

一类具有Holling III-II功能函数的三种群模型的余维二Bogdanov-Takens分岔研究的余维二Bogdanov-Takens分岔研究

陈玉明

赣南师范大学, 数学与计算机科学学院, 江西 赣州

收稿日期: 2025年7月15日; 录用日期: 2025年8月12日; 发布日期: 2025年8月20日

摘要

针对一类Leslie型三种群食物链模型, 分析了该模型的余维二Bogdanov-Takens分岔行为。假设猎物满足Logistic增长速率, 捕食者种群通过Holling III功能反应吃掉猎物, 而超级捕食者种群则通过Holling II功能反应吃掉捕食者。首先, 给出了保证系统具有正平衡点的条件, 及在该正平衡点发生Bogdanov-Takens分岔的参数条件; 其次, 选取了满足上述条件的适当参数, 对Bogdanov-Takens分岔的非退化条件及正则性条件分别进行了验证; 最后, 通过数值仿真, 对Bogdanov-Takens平衡点进行了参数扰动, 获得了分岔后的不同动力学行为。

关键词

Bogdanov-Takens分岔, 三种群模型, Leslie型系统

Research on Bogdanov-Takens Bifurcation of a Tritrophic Model with Holling III-II Functional Responses

Yuming Chen

Department of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi

Received: Jul. 15th, 2025; accepted: Aug. 12th, 2025; published: Aug. 20th, 2025

Abstract

For a class of Leslie type tritrophic food chain models, the codimension-2 Bogdanov-Takens bifurcation behavior of the model was analyzed. Suppose the prey follows the Logistic growth rate,

the predator population feeds on the prey through the Holling III functional response, while the superpredator population feeds on the predator through the Holling II functional response. Firstly, the conditions for ensuring that the system has a positive equilibrium point are given, as well as the parameter conditions for the Bogdanov-Takens bifurcation to occur at this positive equilibrium point. Secondly, appropriate parameters that meet the above conditions were selected, and the non-degenerate condition and regularity condition of the Bogdanov-Takens bifurcation were verified respectively. Finally, through numerical simulation, parameter perturbation was studied on the Bogdanov-Takens equilibrium point, and different dynamic behaviors were bifurcated.

Keywords

Bogdanov-Takens Bifurcation, Tritrophic Model, Leslie-Type System

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在捕食者 - 猎物微分系统中, Leslie 型系统[1] [2]很好地提供了一个模型, 使得人们可以借此研究具有生态或生物学意义的多种动力学行为。这种微分系统的特征如下: 具有密度 x 的猎物种群, 在没有捕食者种群的情况下, 具有承载量 R 和增长率 ρ 的 Logistic 增长速率。此外, 在这个系统中还有一个具有密度 y 的捕食者种群, 其增长率为 s , 并通过功能反应 $f(x)$ 来吃掉猎物, 它的承载能力与猎物的种群密度成正比, 比例常数 α 衡量猎物转化为捕食者的食物量。Leslie 型系统具有如下的形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x \left(1 - \frac{x}{R}\right) - yf(x), \\ \dot{y} = sy \left(1 - \frac{y}{\alpha x}\right). \end{cases} \quad (1.1)$$

另一方面, 为了尝试分析捕食者 - 猎物系统的全局稳定性, 其中一条思路就是, 研究该系统是否有可能具有正平衡点, 并在这个正平衡点上, 该系统经历了一个非退化的余维二 Bogdanov-Takens 分岔(在本文接下来的表述中, 这个非退化分岔将用 BT 分岔表示)。一个 BT 平衡点可能是鞍点、结点、鞍结点、中心平衡点、焦点及退化平衡点, 也可能是中心流形由一个椭圆扇形、一个双曲扇形构成的一类平衡点[3] [4]。在 BT 平衡点附近可能产生一个周期解, 并且一个全局的鞍型同宿分岔可能会摧毁这个周期解并且产生一个连结这个 BT 平衡点的同宿轨, 从而导致系统动力学行为可能通向混沌[3]。

基于含参中心流形理论及规范型理论, 上述系统(1.1)的正平衡点处的 BT 分岔已经被很多的研究者们进行了细致地研究。通过考虑广义的 Holling III 型功能函数 $f(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$, 其 $a > 0, b > -2\sqrt{a}$,

文献[5]证明了系统(1.1)的正平衡点存在 BT 分岔现象。文献[2]也证明了系统(1.1)存在 BT 分岔行为, 其考虑的 $f(x)$ 为 Holling IV 型功能函数; 在此基础上, 文献[6]进一步研究了系统(1.1)正平衡点处的余维三退化 BT 分岔行为。另一方面, 文献[7]分析了一类非线性平面控制系统, 并且证明了存在一种标量控制方法, 使得能够实现可控的 BT 分岔。

基于上述关于两种群 Leslie 型捕食者 - 猎物系统(1.1)的研究, 本文将研究如下具有 Holling III-II 功能函数的 Leslie 型捕食者 - 猎物系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\rho \left(1 - \frac{x}{R} \right) - \frac{a_1 xy}{b_1 + x^2} \right), \\ \dot{y} = y \left(s_1 \left(1 - \frac{y}{\alpha_1 + \beta_1 x} \right) - \frac{a_2 z}{b_2 + y} \right), \\ \dot{z} = z s_2 \left(1 - \frac{z}{\alpha_2 + \beta_2 y} \right). \end{cases} \quad (1.2)$$

其中, x 表示猎物的种群密度, y 表示捕食者的种群密度, 而 z 则表示超级捕食者的种群密度。假设捕食者的种群容量线性依赖于猎物的种群密度, 而超级捕食者的种群容量以二次函数形式依赖于捕食者的种群密度, 且系统参数 $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, s_1, s_2, \rho$ 及 R 都是正参数。基于生态原因的考虑, 相变量 (x, y, z) 被限制在如下三维空间的第一卦限 Ω 中,

$$\Omega = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

在三种群模型的 BT 分岔研究方面, 文献[8]及[9]分别研究了一类 Leslie 型及 Kolmogorov 型三种群模型正平衡点处的 BT 分岔。由于系统含有大量的参数, 并且模型本身的非线性程度高, 为了简化计算, 文献[8][9]在处理系统正平衡点时均增加了额外的参数条件, 从而较少可自由变化的参数数量, 这也是多数种群模型在处理正平衡点存在性时常用的做法。

在第 2 节中, 本文将给出系统(1.2)具有正平衡点的参数条件, 在此基础上, 进一步地对正平衡点处发生的 BT 分岔进行了细致地分析。为了本文的完整性, 在第 3 节中给出了关于 BT 分岔的相关定理, 其中包含 BT 分岔的非退化条件及正则性条件等。最后在第 4 节中, 通过数值仿真, 对 BT 平衡点进行了参数扰动, 发现在不同的参数扰动下, 该系统在平衡点附近呈现出两种不同动力学行为。

2. 正平衡点及其 BT 分岔分析

为了在区域 Ω 内讨论系统(1.2)的正平衡点的存在性, 我们给出如下定理:

定理 2.1: 点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ 是系统(1.2)的正平衡点, 当且仅当如下条件成立:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{(R - x_0)(b_1 + x_0^2)\rho}{a_1 R x_0}, \\ z_0 = \alpha_2 + y_0 \beta_2, \\ s_1 = s_{10} \end{cases}$$

其中 $0 < x_0 < R$, 及

$$s_{10} = \frac{a_1 a_2 R x_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1) (a_1 R x_0 \alpha_2 + (R - x_0)(b_1 + x_0^2) \beta_2 \rho)}{(a_1 R x_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1) - (R - x_0)(b_1 + x_0^2) \rho) (a_1 b_2 R x_0 + (R - x_0)(b_1 + x_0^2) \rho)} > 0.$$

证明: 系统(1.2)的平衡点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 是使得方程右端向量场恒为零的点。基于系统相变量及参数变量均为正数的这一事实, 由系统(1.2)的第一个方程右端等于零可知

$$y_0 = \frac{(R - x_0)(b_1 + x_0^2)\rho}{a_1 R x_0},$$

由系统(1.2)的第三个方程右端等于零可知 $z_0 = \alpha_2 + y_0 \beta_2$ 。

最后, 将所得的 y_0 及 z_0 的上述表达式代入系统(1.2)第二个方程的右端, 并通过令其为零, 可解得参数 $s_1 = s_{10}$, 由于参数 s_1 为正参数, 从而还需满足条件 $s_{10} > 0$ 。

所谓的 BT 分岔平衡点, 是指该平衡点处具有一对零特征值 $\lambda_{1,2} = 0$, 而其余特征值均具有非零实部。在接下来的定理中, 我们将详细地讨论系统(1.2)的正平衡点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 成为 BT 平衡点所需要满足的参数条件。由于系统具有较多的参数, 导致计算后的表达式非常复杂, 为了简化所得的表达式, 现特引入如下的记号 $t_i (i = 0, \dots, 9)$:

$$\begin{aligned} t_0 &= b_1 R + x_0^2 (-R + 2x_0), \quad t_1 = (R - x_0)(b_1 + x_0^2)\rho, \quad t_2 = a_1 R x_0 \alpha_2 + t_1 \beta_2, \quad t_3 = a_1 b_2 R x_0 + t_1, \\ t_4 &= a_1 R x_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1) - t_1, \quad t_5 = R \alpha_1 + 2R x_0 \beta_1 - x_0^2 \beta_1, \quad t_6 = -R \alpha_1 + 2x_0 \alpha_1 + x_0^2 \beta_1, \\ t_7 &= \alpha_1 R x_0 \left(b_1 \left(-R(\alpha_1 + x_0 \beta_1)^2 + b_2 t_5 \right) + x_0^2 \left((R - 2x_0)(\alpha_1 + x_0 \beta_1)^2 + b_2 t_6 \right) \right) \\ &\quad + t_1 \left(b_1 (2R \alpha_1 + 3R x_0 \beta_1 - x_0^2 \beta_1) + x_0^2 (-R(2\alpha_1 + x_0 \beta_1) + x_0(4\alpha_1 + 3x_0 \beta_1)) \right), \\ t_8 &= -a_1^2 b_2 R^2 x_0^2 t_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1)^2 - a_1 b_2 R (R - x_0) x_0^2 (b_1 + x_0^2) \beta_1 t_1 - t_1^2 (x_0^2 t_6 + b_1 t_5), \\ t_9 &= a_1^2 b_2 R^2 x_0^2 t_0^2 (\alpha_1 + x_0 \beta_1)^2 + t_0 (x_0^2 t_6 + b_1 t_5) t_1^2 \\ &\quad - a_1 R (R - x_0)^2 x_0^2 (b_1 + x_0^2)^2 \beta_1 (a_2 R (b_1 + x_0^2) \alpha_2 - b_2 t_0 \rho). \end{aligned}$$

基于上述记号, 定理 2.1 中的 s_{10} 可简化为 $s_{10} = \frac{a_1 a_2 R x_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1) t_2}{t_3 t_4}$ 。

定理 2.2: 在定理 2.1 的条件下, 若系统(1.2)的参数满足 $\beta_2 = \beta_{20}$ 及 $s_2 = s_{20}$, 则正平衡点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为 BT 平衡点, 其中

$$\beta_{20} = \frac{a_1 R x_0 \alpha_2 t_7}{t_8}, \quad s_{20} = -\frac{a_1 a_2 R x_0 \alpha_2 t_0 t_1 t_7}{t_3 t_9}.$$

证明: 当系统(1.2)的参数满足定理 2.1 的条件时, 此时系统(1.2)存在正平衡点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 。系统在平衡点 P_0 处的线性化矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{t_0 \rho}{R(b_1 + x_0^2)} & -\frac{a_1 x_0^2}{b_1 + x_0^2} & 0 \\ \frac{a_2 t_1^2 \beta_1 t_2}{a_1 R x_0 (\alpha_1 + x_0 \beta_1) t_3 t_4} & \frac{a_2 t_1 (t_4 - t_3) t_2}{t_4 t_3^2} & -\frac{a_2 t_1}{t_3} \\ 0 & s_2 \beta_2 & -s_2 \end{pmatrix},$$

从而可计算得对应的特征方程 $\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$, 其中

$$\begin{aligned} c_1 &= s_2 + \frac{t_0 \rho}{R(b_1 + x_0^2)} + \frac{a_2 t_1 (t_3 - t_4) t_2}{t_4 t_3^2}, \\ c_2 &= \frac{s_2 t_0 \rho}{R(b_1 + x_0^2)} + \frac{a_2 s_2 t_1 \beta_2}{t_3} + \frac{a_2 (R - x_0) x_0 t_1 \beta_1 \rho t_2}{R(\alpha_1 + x_0 \beta_1) t_3 t_4} + \frac{a_2 s_2 t_1 (t_3 - t_4) t_2}{t_4 t_3^2} \\ &\quad + \frac{a_2 (R - x_0) t_0 \rho^2 (t_3 - t_4) t_2}{R t_4 t_3^2}, \end{aligned}$$

$$c_3 = \frac{a_2 s_2 (R - x_0) t_0 \beta_2 \rho^2}{R t_3} + \frac{a_2 s_2 (R - x_0) x_0 \beta_1 \rho t_1 t_2}{R (\alpha_1 + x_0 \beta_1) t_3 t_4} + \frac{a_2 s_2 (R - x_0) t_0 \rho^2 (t_3 - t_4) t_2}{R t_4 t_3^2}.$$

为了使得特征方程 $\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$ 具有一对零根 $\lambda_{1,2} = 0$ ，须使得系数 $c_2 = c_3 = 0$ ，从而解得参数 $\beta_2 = \beta_{20}$ ， $s_2 = s_{20}$ 。

为了接下来验证 BT 分岔的非退化条件及正则性条件的方便，特选定系统(1.2)的参数如下：

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, R = 2x_0, \beta_1 = 5, \rho = \frac{1}{x_0}, b_1 = x_0, b_2 = \frac{x_0}{2}, \quad (2.1)$$

并且还引入了一些记号 $t_j (j=10, \dots, 29)$ ，均为 x_0 的多项式函数，放置于附录中。

在上述选定的参数值(2.1)及引入的记号下，可得定理 2.1 及定理 2.2 中的临界参数 s_{10} ， β_{20} 及 s_{20} 分别为

$$s_{10} = \frac{8x_0^2(1+5x_0)^2}{t_{14}}, \quad \beta_{20} = -\frac{2x_0 t_{13}}{t_{14}}, \quad s_{20} = -\frac{2x_0(1+x_0)t_{13}}{t_{20}}. \quad (2.2)$$

本文关于 BT 分岔的理论基于文献[3]的 8.4 节。通过直接计算可得映射 \mathfrak{S} (定义见定理 3.1)关于变量 (x, y, z, β_2, s_2) 在点 $(0, 0, 0, \beta_{20}, s_{20})$ 处的 Jacobian 矩阵具有如下形式

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial (x, y, z, \beta_2, s_2)}(0, 0, 0, \beta_{20}, s_{20}) = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \triangleq M,$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_0 + x_0^2} & -\frac{x_0}{1+x_0} & 0 \\ \frac{10(1+x_0)^2}{t_{14}} & \frac{4x_0(1+5x_0)t_{10}}{(1+x_0+x_0^2)t_{14}} & -\frac{1+x_0}{1+x_0+x_0^2} \\ 0 & \frac{4x_0^2(1+x_0)t_{13}^2}{t_{14}t_{20}} & \frac{2x_0(1+x_0)t_{13}}{t_{20}} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{(1+x_0)^2 t_{13}}{t_{20}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} -\frac{t_{19}}{x_0^2(1+x_0)^2 t_{14}} & -\frac{2t_{28}}{(1+x_0)^2(1+x_0+x_0^2)^2 t_{11}t_{14}t_{16}} & \frac{2x_0 t_{25}}{(1+x_0+x_0^2)^2 t_{11}t_{16}} \\ -\frac{20x_0(1+x_0)t_{12}t_{13}}{(1+5x_0)(1+x_0+x_0^2)t_{14}t_{16}} & -\frac{8x_0^2 t_{13} t_{15}}{(1+x_0+x_0^2)^3 t_{14}t_{16}} & \frac{4x_0^3 t_{13}}{(1+x_0+x_0^2)^3 t_{16}} \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} \frac{(1+x_0)^2 t_{22}}{(1+x_0+x_0^2)^2 t_{23}} & -1 \\ \frac{2(1+x_0)t_{13}}{(1+x_0+x_0^2)^2 t_{16}} & 0 \end{pmatrix}.$$

从而可算得矩阵 M 的行列式为

$$|M| = -\frac{4x_0(1+x_0)^3 t_{13}^2 t_{17}}{(1+x_0+x_0^2)^4 t_{16}^2 t_{18}}.$$

显然, 当参数 $\beta_2 = \beta_{20}$ 及 $s_2 = s_{20}$ 时, 矩阵 A_0 恰为系统(1.2)在 BT 平衡点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处的线性化矩阵, 此时矩阵 A_0 的三个特征值分别为 $\lambda_{1,2} = 0$ 及

$$\lambda_3 = -\frac{t_{26}}{x_0(1+x_0)t_{26} - x_0^3(1+x_0)(t_{26} + t_{27})},$$

特征值 λ_3 关于 $x_0 \in (0, 5)$ 的曲线图, 如图 1 所示。

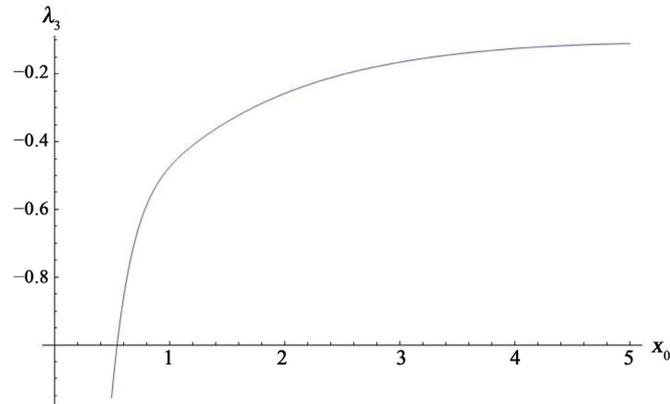


Figure 1. The graph of eigenvalue λ_3 with respect to $x_0 \in (0, 5)$

图 1. 特征值 λ_3 关于 $x_0 \in (0, 5)$ 的曲线图

经过计算, 可得矩阵 A_0 对应的广义特征向量为

$$q_0 = \left(x_0^2, -1, \frac{2x_0 t_{13}}{t_{14}} \right)^T, \quad q_1 = \left(1, -\frac{1+x_0^3+x_0^4}{x_0^2}, \frac{t_{21}}{x_0(1+x_0)t_{14}} \right)^T,$$

转置矩阵 A_0^T 对应的广义特征向量为

$$p_0 = \left(1, \frac{t_{14}(t_{26} + 20x_0^3 + (1+x_0)^5 t_{13})}{10x_0(1+x_0)^3 t_{26}}, -\frac{t_{14}t_{16}t_{27}}{20x_0^2(1+x_0)^3 t_{13}t_{26}} \right)^T,$$

$$p_1 = \left(\frac{20x_0^2(1+x_0)^4 t_{13}}{t_{26}}, \frac{2x_0(1+x_0)t_{13}t_{14}}{t_{26}}, \frac{(1+x_0)t_{14}t_{16}}{t_{26}} \right)^T,$$

从而, 根据公式(3.3)可计算得

$$a_0 = -\frac{2x_0^3(1+x_0)^2 t_{24}}{(1+5x_0)(1+x_0+x_0^2)t_{26}}, \quad b_0 = -\frac{x_0 t_{29}}{5(1+x_0)^2(1+5x_0)(1+x_0+x_0^2)t_{26}}.$$

注意到记号 t_{14} 恒大于零, 因此综合上述计算结果及下一节关于 BT 分岔的相关定理 3.1, 可得如下关于系统(1.2)在平衡点 P_0 处的 BT 分岔定理:

定理 2.3: 在参数条件(2.1)下, 当 x_0 使得 $t_{11} \neq 0$, $t_{13} < 0$, $t_{16} \neq 0$, $t_{18} \neq 0$, $t_{20} > 0$, $t_{23} \neq 0$ 及 $t_{26} \neq 0$, 其余系统参数 $s_1 = s_{10}$, $\beta_2 = \beta_{20}$ 及 $s_2 = s_{20}$ 满足条件(2.2)时, 系统(1.2)将在其正平衡点

$P_0 = \left(x_0, \frac{1+x_0}{2x_0}, 1 + \frac{(1+x_0)\beta_{20}}{2x_0} \right)$ 处发生余维二的 BT 分岔。

首先,注意到条件(2.2)中的参数 s_{10} 对任意的 $x_0 > 0$ 均恒大于零,为了说明满足条件(2.2)的参数 β_{20} 及 s_{20} 确实能取到正值,特绘制了如下关于 $x_0 \in (0,5)$ 的曲线图,如图 2 所示。

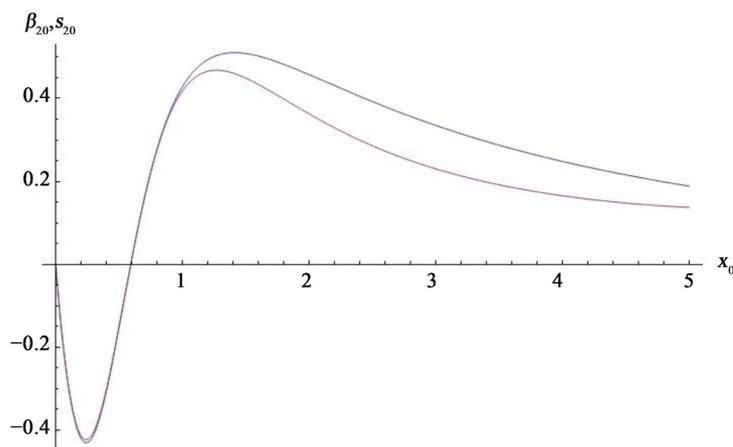


Figure 2. The graph of parameters β_{20} and s_{20} with respect to $x_0 \in (0,5)$

图 2. 参数值 β_{20} 及 s_{20} 关于 $x_0 \in (0,5)$ 的曲线图

3. 关于 BT 分岔的相关定理

本节的 BT 分岔相关定理参考自文献[3]的 8.4 节。

令 $F(x, \mu)$ 为定义在空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ 中某个开集上的 C^∞ 函数, 其中 $n \geq 2$ 。假设常微分方程

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{3.1}$$

当参数 $\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}^2$ 时, 存在平衡点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$, 系统(3.1)的线性化矩阵在该平衡点处具有两个零特征值, 其余特征值均具有非零实部。

在坐标变换 $y = x - P_0$ 的作用下, 系统

$$\dot{y} = F(y + P_0, \mu) \triangleq G(y, \mu) \tag{3.2}$$

当参数 $\mu = \mu_0$ 时具有零平衡点 $Q_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ 。考虑向量场 $G(y, \mu_0)$ 在平衡点 $Q_0 = 0$ 处的 Taylor 展开式

$$G(y, \mu_0) = A_0 y + \frac{1}{2} B(y, y) + O(\|y\|^3)。$$

其中 A_0 为 $n \times n$ 的方阵。

当 $A_0 \neq 0$ 时, 记 q_0, q_1 为 A_0 的广义特征向量, 满足 $A_0 q_0 = 0$ 及 $A_0 q_1 = q_0$ 。另外, 记 p_0, p_1 为 A_0^T 的广义特征向量, 满足 $A_0^T p_1 = 0$, $A_0^T p_0 = p_1$, $\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1$ 及 $\langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_1, q_0 \rangle = 0$ 。记

$$a(\mu_0) = \frac{1}{2} \langle p_1, B(q_0, q_0) \rangle, \quad b(\mu_0) = \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle, \tag{3.3}$$

$\tau(y, \mu)$ 为矩阵 $\frac{\partial G(y, \mu)}{\partial y}$ 的迹, $\delta(y, \mu)$ 为矩阵 $\frac{\partial G(y, \mu)}{\partial y}$ 的行列式。

定理 3.1: 假设如下条件成立

- (1) 非退化条件: $a(\mu_0)b(\mu_0) \neq 0$;
- (2) 正则性条件: 映射 $\mathfrak{T}: (x, \mu) \rightarrow (G(y, \mu), \tau(y, \mu), \delta(y, \mu))$ 在 (Q_0, μ_0) 处是正则的, 则系统(3.2)在点 (Q_0, μ_0) 处发生余维二的 BT 分岔, 从而系统(3.1)在点 (P_0, μ_0) 处发生余维二的 BT 分岔。

4. 数值仿真

为了研究 BT 平衡点在参数扰动下的动力学行为, 本节将在第 2 节的参数条件(2.1)下, 进一步选择 $x_0 = 2$, 通过数值仿真方法对分岔参数 β_2, s_2 进行扰动, 观察系统在原平衡点 $\Omega_0 = [x_0, y_0, z_0]$ 附近动力学行为的变化。

当分岔参数 $\beta_2 = \beta_{20} - 0.05, s_2 = s_{20} + 0.05$ 时, 原平衡点 Ω_0 为鞍点, 其不稳定流形的一支为一条异宿轨, 连接着另一个稳定的正平衡点 $\Omega_1 \approx [1.1697, 1.0197, 1.4163]$, 如图 3 所示。

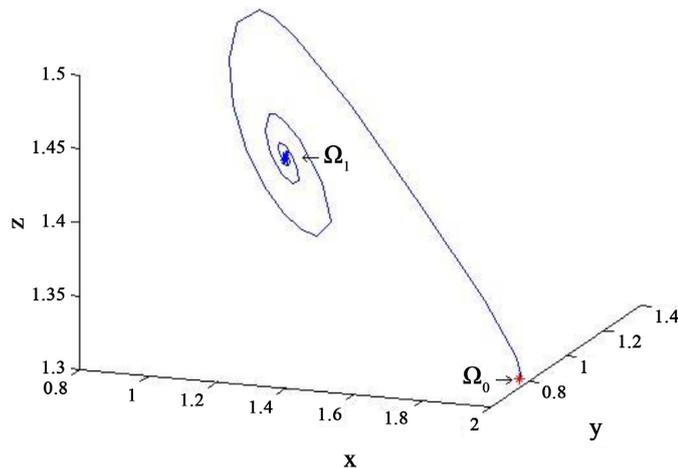


Figure 3. The phase diagram of system (1.2)

图 3. 系统(1.2)的相图

当分岔参数 $\beta_2 = \beta_{20} + 0.05, s_2 = s_{20} + 0.05$ 时, 原平衡点 Ω_0 依然为鞍点, 其不稳定流形的一支也依然为一条异宿轨, 但此时连接着的却是一个稳定的非正平衡点 $\Omega_2 = [4, 0, 1]$, 如图 4 所示。

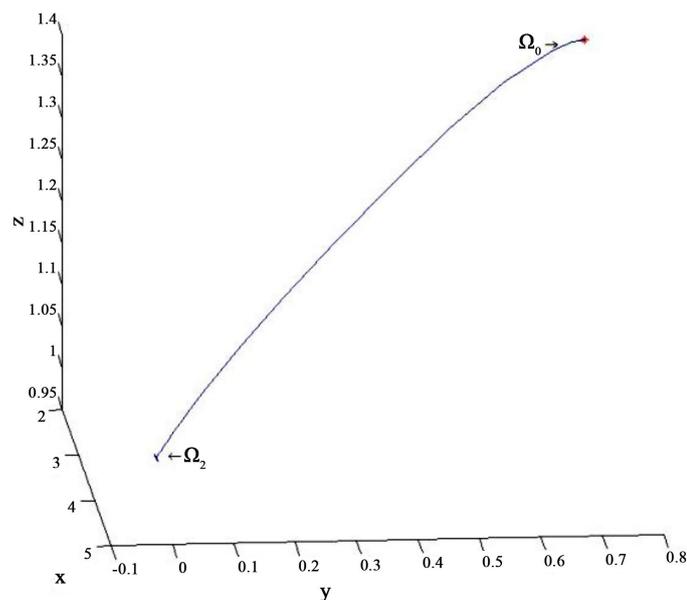


Figure 4. The phase diagram of system (1.2)

图 4. 系统(1.2)的相图

基金项目

国家自然科学基金(12261005), 广东省自然科学基金(2021A1515010043)。

参考文献

- [1] Hsu, S.-B. and Huang, T.-W. (1995) Global Stability for a Class of Predator-Prey Systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **55**, 763-783. <https://doi.org/10.1137/s0036139993253201>
- [2] Li, Y. and Xiao, D. (2007) Bifurcations of a Predator-Prey System of Holling and Leslie Types. *Chaos, Solitons & Fractals*, **34**, 606-620. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.068>
- [3] Kuznetsov, Y.A. (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd Edition, Springer.
- [4] Zhang Z., Ding T., Huang W. and Dong Z. (2006) Translations of Mathematical Monographs, Vol. 101. Qualitative Theory of Differential Equations. American Mathematical Society.
- [5] Huang, J., Ruan, S. and Song, J. (2014) Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1721-1752. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024>
- [6] Huang, J., Xia, X., Zhang, X. and Ruan, S. (2016) Bifurcation of Codimension 3 in a Predator-Prey System of Leslie Type with Simplified Holling Type IV Functional Response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**, Article ID: 1650034. <https://doi.org/10.1142/s0218127416500346>
- [7] Carrillo, F.A. and Verduzco, F. (2008) Control of the Planar Takens-Bogdanov Bifurcation with Applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, **105**, 199-225. <https://doi.org/10.1007/s10440-008-9272-9>
- [8] Blé, G. and Dela-Rosa, M.A. (2019) Bogdanov-Takens Bifurcation in a Leslie Type Tritrophic Model with General Functional Responses. *Acta Applicandae Mathematicae*, **169**, 361-382. <https://doi.org/10.1007/s10440-019-00302-z>
- [9] Blé, G., Castellanos, V. and Dela-Rosa, M.A. (2022) Bifurcation Analysis of a Kolmogorov Type Tritrophic Model. *Acta Applicandae Mathematicae*, **181**, Article No. 2. <https://doi.org/10.1007/s10440-022-00520-y>

附录

$$\begin{aligned}
t_{10} &= -2 - 2x_0 + 9x_0^2 + 9x_0^3, & t_{11} &= -1 - 4x_0 + 15x_0^2 + 50x_0^3, \\
t_{12} &= 4 + 29x_0 + 6x_0^2 + 5x_0^3, & t_{13} &= 4 + 25x_0 - 8x_0^2 - 80x_0^3 + 5x_0^4, \\
t_{14} &= 2 + 19x_0 + 37x_0^2 + 34x_0^3 + 55x_0^4 + 105x_0^5, \\
t_{15} &= -4 - 33x_0 - 67x_0^2 - 84x_0^3 - 17x_0^4 + 85x_0^5, \\
t_{16} &= 2 + 19x_0 + 37x_0^2 + 24x_0^3 + 25x_0^4 + 75x_0^5 - 10x_0^6, \\
t_{17} &= 8 + 110x_0 + 425x_0^2 + 235x_0^3 + 150x_0^4 + 55x_0^5 + 25x_0^6, \\
t_{18} &= 2 + 29x_0 + 132x_0^2 + 219x_0^3 + 225x_0^4 + 380x_0^5 + 525x_0^6, \\
t_{19} &= 4 + 36x_0 + 57x_0^2 + 10x_0^3 - 7x_0^4 + 69x_0^5 - 90x_0^6 + 105x_0^7, \\
t_{20} &= 2 + 21x_0 + 58x_0^2 + 80x_0^3 + 86x_0^4 + 124x_0^5 + 90x_0^6 + 65x_0^7 - 10x_0^8, \\
t_{21} &= 8 + 60x_0 + 55x_0^2 - 110x_0^3 - 4x_0^4 + 188x_0^5 - 18x_0^6 - 236x_0^7 - 75x_0^8, \\
t_{22} &= 8 + 126x_0 + 607x_0^2 + 749x_0^3 - 736x_0^4 - 1342x_0^5 - 350x_0^6 - 5070x_0^7 - 8125x_0^8 + 525x_0^9, \\
t_{23} &= 2 + 27x_0 + 83x_0^2 - 213x_0^3 - 1384x_0^4 - 2035x_0^5 - 1285x_0^6 - 2415x_0^7 - 3600x_0^8 + 500x_0^9, \\
t_{24} &= 32 + 640x_0 + 4386x_0^2 + 10045x_0^3 - 5685x_0^4 - 31360x_0^5 - 16400x_0^6 - 10640x_0^7 \\
&\quad - 3850x_0^8 - 1725x_0^9 + 125x_0^{10}, \\
t_{25} &= 8 + 134x_0 + 735x_0^2 + 1383x_0^3 + 96x_0^4 - 2291x_0^5 - 3076x_0^6 - 7455x_0^7 - 14480x_0^8 \\
&\quad - 10015x_0^9 - 3075x_0^{10} + 500x_0^{11}, \\
t_{26} &= 4 + 80x_0 + 589x_0^2 + 2087x_0^3 + 4392x_0^4 + 6829x_0^5 + 9743x_0^6 + 11492x_0^7 + 11691x_0^8 + 17225x_0^9 \\
&\quad + 26400x_0^{10} + 22195x_0^{11} + 10885x_0^{12} - 300x_0^{13}, \\
t_{27} &= 10x_0(1+x_0)^3(-2-21x_0-66x_0^2-146x_0^3-178x_0^4+18x_0^5+236x_0^6+75x_0^7) - t_{26}, \\
t_{28} &= -4 - 100x_0 - 1029x_0^2 - 5968x_0^3 - 22683x_0^4 - 50940x_0^5 + 21528x_0^6 + 600914x_0^7 + 2071406x_0^8 \\
&\quad + 3902650x_0^9 + 5128380x_0^{10} + 5670244x_0^{11} + 4708370x_0^{12} + 724370x_0^{13} - 4028825x_0^{14} \\
&\quad - 5417130x_0^{15} - 3231425x_0^{16} - 525000x_0^{17} + 122250x_0^{18}, \\
t_{29} &= 672 + 16440x_0 + 157972x_0^2 + 748686x_0^3 + 1830051x_0^4 + 2330142x_0^5 + 1941269x_0^6 \\
&\quad + 3019776x_0^7 + 5079728x_0^8 + 2201000x_0^9 - 4432930x_0^{10} - 3072940x_0^{11} + 8133690x_0^{12} \\
&\quad + 15303180x_0^{13} + 13179100x_0^{14} + 7048850x_0^{15} + 3407975x_0^{16} + 1113550x_0^{17} \\
&\quad + 255625x_0^{18} - 7500x_0^{19}.
\end{aligned}$$