

涉及分担集合的亚纯函数正规定则研究

陈志豪, 杨锦华*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年7月21日; 录用日期: 2025年8月19日; 发布日期: 2025年8月27日

摘要

本文主要讨论了一类涉及分担集合的亚纯函数正规定则, 通过利用Pang-Zalcman引理构造辅助函数, 结合正规族理论与Nevanlinna理论, 利用经典引理, 在前人研究的基础上, 得到了一类新的正规定则。

关键词

亚纯函数, 正规性, 分担集合

Research on Normality Rules for Meromorphic Functions Involving Sharing Sets

Zhihao Chen, Jinhua Yang*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jul. 21st, 2025; accepted: Aug. 19th, 2025; published: Aug. 27th, 2025

Abstract

This paper discusses the normality rules for a class of meromorphic functions involving sharing sets. By constructing auxiliary functions using the Pang-Zalcman lemma, combining normal family theory with Nevanlinna theory, and applying classical lemmas, we obtain a new class of normality rules based on previous research.

Keywords

Meromorphic Function, Normality, Sharing Set

*通讯作者。

文章引用: 陈志豪, 杨锦华. 涉及分担集合的亚纯函数正规定则研究[J]. 理论数学, 2025, 15(8): 104-110.
DOI: 10.12677/pm.2025.158225



1. 引言

定义 1 [1] 如果对任何 $z \in D$, $f(z) \in S$ 当且仅当 $g(z) \in S$, 称 f 和 g 在区域 D 上具有分担集 $S \subset C$, 通常用 $f(z) \in S_1 \Leftrightarrow g(z) \in S_2$ 来表示 $f(z) \in S_1$ 当且仅当 $g(z) \in S_2$ 。

Schwick [2] 于 1992 年首先认识到函数族的正规性与分担值之间具有联系, 证明了如下定理。

定理 A 设 $a, b, c \in C$ 互相判别, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族, 如果对每个 $f \in \mathcal{F}$, f 和 f' 具有分担值 a, b, c , 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

庞学诚与 Zalcman [3] 利用 Pang-Zalcman 引理对定理 A 给出了较简单的证明, 并且将条件减弱为具有两个分担值。刘晓俊和庞学诚 [4] 进一步将分担三值条件减弱, 转而考虑了分担集合的情形, 证明了若亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 中 f 与其导数 f' 于 D 具有分担集 $\{a, b, c\}$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

自然地, 可以研究将分担值推广为分担函数情形的正规定则, 目前已有许多相关的结果。2013 年, 刘晓毅, 程春暖 [5] 讨论了分担函数的情形, 得到了如下结论。

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内没有单零点的一个亚纯函数族, $a(z), b(z)$ 是两个全纯函数满足 $a(z) \neq 0$ 和 $b(z) = 0 \Rightarrow a'(z) \neq 0$, 如果对任意 $f \in \mathcal{F}$ 在 D 内满足 $f(z) = a(z) \Leftrightarrow f'(z) = b(z)$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2023 年, 刘丹, 邓炳茂 [6] 在文献 [6] 证明了如下定理。

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族, m, n, k 为三个正整数, 集合 $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $S_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 且 $S_2 \neq \{0\}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ 分别是 m, n 个有穷复数且互相判别。如果对任意 $f \in \mathcal{F}$, $z \in D$, f 的零点重级至少为 $k+1$, 且 $f(z) \in S_1 \Leftrightarrow f^{(k)}(z) \in S_2$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

定理 D 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族, 设 m, k 为两个正整数, 且 $m(\geq k+4)$, 设集合 $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $S_2 = \{0\}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 分别是 m 个有穷复数, 且互相判别。如果对任意 $f \in \mathcal{F}$, $z \in D$, f 的零点重级至少为 k , 且 $f(z) \in S_1 \Rightarrow f^{(k)}(z) \in S_2$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

随后, 冉娜 [7] 将 $f^{(k)}$ 推广到 f 的 k 阶微分多项式 $L(f) = f^{(k)} + \sum_{i=1}^k c_i f^{(k-i)}$, 证明了当 $k \geq 2$ 时, 结论仍然成立。

本文将文献 [7] 中的 $L(f)$ 推广到 $L(f)(z) + P(f)(z)$, 其中 $L(f)(z) = f^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(z) f^{(i)}(z)$, $P(f)(z) = \sum_{i=1}^q b_i(z) f^i(z)$, 得到了如下结果。

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族, 设 m, q, n, k 为四个正整数, 集合 $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $S_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 且 $S_2 \neq \{0\}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ 分别是 m, n 个互相判别的有穷复数。如果对任意 $f \in \mathcal{F}$, $z \in D$, f 的零点重级至少为 $k+1$, 且 $f(z) \in S_1 \Leftrightarrow L(f)(z) + P(f)(z) \in S_2$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。其中 $L(f)(z) = f^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(z) f^{(i)}(z)$, $P(f)(z) = \sum_{i=1}^q b_i(z) f^i(z)$, $c_i (i=1, 2, \dots, k-1)$, $b_i (i=1, 2, \dots, q)$ 为区域 D 内的全纯函数。

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一个亚纯函数族, 设 m, k 为两个正整数, 且 $m(\geq k+4)$, 设集合 $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $S_2 = \{0\}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 分别是 m 个有穷复数, 且互相判别。如果对任意 $f \in \mathcal{F}$, $z \in D$, f 的零点重级至少为 k , 且 $f(z) \in S_1 \Rightarrow L(f)(z) + P(f)(z) \in S_2$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2. 引理

引理 1 [8] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, 对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点至少是 k 级的, 若存在 $A \geq 1$,

使得对 f 的任意一个零点 z_0 , 有 $|f^{(k)}(z_0)| \leq A$, 若 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处不正规, 则对任意 $0 \leq \alpha \leq k$, 存在:

- (1) 点列 $z_j \in \Delta$, $z_j \rightarrow z_0$;
- (2) 函数列 $\{f_n(z)\} \subseteq \mathcal{F}$;
- (3) 正数列 ρ_j , $\rho_j \rightarrow 0^+$;

使得

$$g_j(\zeta) = \frac{f_j(z_j + \rho_j \zeta)}{\rho_j^\alpha} \rightarrow g(\xi),$$

其中 $g(\xi)$ 为复平面 C 上的非常数亚纯函数, 零点重级至少为 k , 并且 $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = kA + 1$.

引理 2 [9] 设 f 为复平面上的有穷级超越亚纯函数, k 为正整数, $a, b (\neq 0)$ 为有穷复数, 若 f 的零点重级至少为 k , 且 $f(z) = 0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z) = a$, 则 $f^{(k)} - b$ 有无穷多个零点.

引理 3 [10] 设 $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}$, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为常数, $a_n \neq 0$, $p(z), q(z)$ 是两个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p$, k 为正整数, 若 $f^{(k)} \neq 1$, 则有

- (1) $n = k$ 且 $n!a_n = 1$;

$$(2) f(z) = \frac{1}{k!} z^k + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{1}{(az+b)^m};$$

(3) 若 f 的零点重级至少为 $k+1$, 则(2)式中 $m=1$, 且 $f(z) = \frac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$, 其中 $a \neq 0, b, c \neq 0, d$ 为常数.

引理 4 [9] 设 f 为复平面上的有穷级亚纯函数, $b (\neq 0)$ 为有穷复数, $k (\geq 2)$ 是一个正整数, 若 f 的零点重级至少为 k , 且 $f = 0 \Leftrightarrow f^{(k)} = a, f^{(k)} \neq b$, 则 f 是一个常数.

引理 5 设 f 为复平面上的有穷级亚纯函数, $b (\neq 0)$ 为有穷复数, 若 f 的零点均重级, 且 $f = 0 \Leftrightarrow f' = 0, f' \neq b$, 则 f 是一个常数.

证明由引理 2 可知, f 为有理函数, 若 f 为非多项式有理函数, 令 $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}$,

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为常数, $a_n \neq 0, p(z), q(z)$ 是两个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p$, 不失一般性, 设 $b=1$, 由引理 3 可知 $f = \frac{(cz+d)^2}{az+b}$, 其中 $a \neq 0, b, c \neq 0, d$ 为常数, 注意到 $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$, 否则 $f = \frac{d^2}{b^2}(az+b)$,

与 f 的零点重级均重级矛盾. 从而 $f' = \frac{2c(cz+d)(az+b) - a(cz+d)^2}{(az+b)^2} = \frac{(cz+d)(acz+2bc-ad)}{(az+b)^2}$, 当 $z = \frac{ad-2bc}{ac}$ 时, $f' = 0$, 由 $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$ 可知 $\frac{ad-2bc}{ac} \neq -\frac{d}{c}$, 从而 $f \neq 0$, 与 $f = 0 \Leftrightarrow f' = 0$ 矛盾. 若 f 为次数至少为 2 的多项式, 则与 $f' \neq 1$ 矛盾, 从而 f 为常数.

引理 6 [6] 设 $g(z)$ 为复平面上的亚纯函数, $k (\geq 2)$ 是一个正整数, 则

$$\left(\frac{1}{g(z)}\right)^{(k)} = \frac{g^{(k)}(z)}{g^2(z)} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i g_i + k! \frac{(g'(z))^k}{g^{k+1}(z)},$$

其中 $a_i (i=0, 1, \dots, k-2)$ 是关于 $\left(\frac{1}{g(z)}\right)', \left(\frac{1}{g(z)}\right)'', \dots, \left(\frac{1}{g(z)}\right)^{(k-1)}$ 的多项式.

引理 7 [11] 设 f 为复平面上的亚纯函数, 设 $b (\neq 0)$ 为有穷复数, k 是一个正整数, 若 f 的零点重级至

少为 $k+1$, $f^{(k)} \neq b$ 且 f 的极点均重级, 则 f 是一个常数。

3. 定理证明

定理 1 证明

因为 $S_2 \neq \{0\}$, 不失一般性, 设 $b_1 (\neq 0) \in S_2$ 。不妨设 $D = \Delta$, 下面分两种情形进行讨论。

情形 1 $S_1 = \{0\}$

设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 $\Delta = \{z: |z| \leq 1\}$ 上的亚纯函数族, 若 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 由引理 1, 取 $\alpha = k$, 则存在 $f_n \in \mathcal{F}$, $z_n \rightarrow z_0$, $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得

$$g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在复平面 C 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g(\xi)$ 零点重级至少为 $k+1$, 级至多为 2, 且满足 $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = kA+1$ 。

断言: (i) $g = 0 \Leftrightarrow g^{(k)} = 0$ 且 $0 \in S_2$

一方面, 设 $g(\xi_0) = 0$, 由 Hurwitz 定理可知, 存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 从而 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 于是 $L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 由定理条件可知 $0 \in S_2$, 又因为

$$\begin{aligned} & L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) \\ &= f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(z_n + \rho_n \xi_n) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi_n) + \sum_{i=1}^q b_i(z_n + \rho_n \xi_n) f_n^i(z_n + \rho_n \xi_n) \\ &= g_n^{(k)}(\xi_n) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_n^{k-i} c_i(z_n + \rho_n \xi_n) g_n^{(i)}(\xi_n) + \sum_{i=1}^q b_i(z_n + \rho_n \xi_n) \rho_n^{ik} g_n^i(\xi_n) \\ &\rightarrow g^{(k)}(\xi_0). \end{aligned}$$

于是 $g^{(k)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 从而 $g = 0 \Rightarrow g^{(k)} = 0$ 且 $0 \in S_2$ 。

另一方面, 设 $g^{(k)}(\xi_0) = 0$, 断言 $g^{(k)} \neq 0$, 否则 g 为一个 k 次多项式, 与 $g(\xi)$ 零点重级至少为 $k+1$ 矛盾, 即 $g^{(k)}(\xi_0) = 0$ 但 $g^{(k)} \neq 0$, 又因为

$$\begin{aligned} & L(f_n)(z_n + \rho_n \xi) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi) \\ &= f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^{(i)}(z_n + \rho_n \xi) + \sum_{i=1}^q b_i(z_n + \rho_n \xi) f_n^i(z_n + \rho_n \xi) \\ &= g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_n^{k-i} c_i(z_n + \rho_n \xi) g_n^{(i)}(\xi) + \sum_{i=1}^q b_i(z_n + \rho_n \xi) \rho_n^{ik} g_n^i(\xi) \\ &\rightarrow g^{(k)}(\xi). \end{aligned} \tag{1}$$

由 Hurwitz 定理知, 存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 又因为 $0 \in S_2$, 由定理条件可知 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 于是 $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 因此

$g(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = 0$, 从而 $g^{(k)} = 0$ 且 $0 \in S_2 \Rightarrow g = 0$, 断言(i)得证。

断言: (ii) $g^{(k)} \neq b_1$

设 $g^{(k)}(\xi_0) = b_1$, 断言 $g^{(k)} \neq b_1$, 否则 g 为一个 k 次多项式, 与 $g(\xi)$ 零点重级至少为 $k+1$ 矛盾, 即 $g^{(k)}(\xi_0) = 0$ 但 $g^{(k)} \neq b_1$, 由(1)式与 Hurwitz 定理知存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = b_1$, $b_1 (\neq 0) \in S_2$, 由定理条件可知 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 从而 $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, $b_1 = g^{(k)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(k)}(\xi_n) = 0$, 与已知条件矛盾。断言(ii)得证。

由引理 4 与引理 5 可知, g 是一个常数, 矛盾, 从而 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

情形 2 $S_1 \neq \{0\}$

设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 $\Delta = \{z: |z| \leq 1\}$ 上的亚纯函数族, 若 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 由引理 1, 取 $\alpha = k$, 则存在 $f_n \in \mathcal{F}$, $z_n \rightarrow z_0$, $\rho_n \rightarrow 0^+$ 使得

$$g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在复平面 C 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g(\xi)$ 零点重级至少为 $k+1$ 。

断言: (i) $g^{(k)}(\xi_0) \neq b_1$

设 $g^{(k)}(\xi_0) = b_1$, 断言 $g^{(k)} \neq b_1$, 否则 g 为一个 k 次多项式, 与 $g(\xi)$ 零点重级至少为 $k+1$ 矛盾, 即 $g^{(k)}(\xi_0) = 0$ 但 $g^{(k)} \neq b_1$, 由(1)式和 Hurwitz 定理知存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = b_1$, 由定理条件可知存在 $a_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和函数列 $\{f_n\}$ 的子列, 不失一般性, 仍记为 $\{f_n\}$, 于是 $f_n(z_n + \rho_n \xi) = a_i$, 注意到 $a_i \neq 0$, 否则 $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 从而 $b_1 = g(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = 0$, 这与已知矛盾。所以 $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = \infty$, 于是

$b_1 = g(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = \infty$, 矛盾。断言(i)得证

断言: (ii) $g(\xi)$ 极点均重级

因为 $S_1 \neq \{0\}$, 不妨设 $a_1 (\neq 0) \in S_1$, 设 $g(\xi_0) = \infty$, 当 $g \neq \infty$ 时, 存在 $D_\delta = \{\xi: |\xi - \xi_0| \leq \delta\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{g_n}$ 和 $\frac{1}{g}$ 在 D_δ 内全纯, 并且在 D_δ 内有 $\frac{1}{g_n} \rightarrow \frac{1}{g}$, 从而对任意 $\xi \in D_\delta$ 有 $\frac{1}{g_n(\xi)} - \frac{\rho_n^k}{a_1} \rightarrow \frac{1}{g(\xi)}$, 故由

Hurwitz 定理, 存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{g_n(\xi)} - \frac{\rho_n^k}{a_1} = 0$, 即 $f_n(z_n + \rho_n \xi) = a_1$, 由定理条件可知存在

$b_j (j=1, 2, \dots, n)$ 和函数列 $\{f_n\}$ 的子列, 不失一般性, 仍记为 $\{f_n\}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(k)}(\xi_n) = g^{(k)}(\xi_0) = b_j。$$

当 $k=1$ 时, 有

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)' \Big|_{\xi=\xi_0} = - \frac{g'(\xi_0)}{g^2(\xi_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \frac{g'(\xi_n)}{g^2(\xi_n)} \right) = 0。$$

当 $k \geq 2$ 时, 由引理 6, 有

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)^{(k)} = \frac{g^{(k)}(\xi)}{g^2(\xi)} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i g^i + k! \frac{(g'(\xi))^k}{g^{k+1}(\xi)},$$

其中 $a_i (i=0, 1, \dots, k-2)$ 是关于 $\left(\frac{1}{g(z)} \right)', \left(\frac{1}{g(z)} \right)'', \dots, \left(\frac{1}{g(z)} \right)^{(k-1)}$ 的多项式。

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(\xi)} \right)^{(k)} \Big|_{\xi=\xi_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{g_n(\xi_n)} \right)^{(k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[- \frac{g_n^{(k)}(\xi_n)}{g^2(\xi_n)} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i g_n^i(\xi_n) + k! \frac{(g_n'(\xi_n))^k}{g^{k+1}(\xi_n)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^{k-2} a_i g_n^i(\xi_n) + k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{k-2} a_i g_n^i(\xi_n) + k! \frac{(g'_n(\xi_n))^k}{g_n^{k+1}(\xi_n)} \right] + a_0(\xi_0) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{k-2} a_i g_n^{i-1}(\xi_n) + k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k (-1)^{(k)} g_n^{k-2}(\xi_n) \right] g_n(\xi_n) + a_0(\xi_0)
 \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{-k} a_1 = \infty, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{k-2} a_i g_n^{i-1}(\xi_n) + k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k (-1)^{(k)} g_n^{k-2}(\xi_n) \right] = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=2}^{k-2} a_i g_n^{i-2}(\xi_n) + k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^{(k)} (-1)^{(k)} g_n^{k-3}(\xi_n) \right] g_n(\xi_n) + a_1(\xi_0) = 0, \text{ 以此类推, 可得}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k-2}(\xi_0) + k! \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k (-1)^{(k)} g_n(\xi_n) = 0, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right)^k = 0, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)} \right) = 0, \text{ 从而}$$

$$\left(\frac{1}{g(\xi)} \right)' \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \text{ 所以 } \xi = \xi_0 \text{ 是 } g(\xi) \text{ 的重级点, 断言(ii)得证. 由引理 7 可知 } g(\xi) \text{ 是一个常数, 与假设矛盾. 从而 } \mathcal{F} \text{ 在 } D \text{ 内正规.}$$

定理 2 证明

不失一般性, 令 $D = \Delta$, 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族, 若 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 不妨设在 $z_0 \in \Delta$ 处不正规, 由引理 1, 取 $\alpha = 0$, 则存在 $f_n \in \mathcal{F}$, $z_n \rightarrow z_0$, $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得

$$g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在复平面 C 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$ 。

断言: $g(\xi) = a_i \Rightarrow g^{(k)}(\xi) = 0, i = 0, 1, \dots, m$

设 $g(\xi_0) = a_i, i = 0, 1, \dots, m$, 由于 $g(\xi)$ 是一个非常数亚纯函数, 从而 $g^{(k)}(\xi) \neq a_i$, 由 Hurwitz 定理知存在 $\xi_n \rightarrow \xi_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $g_n(\xi_n) = f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = a_i$, 由定理条件 $f(z) \in S_1 \Leftrightarrow L(f)(z) + P(f)(z) \in S_2$, 可知 $L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$ 。因此

$$g^{(k)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(k)}(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^k [L(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n) + P(f_n)(z_n + \rho_n \xi_n)] = 0. \text{ 断言得证.}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理得

$$\begin{aligned}
 (m-2)T(r, g) &\leq \sum_{i=1}^m \bar{N}\left(r, \frac{1}{g-a_i}\right) + S(r, g) \\
 &\leq N\left(r, \frac{1}{g^{(k)}}\right) + S(r, g) \leq (k+1)T(r, g) + S(r, g)
 \end{aligned}$$

于是 $(m-k-3)T(r, g) \leq S(r, g)$, 又因为 $m \geq k+4$ 故 $T(r, g) \leq S(r, g)$ 矛盾。从而 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

4. 结论与讨论

本文研究了亚纯函数正规族理论中的一个具体问题, 即涉及分担集合的正规定则, 在前人研究的基础上, 将 $L(f)$ 推广到更一般的形式 $L(f)(z) + P(f)(z)$, 得到了一个新的结果。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061077);
新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2022D01A217)。

参考文献

- [1] 常建明. 正规族理论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 2023: 17.
- [2] Schwick, W. (1992) Sharing Values and Normality. *Archiv der Mathematik*, **59**, 50-54.
<https://doi.org/10.1007/bf01199014>
- [3] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv för Matematik*, **38**, 171-182.
<https://doi.org/10.1007/bf02384496>
- [4] Liu, X.J., Li, S.H. and Pang, X.C. (2013) A Normal Criterion about Two Families of Meromorphic Functions Concerning Shared Values. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **29**, 151-158. <https://doi.org/10.1007/s10114-012-0600-7>
- [5] 刘晓毅, 程春暖. 正规族与分担函数[J]. 数学学报, 2013, 56(6): 941-950.
- [6] 刘丹, 邓炳茂, 方明亮. 分担集合的亚纯函数的正规性[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2023, 44(1): 71-82.
- [7] 冉娜, 饶梓骞, 杨祺. 涉及分担集合的亚纯函数正规族[J]. 宜春学院学报, 2023, 45(12): 6-8.
- [8] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331. <https://doi.org/10.1112/s002460939900644x>
- [9] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2003) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions. *Annales Polonici Mathematici*, **80**, 133-141. <https://doi.org/10.4064/ap80-0-11>
- [10] 顾永兴, 庞学诚. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 54-55.
- [11] Wang, Y.F. and Fang, M.L. (1998) Picard Values and Normal Families of Meromorphic Functions with Multiple Zeros. *Acta Mathematica Sinica (New Series)*, **14**, 17-26.