造向量目标函数 $F: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ 定义如下

$$F(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{x_i + \varepsilon} + \sum_{(i,j) \in T} a_{ij} |x_i - x_j| \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \end{pmatrix}.$$

综合上述形式, 我们需要找到一个最优调度 x^* , 使得

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \notin -\text{int } \mathbb{R}_+^2, \quad \forall y \in K,$$

该最优调度即为向量变分不等式的解。而在此问题中, 我们所做假设均满足定理 3.1 的条件, 因此存在一个最优调度 x^* 。

参考文献

- [1] Signorini, A. (1933) Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*, **2**, 231-251.
- [2] Hartman, P. and Stampacchia, G. (1966) On Some Non-Linear Elliptic Differential-Functional Equations. *Acta Mathematica*, **115**, 271-310. <https://doi.org/10.1007/bf02392210>
- [3] Giannessi, F. (1980) Theorems of Alternative, Quadratic Programs and Complementarity Problems. *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, **1**, 151-186.
- [4] Chen, G.Y. (1992) Existence of Solutions for a Vector Variational Inequality: An Extension of the Hartmann-Stampacchia Theorem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **74**, 445-456. <https://doi.org/10.1007/bf00940320>
- [5] Chen, C.Y., Goh, C.J. and Yang, X.Q. (2001) Existence of a Solution for Generalized Vector Variational Inequalities. *Optimization*, **50**, 1-15. <https://doi.org/10.1080/02331930108844550>
- [6] Li, J. and He, Z. (2005) Gap Functions and Existence of Solutions to Generalized Vector Variational Inequalities. *Applied Mathematics Letters*, **18**, 989-1000. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.06.029>
- [7] 陈光亚. 向量变分不等式及其在多目标最优化中的应用[J]. 科学通报, 1988(8): 561-563.
- [8] 李声杰, 陈光亚. 多类物流, 双指标的交通网络平衡问题与向量变分不等式[J]. 系统工程理论与实践, 2008(1): 141-145.
- [9] Chen, G., Huang, X. and Yang, X. (2005) *Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis*. Springer.
- [10] Boyd, S.P. and Vandenberghe, L. (2004) *Convex Optimization*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441>
- [11] Fan, K. (1984) Some Properties of Convex Sets Related to Fixed Point Theorems. *Mathematische Annalen*, **266**, 519-537. <https://doi.org/10.1007/bf01458545>