Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(9), 65-71
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.159233

Hans汉斯

实变函数论中勒贝格测度的计算方法

彭　瑾，廖人莹*

成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都

收稿日期：2025年7月29日；录用日期：2025年8月30日；发布日期：2025年9月10日

摘　要

众所周知，实变函数论是大学数学分析学中一门非常重要的课程，勒贝格测度是本课程的核心内容。迄今为止，很少有文献介绍如何计算勒贝格可测集的测度。本文针对 R^n 空间中的可测集，建立测度的计算方法。首先，基于开集构造定理，讨论了一维和高维开集的计算，并建立了测度的计算公式。其次，通过补集关系，将闭集测度转化为开集测度的计算问题，结合测度的单调增加性质完成对闭集计算方法的建立。最后，对一般高维可测集，本文提供了计算思路和方法。

关键词

开集，闭集，可测集，勒贝格测度的计算

The Calculation Methods of Lebesgue Measure in Real Variable Function

Jin Peng, Renying Liao*

College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu Sichuan

Received: Jul. 29th, 2025; accepted: Aug. 30th, 2025; published: Sep. 10th, 2025

Abstract

It is well known that the theory of variable real function is a very important course in mathematical analysis in college, and Lebesgue measure is the core content of this course. Up to now, there is little study on how to calculate the Lebesgue measure of measurable sets. In this paper, we focus on the calculation methods of measurable sets. Firstly, based on the construction theorems of open sets, the computation of one-dimensional and higher-dimensional open sets are discussed, and formulas for calculating their measures are derived. Secondly, by leveraging the complement relationship, the problems of computing the measure of closed sets are transformed into calculating the measure

*通讯作者。

文章引用: 彭瑾, 廖人莹. 实变函数论中勒贝格测度的计算方法[J]. 理论数学, 2025, 15(9): 65-71.
DOI: 10.12677/pm.2025.159233

of open sets, and the methods for closed sets are established by combining the monotonic increasing property of measures. Finally, for general higher-dimensional measurable sets, this paper provides computational ideas and methods.

Keywords

Open Sets, Closed Sets, Measurable Sets, Computation of Lebesgue Measure

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在现代数学研究体系中，对开集或者闭集的测度计算的研究有着深厚的历史和广阔的应用。早在十九世纪末，随着集合论的创立，数学家开始探索抽象的数学结构以处理更为复杂的函数问题，此时测度论的雏形逐渐形成从而为后续发展奠定基础；在二十世纪初，勒贝格提出勒贝格测度，将传统积分推广到任意可测集合上，实现了测度论的系统化，这一突破解决了非连续函数等复杂问题的积分计算，标志着现代测度论的正式形成[1]。

在实变函数理论中，如何计算测度，极少有文献给出完整的研究结果。例如：Stein 的《Real Analysis》[2]在测度计算部分的侧重点主要是用几何构造和具体的例子帮助读者理解抽象的概念，其中特别关注测度在积分理论当中的正则性(开集/闭集逼近)和平移不变性，主要注重实际应用；夏道行的《实变函数论与泛函分析》[3]从环的测度逐步拓展到 Lebesgue 外测度的定义和性质等；程其襄的《实变函数与泛函分析基础》[4]更加注重从基础概念到完整理论体系的构建，书中高维开闭集测度计算公式未作出具体阐述；周民强的《实变函数论》[5]中则简述了一般高维可测集的计算方法并列举了一些特殊可测集；曹广福的《实变函数论与泛函分析》[6]一书中更侧重于对 Lebesgue 可测的证明阐述以及测度的相关性质；Terence Ta 的《An Introduction to Measure Theory》[7]对于测度的计算仅讨论区间和特殊集的测度计算以及性质。

我们发现在国内外的常用教材中，对测度计算的内容大都只涉及到区间的测度计算，并未针对高维开闭集合测度的计算给出具体的计算公式。读者还可参考[8] [9]。

本文就这一问题，我们做一些研究并对其进行较为系统性的阐述。首先，基于开集构造定理，我们讨论一维和高维开集的计算，并建立了测度的计算公式；其次，对于闭集测度计算，通过补集关系将其转化为开集测度计算问题，利用测度的单调增加性质完成对闭集计算方法的建立；最后，对一般高维可测集，利用开集和闭集的逼近思路，提供了测度计算思路与方法。

2. 预备知识

下面的预备知识见文献[3]-[6]。本文的讨论范围为 n 维空间，即 n 维欧几里得空间

$$R^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\middle|x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\right\}。$$

在 R^n 内两个点 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 和 $y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)$ 的距离为

$$d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+\left(x_3-y_3\right)^2+\cdots+\left(x_n-y_n\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}$$

设 P_0 是 R^n 中的一个定点，它的 δ-邻域为集合 $U\left(P_0\right)=\left\{x:\left|x-P_0\right|<\delta\right\},\delta>0$。

设 E 是 n 维空间 R^n 的一个点集， P_0 是 R^n 中的一个定点，如果存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$ 使得 $U(P_0)\subset E$，则称 P_0 为 E 的内点；如果 E 的每一点都是 E 的内点，则称 E 为开集。最简单的开集是数轴上的开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b,a,b\in R,a<b\}$。

设 E 是 n 维空间 R^n 的一个点集， P_0 是 R^n 中任意的一个定点，如果 P_0 的任一邻域内都含有无穷多个属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的一个聚点。如果 E 的每一个聚点都属于 E，则称 E 为闭集。最简单的闭集是数轴上闭区间 $[a,b]=\{x|a\le x\le b,a,b\in R,a<b\}$。

R^n 中的开区间和左开右闭区间分别是集合 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n|a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 和 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n|a_i<x_i\le b_i,i=1,2,\cdots,n\}$。

下面是外测度和 Lebesgue 可测集。

设 E 为 R^n 中任一点集，对于每一列覆盖 E 的开区间 $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$，作出它的体积总和 $\mu=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$，（$\mu$ 可以等于 ∞，不同的区间列一般有不同的 μ），所有这一切的 μ 组成一个下方有界的数集，它的下确界(完全由 E 确定)称为 E 的勒贝格外测度，简称 L 外测度或者外测度，记为 $m*E=\inf_{E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$。

设 E 为 R^n 中的点集，如果对任一点集 T 都有 $m*T=m*(T\cap E)+m*(T\cap E^c)$，则称 E 是 L 可测的。这时 E 的 L 外测度 $m*E$ 称为 E 的 L 测度，记为 mE。这里 $E^c=R^n\setminus E$ 表示 E 在 R^n 中的余集。

已知的结果是区间(开区间，闭区间，左开右闭区间等)，开集和闭集都是可测集。在闭集测度的计算方法中，我们要用到下列可测集测度的可数可加性和单调增加定理：

(1) (可数可加性)设 $\{E_k\}$ 为 R^n 中的可测集合序列，且互不相交，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k。$$

(2) (单调增加定理)设 $\{E_k\}$ 为 R^n 中的可测集合序列，满足 $E_k\subseteq E_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}mE_k。$$

3. 测度的计算

在可测集的测度计算中最简单的是区间的测度，它们的测度就是区间的长度(一维)，面积(二维)或体积(三维及以上) [3]-[6]。下面我们讨论较为复杂可测集合测度的计算。

3.1. 开集测度的计算

3.1.1. 一维开集测度的计算

为了计算直线上开集的测度，我们需要介绍构成区间的概念。设 G 是直线上的开集，如果开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$，而且端点 α,β 不属于 G，那么称 (α,β) 为 G 的构成区间。

一维开集的构造定理：直线上任一个非空开集可以表示成至多可数个互不相交的构成区间的并集(可见[3]-[6])。

因此若 G 为一维非空开集，由开集构造定理(如图 1)，将 G 表示为至多可数个开区间 $(\alpha_i,\beta_i),i\in[1,\infty)$ 的并集，即 $G=\bigcup_{1\le i\le\infty}(\alpha_i,\beta_i)$，测度的可数可加性得出 G 的测度为

$$mG=|G|=\sum_{1\le i\le\infty}|(\alpha_i,\beta_i)|=\sum_{1\le i\le\infty}(\beta_i-\alpha_i)。$$

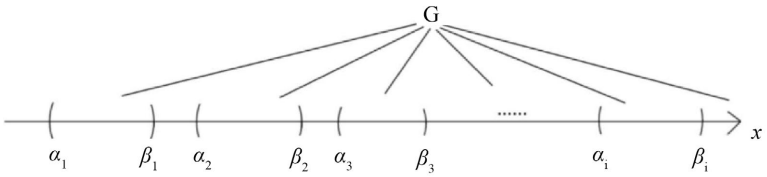

Figure 1. Schematic diagram of one-dimensional open set composition
图 1. 一维开集构成示意图

3.1.2. 高维开集测度的计算

高维开集的构造与一维的情况有些不同。它一般不能直接表示为开区间的并集。我们则需要运用高维开集 G 的构造原理，二维情况[4]如图 2 所示，过程如下：设 G 为 R^n 中任一非空开集，在 R^n 上以 n 组平行线

$$x_1 = l_1, x_2 = l_2, \cdots, x_n = l_n \left(l_1, l_2, \cdots, l_n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right),$$

作成无数个左开右闭的正方形；这些正方形中全部落在 G 中的，记为

$$Q_{11}, Q_{12}, \cdots, Q_{1n_1}, n_1 \text{ 可能是 } \infty \text{。}$$

对于未全部落在 G 中的正方形，再作 n 组平行线

$$x_1 = l_1 + \frac{1}{2}, x_2 = l_2 + \frac{1}{2}, \cdots, x_n = l_n + \frac{1}{2}\left(l_1, l_2, \cdots, l_n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right),$$

将剩余的每个正方形分为左开右闭的四个小正方形，记这些正方形中全部落入 G 中的为

$$Q_{21}, Q_{22}, \cdots, Q_{2n_2}, n_2 \text{ 可能是 } \infty \text{。}$$

将这个过程无限进行下去。由于每个小正方体都在 G 中，故 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{v=1}^{n_k} I_{kv} \subseteq G$，注意到 G 的每一个小正方体必落在某一个 I_{kv} 中，这意味着 $G \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{v=1}^{n_k} I_{kv}$。于是我们得到

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{v=1}^{n_k} I_{kv}, k \in [1, \infty], v \in [1, n_k],$$

此时，根据测度的可数可加性得出 G 的测度为这些区间面积或体积之和，即

$$mG = |G| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n_k} |I_{kv}|$$

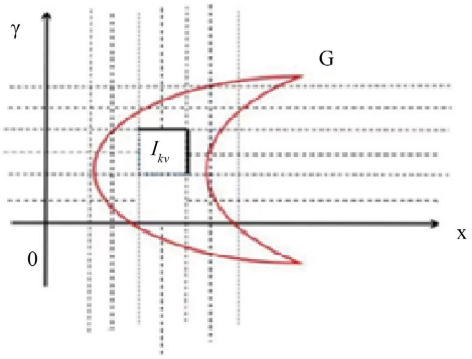

Figure 2. Schematic diagram of the composition of multi-dimensional open set
图 2. 二维开集构成定理示意图

3.2. 闭集测度的计算

3.2.1. 有界闭集

设 F 为含于 R 的闭集，取有限区间 $I=(\alpha,\beta)\subseteq R$，使得 $F\subseteq(\alpha,\beta)$，如下图 3 所示。

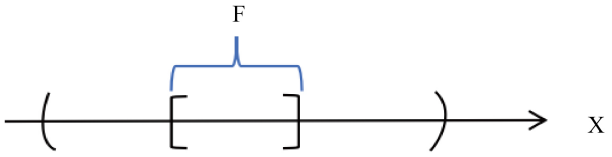

Figure 3. Schematic diagram of one-dimensional closed set composition
图 3. 一维闭集测度计算示意图

令 $G=I\setminus F=(\alpha,\beta)\setminus F=(\alpha,\beta)\cap F^c$，其中 F^c 表示 F 在 R 中的补集。

首先根据前面 3.1 开集测度计算方法可以求出 $|G|$ (此处 $|G|$ 表示 G 的测度)。由于 G 是开集，可将其表示为至多可数个互不相交开区间 (α_i,β_i) 的并集来计算测度，则由关系式 $|F|=(\beta-\alpha)-|G|$ 可以得到

$$mF=|F|=(\beta-\alpha)-\sum_{1\le i\le\infty}|(\alpha_i,\beta_i)|=(\beta-\alpha)-\sum_{1\le i\le\infty}(\beta_i-\alpha_i)$$

同理在有界高维情况下 $(n\ge 2)$，如图 4 所示，设 $F\subseteq R^n$，取 n 维有界开区间 I，使得 $F\subseteq I$。令 $G=I\setminus F=I\cap F^c$，

则 G 为 R^n 中的开集，再根据 3.1.2 方法计算 $mG=|G|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n_k}|I_{kv}|$，于是

$$mF=|I|-mG=|I|-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n_k}|I_{kv}|$$

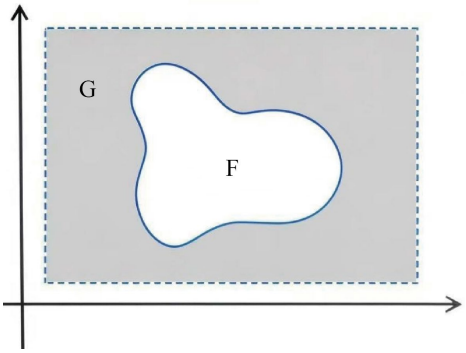

Figure 4. Schematic diagram of the composition of multi-dimensional closed set
图 4. 二维闭集测度计算示意图

3.2.2. 无界闭集

设 $F\subseteq R^n$ 为无界闭集，记 $I_k=\prod_{i=1}^{n}I_i^{(k)},I_i^{(k)}=[-k,k],k\in N,R^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，于是有

$$F=R^n\cap F=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\cap F=\bigcup_{k=1}^{\infty}(I_k\cap F)$$

注意到 $I_k \cap F$ 为 R^n 中有界闭集，可用 3.2.1 的方法求出 $m*(I_k \cap F)$，$\{I_k \cap F\}$ 单调递增序列，故由单调增加原理知

$$mF = \lim_{k\to\infty} m(I_k \cap F)$$

3.3. 一般可测集测度的近似计算

一般可测集的形状很不规则，很难建立计算公式。我们给出建立的思路。设 $E \subseteq R^n$ 为可测集，我们知道：

(1) 当 $mE = \infty$ 时，已有计算结果；

(2) 当 $mE < +\infty$ 时，根据文献[3]-[6] (见图 5)，我们知道存在开集 G，闭集 F，且满足关系 $F \subseteq E \subseteq G$，可使 $m(G \setminus F) < \varepsilon$，则可知 $m(G \setminus E) \le m(G \setminus F) < \varepsilon$，随即得到 $0 < mG - mE < \varepsilon$。此时利用 mG 的计算方法，即可得 mE 的近似计算值。

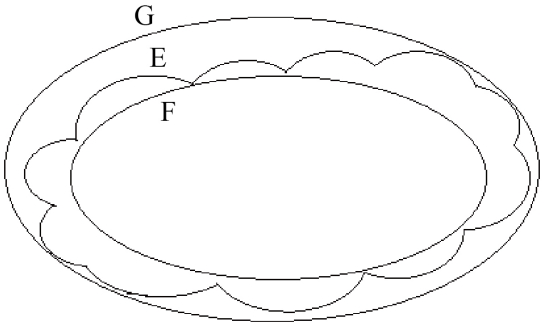

Figure 5. Schematic diagram of set relations for approximate calculation of measure
图 5. 测度近似计算的集合关系示意图

4. 结束语

本文讨论了实变函数论中开集，闭集和一般可测集测度的计算方法，希望与对此内容感兴趣的读者一起分享，同时丰富一些教和学的内容。

另外，在实变函数学习和资料查阅中，在《实变函数与泛函分析基础》[4]一书中发现，有一处习题存在遗漏；在该书的第五章课后习题第三题，其题目描述为“设 E 可测，且 $mE < \infty$，$f(x)$ 为 E 上可测，$E_n = E[n-1 \le f < n]$，则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum_{-\infty}^{\infty} |n| mE_n < \infty$。”

错误点：$\sum |n| mE_n < \infty$ 不能保证 $f(x)$ 在 E 上可积。

反例构造：

设 $E = [0,1]$，$f(x) = \begin{cases} \infty, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$，显然 $mE = 1 < \infty$，$f(x)$ 在 E 上可测，注意到 $E_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}, 0\right], n = 1 \\ \varnothing, n \ne 1 \end{cases}$，有 $\sum_{n=\infty}^{\infty} |n| mE_n = nmE_1 = \frac{1}{2}$，但是 $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x = \infty$ 即可得出 $f(x)$ 不可积。此题应该加上条件“$f(x)$ 在 E 上几乎处处有限”，即 $mE[|f| = \infty] = 0$，结论才成立。

致　谢

在本文的写作过程当中得到本院的杨光崇教授的大力支持和有益的建议，在此表示感谢。

基金项目

国家一流专业“信息与计算科学”和四川省一流专业“数学与应用数学”建设点，学校2024年“一流课程”建设资助课题(JYJG2024091)。

参考文献

[1] 张文筱. 勒贝格积分定义探究及其应用[J]. 绿色环保建材, 2019(7): 253-254.

[2] Stein, E.M. and Shakarchi, R. (2005) Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press.

[3] 夏道行. 实变函数论与泛函分析下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[4] 程其襄. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[5] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[6] 曹广福, 严从荃. 实变函数论与泛函分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[7] Tao, T. (2011). An Introduction to Measure Theory. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/gsm/126

[8] Rudin, W. (1974) Real and Complex Analysis. McGraw-Hill.

[9] Royden, H. and Fitzpatrick, P.M. (2010) Real Analysis. 4th Edition, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.