Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(9), 26-31
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.159230

Hans汉斯

不定积分与定积分可积条件的差异及概念本质溯源

文生兰[*]，韩艺兵，孙铭娟

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2025年7月30日；录用日期：2025年8月26日；发布日期：2025年9月5日

摘 要

不定积分与定积分的可积条件是高等数学的难点，二者存在关联却又有明显区别，明晰其可积条件，对于深度理解不定积分和定积分的概念体系具有关键作用。本文依托积分概念的本质逻辑，结合具体例子，系统探讨不定积分与定积分可积条件的差异，深入阐释导致可积条件不同的内在成因，为高等数学积分知识的学习与理解提供更清晰的理论视角与实践参考。

关键词

不定积分，定积分，可积条件，积分上限的函数，原函数存在性

The Difference in Integrability Conditions between Indefinite Integrals and Definite Integrals and the Origin of Their Conceptual Essence

Shenglan Wen[*], Yibing Han, Mingjuan Sun

Basic Department of Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Jul. 30th, 2025; accepted: Aug. 26th, 2025; published: Sep. 5th, 2025

Abstract

The Integrable conditions of Indefinite integral and definite integral is difficult point of the high

[*]通讯作者。

文章引用: 文生兰, 韩艺兵, 孙铭娟. 不定积分与定积分可积条件的差异及概念本质溯源[J]. 理论数学, 2025, 15(9): 26-31. DOI: 10.12677/pm.2025.159230

mathematics. They are related yet distinctly different. Clarifying these integrable conditions is crucial for deeply understanding the conceptual systems of indefinite and definite integrals. Based on the essential logic of integral concepts and combined with specific examples, this paper systematically explores the differential manifestations of the integrable conditions of indefinite integrals and definite integrals, and deeply explains the internal causes leading to the differences in integrable conditions. It provides a clearer theoretical perspective and practical reference for the learning and understanding of integral knowledge in advanced mathematics.

Keywords

Indefinite Integral, Definite Integral, Integrable Conditions, Integral Upper Limit Function, Existence of Primitive Function

1. 引言

积分学在实际应用领域展现出极为广泛的价值，无论是求解不规则平面图形的面积，不均匀立体的体积，还是计算变力做功，分析物体间的引力等问题，都离不开积分学的支撑。对于积分问题，逻辑上首先应关注积分的存在性，其次才是积分的计算问题，因此，探讨可积条件成为积分学研究的关键环节。现有研究中，柳洁冰、张宏亮[1]从定积分的定义出发，讨论了定积分可积的柯西收敛定理；王明会[2]、苏兆中[3]着重阐释定积分可积的达布定理；王宝嫦[4]虽点明可积与原函数存在是不同概念，但未对可积条件进行细致剖析。整体来看，多数研究者聚焦于定积分可积条件，他们通常从定义切入，通过讨论极限的存在性，推导定积分的存在性结论。

值得注意的是，不定积分与定积分虽同属“积分”范畴，但其可积条件存在显著差异，这源于二者概念本质的区别，本文将结合具体实例，深入探究不定积分与定积分的可积条件，明晰二者可积条件不同的内在逻辑，弥补现有研究在积分学可积条件系统性分析上的不足，为积分学理论研究的进一步完善与实际应用拓展提供新的思考维度。

2. 主要结果

2.1. 不定积分原函数的存在性

如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 存在[5]。

引理 1 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有定义且有第一类间断点或无穷间断点，则 $f(x)$ 的原函数不存在[6]。即不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在 I 上不存在。

例 1 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$，讨论 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性。

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点。

当 $x\neq 0$ 时，存在 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+C$，使 $F'(x)=f(x)$，当 $x=0$ 时，要使 $F(x)$ 连续，$F(0)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=C$，于是

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+C-C}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0\neq f(0)。$$

所以 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 不存在。

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$，讨论 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性。

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点。

当 $x>0$ 时，存在 $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1$，使 $F'(x)=f(x)$；

当 $x<0$ 时，存在 $F(x)=\frac{x^3}{3}+C_2$，使 $F'(x)=f(x)$。为使 $x=0$ 时，$F'(0)=f(0)$，$F(x)$ 必须在 $x=0$ 连续，$F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)$，即 $F(0)=C_1=C_2$。于是

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2}+x}{x}=1；\quad F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^3}{3}}{x}=0。$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 点不可导，即不存在这样的函数 $F(x)$，使当 $x\in R$ 时，$F'(x)=f(x)$。

所以 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 不存在。

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，讨论 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性。

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点。

当 $x\neq 0$ 时，存在 $F(x)=\ln|x|+C$，使 $F'(x)=f(x)$；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$ 不存在，所以不存在连续可导的函数 $F(x)$，使对任何 $x\in R$，都有 $F'(x)=f(x)$。即 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 不存在。

以上 3 例说明，当被积函数有第一类间断点或无穷间断点时，其不定积分不存在。

联系概念实质：不定积分实质是求被积函数的原函数，作为求导的逆运算，由于导函数至多存在第二类间断点，不存在第一类间断点[5]，所以当被积函数有第一类间断点时，其不定积分不存在。这与引理 1 结论一致。

2.2. 积分上限函数的可导性

当被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续、可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$ [6]。该定理的条件可以弱化如下。

定理 2 设被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且有有限个第一类间断点，若 $x_0\in(a,x)$ 是 $f(x)$ 的间断点，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点时，$\Phi(x)$ 可导，当 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点时，$\Phi(x)$ 不可导。

证明： $\forall x\in(a,b)$，取适当小的 Δx，使 $x+\Delta x\in(a,b)$，则

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t，$$

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，设 $m\leq f(x)\leq M$，根据定积分的估值性质，有

$$|m\Delta x|\leq\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|\leq|M\Delta x|，$$

由夹逼准则，当$\Delta x\to 0$时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=\lim_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=0,$$

即$\Phi(x)$在(a,b)内连续。

同理，当$x=a$时，取$\Delta x>0$，可得$\Phi(x)$在$x=a$右连续。当$x=b$时，取$\Delta x<0$，可得$\Phi(x)$在$x=b$左连续。

设x_0是$f(x)$的可去间断点，则$f(x_0^+)=f(x_0^-)\neq f(x_0)$（或$f(x)$在$x_0$无定义)，下面讨论$\Phi(x)$在$x_0$点的可导性。

按照定义

$$\Phi'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}。$$

构造函数$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(x_0,x_0+\Delta x]\\ f(x_0^+), & x=x_0\end{cases}$，则$F(x)$在$[x_0,x_0+\Delta x]$上连续，且$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}F(t)\mathrm{d}t$(一点处的函数值不影响函数在一个区间上的积分值)。于是

$$\Phi'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}F(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(\xi)\Delta x}{\Delta x},$$

($x_0\le\xi\le x_0+\Delta x$)，上式$=\lim\limits_{\xi\to x_0^+}F(\xi)=F(x_0)=f(x_0^+)$。

同理可得，$\Phi'_-(x_0)=f(x_0^-)$。从而$\Phi(x)$在x_0可导，且$\Phi'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$。

类似的方法，当x_0是$f(x)$的跳跃间断点时，由于$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，$\Phi'_+(x_0)=f(x_0^+)$，$\Phi'_-(x_0)=f(x_0^-)$，于是$\Phi(x)$在x_0不可导。

例 4 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & 0<x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$，求$\Phi(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$的表达式，并讨论$\Phi(x)$的可导性。

解 由题知，$x=0$是$f(x)$的可去间断点，$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点。

当$x\le 0$时，$\Phi(x)=\int_{-1}^x(-t-1)\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}$；

当$0<x\le 1$时，$\Phi(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0(-t-1)\mathrm{d}t+\int_0^x(t-1)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}$；

当$x>1$时，$\Phi(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0(-t-1)\mathrm{d}t+\int_0^1(t-1)\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}$。

所以

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}, & x\le 0,\\ -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}-x, & 0<x\le 1,\\ -\frac{3}{2}+\frac{x^2}{2}, & x>1.\end{cases}$$

在$(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$内，$\Phi(x)$是初等函数，连续。在分段点处，

$$\lim_{x\to0^-}\Phi(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\text{；}\lim_{x\to0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\Phi(0)=-\frac{1}{2}$，所以 $\Phi(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$\lim\limits_{x\to1^-}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)=-1$；$\lim\limits_{x\to1^+}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\right)=-1$；$\Phi(1)=-1$，所以 $\Phi(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

综上，$\Phi(x)$ 在 R 上连续。

当 $x<0$ 时，$\Phi'(x)=-x-1=f(x)$；

当 $x=0$ 时，$\Phi'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-0}=-1$，

$$\Phi'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-0}=-1\text{；}\Phi'(0)\neq f(0)=0\text{。}$$

当 $0<x<1$ 时，$\Phi'(x)=x-1=f(x)$；

当 $x=1$ 时，$\Phi'_-(1)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}-(-1)}{x-1}=0$，

$$\Phi'_+(1)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}-(-1)}{x-1}=1\text{；}\Phi(x)\text{ 在 }x=1\text{ 不可导。}$$

当 $x>1$ 时，$\Phi'(x)=x=f(x)$。

综上，$\Phi(x)$ 在 $f(x)$ 的连续点和可去间断点处可导，且在 $f(x)$ 的连续点处有 $\Phi'(x)=f(x)$。在 $f(x)$ 的跳跃间断点处，$\Phi(x)$ 不可导。例 4 可作为定理 4 结论的验证。

2.3. 定积分的可积性

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在[7]。若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无界，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在[7]，只能考查反常积分。

引理 3 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且有有限个间断点，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在[7, 8]。说明，只要 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且间断点的测度为 0，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在[8]。

例如，黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\\[2mm] 0, & x\in[0,1],x\neq\dfrac{p}{q}.\end{cases}$$

其中 p、q 都是正整数，且 $\frac{p}{q}$ 是既约真分数。在 $[0,1]$ 上无理点处处连续，有理点处处不连续，不连续点的测度为 0，所以黎曼函数在 $[0,1]$ 上定积分存在[8]，但不定积分即原函数不存在。

联系概念实质：定积分的本质是和的极限，用于描述区间上的累积效应。其几何意义是平面图形的面积，函数在单点处的函数值，对应几何直观是一条线，其面积为 0，不影响整个平面图形的面积，所以对于具有有限个间断点的有界函数(甚至存在无数间断点，只要间断点测度为 0) [9]，定积分依然存在。这与引理 3 的结论契合。

3. 结束语

可积条件的差异反映了不定积分与定积分在数学背景上的关联与独立。定积分因实际问题而生，面积计算、路程求解等现实需求推动其发展，不定积分则源于求导逆运算，是对微分过程的反向探索。理解二者的差异，能助力学习者深化对积分概念本质的理解，训练学习者关注条件的必要性与充分性的思维意识，养成对比、类比、归纳总结等科学学习方法，培育严谨的推理习惯，提升对积分学知识的认知深度与运用能力，为进一步探索更复杂的数学知识筑牢根基。

从科学发展视角看，积分理论仍有广阔探索空间。未来可进一步研究其在现代数学分析中的推广与应用，例如在勒贝格积分、广义积分、多元积分等方向的发展，深入探讨函数空间与积分算子的相互作用，有助于理解数学分析的统一性与系统性。这不仅能够拓展积分学的理论框架，也为后续学习实变函数、泛函分析等领域提供了坚实基础。通过这样的延伸研究，可以更好地把握数学知识的整体结构，提升综合运用能力，并激发对更高深数学理论的研究兴趣，让积分学成为连接基础数学与前沿领域的桥梁。

参考文献

[1] 柳洁冰, 张宏亮. 关于定积分定义及可积条件的讨论[J]. 科教文汇, 2011(3): 69-70.

[2] 张明会. 浅谈 R (黎曼)可积条件的层次分析[J]. 湖南工程学院学报, 2014, 24(1): 53-54.

[3] 苏兆中. 可积的一个充要条件[J]. 工科数学, 1995, 11(1): 67-69.

[4] 王宝嫦. 分段函数、函数可积性与原函数存在性[J]. 商情, 2018(30): 222.

[5] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 209.

[6] 同济大学数学系. 高等数学(第八版)上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023: 180, 222-223.

[7] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(二) [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 48-60.

[8] 张安玲. 基于零测度集刻画函数黎曼可积性[J]. 长治学院学报, 2021, 38(5): 1-6.

[9] 姚玉平. Riemman 可积条件浅析[J]. 安庆师范学院学报, 1998, 4(1): 61-65.