**Pure Mathematics** 理论数学, 2025, 15(9), 1-9
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.159227

# 基于循环覆盖与$L^2$方法的q-丰沛除子对数消灭定理的研究

**郭坤燕[1]，万学远[2]**

[1]重庆理工大学数学科学学院，重庆
[2]重庆理工大学数学科学研究中心，重庆

收稿日期：2025年7月31日；录用日期：2025年8月28日；发布日期：2025年9月1日

## 摘　要

本文主要使用循环覆盖技巧与$L^2$方法来研究紧Kähler流形上q-丰沛除子的对数消灭定理。首先回顾了对数微分形式层及带有对数可积联络的层的基本理论。随后利用循环覆盖技巧，证明了紧Kähler流形上支撑于q-丰沛除子的光滑除子及简单交叉除子的若干新的对数消灭定理。

## 关键词

对数消灭定理，循环覆盖，q-丰沛除子，紧Kähler流形

# Logarithmic Vanishing Theorems for q-Ample Divisors via Cyclic Coverings and $L^2$ Method

**Kunyan Guo[1], Xueyuan Wan[2]**

[1]College of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing
[2]Mathematical Sciences Research Center, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Jul. 31st, 2025; accepted: Aug. 28th, 2025; published: Sep. 1st, 2025

## Abstract

**This paper primarily employs the technique of cyclic covering and $L^2$ method to investigate logarithmic vanishing theorems for q-ample divisors on compact Kähler manifolds. We begin by reviewing the foundational theory of logarithmic differential forms and sheaves equipped with logarithmic integrable connections. Building on this, we apply the cyclic covering method to establish several new**

文章引用: 郭坤燕, 万学远. 基于循环覆盖与 $L^2$ 方法的 q-丰沛除子对数消灭定理的研究[J]. 理论数学, 2025, 15(9): 1-9.
DOI: 10.12677/pm.2025.159227

**logarithmic vanishing theorems for smooth divisors and simple normal crossing divisors supported on q-ample divisors in the compact Kähler setting.**

## Keywords

**Log Vanishing Theorem, Cyclic Covering, q-Ample Divisor, Compact Kähler Manifold**



## 1. 引言

关于光滑射影流形上对数微分形式层以及带有对数可积联络的层的基本理论是由 P. Deline 在[1]中建立的。H. Esnault 和 E. Viehweg 在[2] [3]中研究了复代数流形上的对数 de Rham 复形与消灭定理之间的关系，并且指出许多消灭定理可由 Deligne 关于对数 Hodge 到 de Rham 谱序列在 $E_1$ 层退化的结果推出。在[4]中，Huang-Liu-Wan-Yang 证明了紧 Kähler 流形上半正线丛的许多对数消灭定理。在本文中，设 $X$ 是一个紧 Kähler 流形，我们将讨论关于 q-丰沛除子的对数消灭定理。

首先，我们回顾 q-丰沛线丛和 q-丰沛除子的定义。

**定义 1.1** 设 $X$ 是一个紧复流形，$L$ 是 $X$ 上的一个全纯线丛。如果对于 $X$ 上的任意凝聚层 $\mathcal{F}$，存在一个正整数 $m_0 = m_0(X, L, \mathcal{F}) > 0$，使得

$$H^j(X, \mathcal{F} \otimes L^m) = 0 \text{，当 } j > q, m \ge m_0 \text{ 时}$$

则称 $L$ 是 q-丰沛的。如果一个除子 $D$ 满足 $\mathcal{O}_X(D)$ 是 q-丰沛线丛，则称除子 $D$ 是一个 q-丰沛除子。

关于 q-丰沛除子的消灭定理，D. Greb 和 A. Küronya 在[5]中证明了当 $X$ 是光滑射影簇时，光滑、约化且有效的除子满足 q-Kodaira 消灭定理。如果 $X$ 是正规射影扇形簇，N. Broomhead、J.-C. Ottem 和 A. Prendergast-Smith 在[6]中证明了任意 q-丰沛线丛满足 q-Kodaira 消灭定理。在[7]中，Liu-Wan-Yang 证明了如下结论：

**定理 1.2 ([7])** 设 $X$ 是一个紧 Kähler 流形，$D$ 是一个简单交叉除子，如果 $D$ 是一个有效 q-丰沛除子的支撑集，则有

$$H^j(X, \Omega_x^i(\log D)) = 0 \text{，当 } i + j \ge n + q + 1 .$$

特别地，取 $i = n$，得到

$$H^j(X, K_X + D) = 0 \quad \text{当 } j > q . \tag{1}$$

在本文中，我们将利用循环覆盖技巧和 $L^2$ 方法，进一步推广现有的消灭性结论，得到 q-丰沛除子的两个新的对数消灭定理。与已有结果相比，这些定理不仅涵盖了更一般的情形，而且在处理对数微分形式和线丛时都表现出较强的适用性。我们首先考虑光滑除子的情形：

**定理 1.3** 设 $D$ 是一个光滑除子，并且它是某个 q-丰沛有效除子的支撑集。如果 $L$ 是一个全纯线丛，且满足 $L^N = \mathcal{O}_X(D)$，对某个 $N \ge 0$，则

$$H^j(X, \Omega_x^i(\log D) \otimes L^{-K}) = 0 \text{，当 } i + j \ge n + q + 1, 0 \le k \le N - 1 .$$

定理 **1.3** 的证明依赖于循环覆盖的构造以及对 q-丰沛性在拉回下保持性的分析。通过这一方法，我

们能够在较弱的条件下得到对数微分形式与负次幂线丛系数下的消灭定理。

在此基础上，我们进一步将结果推广至简单交叉除子的情形。考虑如下更为一般的场景：

**定理 1.4** 设 $D=\sum_{i=1}^{r} D_i$ 是一个简单交叉除子，并且 $D$ 是某个有效 q-丰沛除子的支撑集，如果 $L^N=\mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^{r} b_i D_i\right)$，其中 $b_i\in(-N,N)\cap\mathbb{Z}$ 对某个 $N\in\mathbb{Z}$ 成立，且 $X-D$ 是单连通的，则

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\otimes L\right)=0\text{，当 }i+j\geq n+q+1$$

与定理 **1.3** 相比，定理 **1.4** 在除子 $D$ 不再光滑而是简单交叉时仍然成立，并且允许更广泛的线丛扭曲条件。值得强调的是，这类结论在推广 Kodaira 型消灭定理和研究 q-丰沛性对几何结构的影响方面具有重要意义。

## 2. 预备知识

在本节中，我们将回顾一些关于对数联络和循环覆盖的基本定义与事实。更多细节可参考[2] [3] [8]-[13]。

### 2.1. 对数联络

设 $X$ 是一个维数为 $n$ 的紧复流形，$D$ 是 $X$ 里的一个简单交叉除子，即 $D=\sum_{i=1}^{r} D_i$，其中 $D_i(1\leq i\leq r)$ 是彼此不同在 $X$ 中横截相交的光滑超曲面。

记自然包含映射 $\tau: U:=X-D\to X$，并设

$$\Omega_X^p(*D)=\lim_{\vec{\nu}}\Omega_X^p(\nu\cdot D)=\tau_*\Omega_U^p.$$

于是 $\left(\Omega_X^\bullet(*D),d\right)$ 构成一个复形。由 Deligne 在[14]中引入的对数形式层

$$\Omega_X^p(\log D)$$

定义为沿 $D$ 具有对数极点的 $\Omega_X^p(*D)$ 的子层，即对于任何开集 $V\subset X$，

$$\Gamma\left(V,\Omega_X^p(\log D)\right)=\left\{\alpha\in\Gamma\left(V,\Omega_X^p(*D)\right):\alpha\text{ 及 }d\alpha\text{ 沿着 }D\text{ 均只有简单极点}\right\}.$$

由[1]或[3]可知，对数复形 $\left(\Omega_X^\bullet(\log D),d\right)$ 是 $\left(\Omega_X^\bullet(*D),d\right)$ 的一个子复形，且 $\Omega_X^p(\log D)$ 是局部自由，

$$\Omega_X^p(\log D)=\wedge^p\Omega_X^1(\log D).$$

对于任意 $z\in X$，可在 $z=(0,\cdots,0)$ 的一个小领域 $U$ 中选择局部全纯坐标 $\left\{z^1,\cdots,z^n\right\}$，使得

$$D\cap U=\left\{z^1\cdots z^k=0\right\}$$

为若干坐标超平面的并。这样的二元组

$$\left(U,\left\{z^1,\cdots,z^n\right\}\right)$$

称为一个对数坐标系[15]。此时，$\Omega_X^p(\log D)$ 由全纯形式和对数微分 $\frac{dz_i}{z_i}(i=1,\cdots,k)$ 生成，即

$$\Omega_X^p(\log D)=\Omega_X^p\left(\frac{dz^1}{z^1},\cdots,\frac{dz^k}{z^k}\right).$$

记

$$A^{0,q}\left(X,\Omega_X^p(\log D)\right)$$

为取值于 $\Omega_X^p(\log D)$ 的 $X$ 上光滑 $(0,q)$-形式的空间，并将 $A^{0,q}\left(X,\Omega_X^p(\log D)\right)$ 的元素为对数 $(p,q)$-形式。

现在回顾局部自由层上的对数联络的定义。

**定义 2.1** [3]设 $\varepsilon$ 是 $X$ 上的一个局部自由层，且有

$$\nabla:\varepsilon\to\Omega_X^1(\log D)\otimes\varepsilon$$

是一个 $\mathbb{C}$-线性映射，满足

$$\nabla(f\cdot e)=f\cdot\nabla e+df\otimes e. \tag{2}$$

定义

$$\nabla_a:\Omega_X^a(\log D)\otimes\varepsilon\to\Omega_X^{a+1}(\log D)\otimes\varepsilon$$

为

$$\nabla_a(\omega\otimes e)=d\omega\otimes e+(-1)^\alpha\,\omega\wedge\nabla e.$$

若对所有 $a$ 满足 $\nabla_{a+1}\circ\nabla_a=0$，这样的 $\nabla$ 被称为沿 $D$ 的可积对数联络，(或者简称为联络)。复形

$$\left(\Omega_X^\bullet(\log D)\otimes\varepsilon,\nabla_\bullet\right)$$

被称为 $(\varepsilon,\nabla)$ 的对数 de Rham 复形。

设 $L$ 是 $X$ 上的一个全纯线丛，满足

$$L^N=\mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^r a_iD_i\right)$$

其中 $a_i\in\mathbb{Z},1\le i\le r$。则有

**命题 2.2** 在 $L$ 上存在一个沿 $D$ 的可积对数联络。

证明. 设 $\sigma$ 是 $\mathcal{O}_x\left(\sum_{i=1}^r a_iD_i\right)$ 的规范亚纯截面，取 $L$ 的一个局部标架 $e$，使得

$$e^N=\prod_{i=1}^r\left(z^i\right)^{-a_i}\sigma \tag{3}$$

定义

$$\partial e:=\frac{1}{N}\partial\log\frac{e^N}{\sigma}e=-\sum_{i=1}^r\frac{a_i}{N}\frac{dz^i}{z^i}e \tag{4}$$

其取值在 $\Omega_X^1(\log D)\otimes L$ 中。这个定义是良好的：任取满足 $e'^N=e^N$ 的另一局部标架 $e'$，由于 $\partial\left(\frac{e'}{e}\right)=0$，于是

$$\partial e'=-\sum_{i=1}^r\frac{a_i}{N}\frac{dz^i}{z^i}e'=\frac{\partial e}{e}e'=\frac{e'}{e}\partial e=\partial\left(\frac{e'}{e}\right)\otimes e+\frac{e'}{e}\partial e,$$

从而满足(2)。进一步地，定义 $L$ 上的对数联络 $d$ 为

$$d:L\to\Omega_X^1(\log D)\otimes L,\quad d(f\cdot e):=f\cdot\partial e+df\otimes e.$$

它在 $\Omega_X^p(\log D)\otimes L$ 上诱导出对数联络：

$$d(\omega\otimes e)=d\omega\otimes e+(-1)^p\,\omega\wedge\partial e=d\omega\otimes e+(-1)^p\,\omega\wedge\left(-\sum_{i=1}^r\frac{a_i}{N}\frac{dz^i}{z^i}\right)\otimes e.$$

通过直接计算，可以得到 $d^2=0$，因此 $d$ 是 $L$ 上沿 $D$ 的一个可积对数联络。

## 2.2. 循环覆盖

在本小节中，设 $L$ 是 $X$ 上的一个全纯线丛，满足

$$L^N = \mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i D_i\right),$$

其中 $a_i \geq 0$ 且 $a_i \in \mathbb{Z}$。记 $s$ 为 $\mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i D_i\right)$ 的规范截面，并以 $\mathbb{L}$ 表示线丛 $L$ 的全空间。设丛投影为 $\pi:\mathbb{L}\to X$。若 $\nu\in\Gamma\left(\mathbb{L},\pi^* L\right)$ 是自然(tautological)截面，则 $\pi^* s-\nu^N$ 的零除子在 $\mathbb{L}$ 中确定了一个解析子空间，记为 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]$，记 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 的正规化为 $\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]$，并且记 $\bar{\pi}:\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]\to X$。我们称 $\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 为由 $s$ 取第 $N$ 次根得到的循环覆盖。映射 $\bar{\pi}$ 是平坦且有限的，$\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 是一个正常(normal)多样体，并且，

$$\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]} = \bigoplus_{i=0}^{N-1} L^{-\mathrm{i}}\left(\left\lfloor \frac{i}{N}\sum_{j=1}^{r} a_j D_j \right\rfloor\right),$$

(参见例如[3]或[11])。

设 $L$ 的一个局部标架 $e$，则 $L$ 的任一元素可写作为 $\nu\cdot e$。因此，作为复流形，$\mathbb{L}$ 的局部坐标可记为 $(z,\nu)$。在该局部坐标下，

$$X\left[\sqrt[N]{s}\right] := \left\{(z,\nu)\in\mathbb{L} \middle| \nu^N - s(z) = 0\right\},$$

其中 $s = s(z)e$。因此，当且仅当

$$\nabla\left(\nu^N - s(z)\right) = \left(N\nu^{N-1}, \nabla s(z)\right) = 0,$$

时，点 $(z,\nu)\in\mathbb{L}$ 是 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 的奇点；这等价于 $z\in\operatorname{Sing}\left(\sum_{i=1}^{r} a_i D_i\right)$。

若 $\sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ 是既约且光滑，则 $\operatorname{Sing}\left(\sum_{i=1}^{r} a_i D_i\right)=\varnothing$，从而 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 光滑，在此情况下有 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]=\bar{X}\left[\sqrt[n]{s}\right]$。

**命题 2.3** [9] [16]. 设 $\pi: X\left[\sqrt[n]{s}\right]\to X$ 是沿光滑除子 $D$ 分歧并由 $L$ 决定的 $N$-重循环覆盖，其中 $L^N=\mathcal{O}_X(D)$，且记 $D'$ 是 $X\left[\sqrt[n]{s}\right]$ 上的约化除数 $\pi^{-1}(D)$，则

(i) $\mathcal{O}_{X\left[\sqrt[N]{s}\right]}(D') = \pi^* L$；

(ii) $\pi^* D = ND'$；

(iii) $K_{X\left[\sqrt[N]{s}\right]} = \pi^*\left(K_X\otimes L^{N-1}\right)$；

(iv) $\pi_* \mathcal{O}_X = \oplus_{i=0}^{N-1} L^{-i}$；

(v) $\pi^* \Omega_X^\bullet(\log D) = \Omega_{X\left[\sqrt[n]{s}\right]}^\bullet\left(\log\left(\pi^* D\right)\right)$。

## 3. 对数消灭定理

在本节中，我们将利用循环覆盖技巧来讨论关于 q-丰沛除子的一些对数消灭定理。

**命题 3.1** 若 $(X,\omega)$ 是紧 Kähler 流形，则 $Y$ 也是紧 Kähler 流形。

证明：由循环覆盖的构造可知，$Y$ 是线丛全空间 $\mathbb{L}$ 的一个紧复子流形。取上 $L$ 的一个 Hermite 度量 $h$，由于 $Y$ 紧，我们可取足够大的 $R>0$，使得

$$Y \hookrightarrow Y_R := \left\{\upsilon e\in L, \|\upsilon\|_h^2 = h|\upsilon|^2 < R\right\}\subset\mathbb{L}. \quad (5)$$

直接计算得

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\|\upsilon\|_h^2=\sqrt{-1}\left(\partial\bar{\partial}\log h\right)\|\upsilon\|_h^2+\sqrt{-1}h\delta\upsilon\wedge\delta\overline{\upsilon},$$

其中 $\delta\upsilon:=d\upsilon+\upsilon\partial\log h$。限制到开流形 $Y_R$ 上，有

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\|\upsilon\|_h^2=-CR\pi^*\omega+\sqrt{-1}h\delta\upsilon\wedge\delta\overline{\upsilon}$$

其中常数 $C>0$ 满足 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h>-C\omega$，$\pi:Y_R(\subset\mathbb{L})\to X$ 为自然投影。由此知对任意 $C_1>CR$，$C_1\pi^*\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\|\upsilon\|_h^2$ 是 $Y_R$ 上的 Kähler 度量。结合(5)式并作限制，便得到 $Y$ 上的一个 Kähler 度量。

设 $X$ 为维数为 $n$ 的紧 Kähler 流形。

**定理 3.2** 设 $D$ 是一个光滑除子，并且它是某个 q-丰沛有效除子的支撑集。如果全纯线丛 $L$ 满足 $L^N=\mathcal{O}_X(D)$，(其中 $N\geq 0$)，则

$$H^j\left(X,\Omega_x^i(\log D)\otimes L^{-k}\right)=0，当 i+j\geq n+q+1,0\leq k\leq N-1$$

证明：设 $\pi:Y\to X$ 为沿着 $D$ 的 $N$ 重循环覆盖，由于 $\pi$ 是一个平坦且有限的，对于任意的 $0\leq k\leq N-1$，由命题 **2.3**(iv)与[16]可得

$$\begin{aligned}H^j\left(X,\Omega_x^i(\log D)\otimes L^{-k}\right)&\subset H^j\left(X,\Omega_x^i(\log D)\otimes\bigoplus_{k=0}^{N-1}L^{-k}\right)\\&=H^j\left(X,\pi_*\left(\Omega_x^i(\log D')\right)\right)\\&\cong H^j\left(Y,\Omega_Y^i(\log D')\right)\end{aligned}\tag{6}$$

设 $\tilde{D}$ 是有效 q-丰沛除子，且 $Supp\left(\tilde{D}\right)=D$，则 $\pi^*\tilde{D}$ 仍为 $Y$ 上的有效 q-丰沛除子(见命题 **2.3**(ii))，且 $Supp\left(\pi^*\tilde{D}\right)=D'$，事实上

$$Supp\left(\pi^*\left(\tilde{D}\right)\right)=\pi^{-1}\left(\tilde{D}\right)=\pi^{-1}(D)=D'$$

对任意的凝聚层 $\mathcal{F}$，由射影公式与 $\pi$ 的 Leray 谱序列，(见[17])有

$$H^j\left(Y,\left(\mathcal{O}_Y\left(\pi^*\tilde{D}\right)\right)^{\otimes L}\otimes\mathcal{F}\right)\cong H^j\left(X,\left(\mathcal{O}_X\left(\tilde{D}\right)\right)^{\otimes L}\otimes\pi_*\mathcal{F}\right).$$

依定义 **2.1**，$\pi^*\tilde{D}$ 也是 $Y$ 上的 q-丰沛除子。由命题 **3.1** 及[7]得到

$$H^j\left(Y,\Omega_Y^i(\log D')\right)=0,i+j\geq n+q+1$$

与(6)合并即得

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\otimes L^{-k}\right)=0,i+j\geq n+q+1,0\leq k\leq N-1$$

下面的命题是[4, Theorem 3.1]与[7, Theorem 1.2]的一个应用。设 $L$ 为 $X$ 上的全纯线丛。

**定理 3.3** 设 $D=\sum_{i=1}^r D_i$ 是一个简单交叉除子，并且 $D$ 是某个有效 q-丰沛除子的支撑集，如果 $L^N=\mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^r b_iD_i\right)$，其中 $b_i\in(-N,N)\cap\mathbb{Z}$ 对某个 $N\in\mathbb{Z}$ 成立，且 $X-D$ 是单连通的，则

$$H^j\left(X,\Omega_x^i(\log D)\otimes L\right)=0，当 i+j\geq n+q+1.$$

证明：设 $\sigma_i$ 是 $\mathcal{O}_X(D_i)$ 的规范截面。由假设

$$\bigotimes_{i=1}^r\sigma_i^{\otimes b_i}\in H^0\left(X,L^N\right),$$

且它在 $U:=X-D$ 上不消灭。又因 $U$ 是单连通，可在 $L|_U$ 上选取一支分支截面，记为

$$\tilde{\sigma} := \left( \bigotimes_{i=1}^{r} \sigma_i^{\otimes b_i} \right)^{1/N} \in H^0\left(U, L|_U\right).$$

事实上，由于 $L^N$ 是 $X$ 上的全纯线丛，其全空间 $\mathbb{L}^N$ 维数为 $n+1$ 的开复流形，故

$$\bigotimes_{i=1}^{r} \sigma_i^{\otimes b_i} : X \to L^N .$$

是全纯映射。注意到

$$p : L - \{0\} \to L^N - \{0\}, e \to e^N$$

是覆盖映射，这里的 $\{0\}$ 记作为 $L$ 的零截面。由于 $U$ 单连通，依[18]，存在提升 $\tilde{\sigma}^N : U \to L - \{0\}$ 使得

$$\tilde{\sigma}^N = p \circ \tilde{\sigma} = \bigotimes_{i=1}^{r} \sigma_i^{\otimes b_i}.$$

又因为 $p$ 在局部为双全纯映射，故 $\tilde{\sigma}$ 是 $L|_U$ 的一个全纯截面。

记 $H_{(2)}^{i,j}\left(U, L|_U, \omega_U, h_U^L\right)$ 是 $L^2$ -Dolbeault 上同调群(见[4])。为了比较扭线丛 $L|_U$ 与平凡线丛 $\mathcal{O}_U$ 系数下的 $L^2$ 上同调，我们构造了如下自然的乘法映射：

$$\otimes\tilde{\sigma} : H_{(2)}^{i,j}\left(U, \mathcal{O}_U, \omega_p, h_1\right) \to H_{(2)}^{i,j}\left(U, L|_U, \omega_p, h_2\right) \tag{7}$$

其中 $\omega_p$ 是 $U$ 上的一个 Poincaré 型度量，(见[4])， $h_1$ 与 $h_2$ 分别为 $\mathcal{O}_U$ 与 $L|_U$ 上的光滑 Hermite 度量。更具体地，我们设

$$h_1 = \prod_{i=1}^{r} \|\sigma_i\|_{D_1}^{2\tau_i} \left(\log\left(\|\sigma_i\|_{D_i}^2\right)\right)^{\alpha}$$

以及

$$h_2 = \prod_{i=1}^{r} \|\sigma_i\|_{D_1}^{2\left(\tau_i - \frac{b_i}{N}\right)} \left(\log\left(\|\sigma_i\|_{D_i}^2\right)\right)^{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{r} \|\bullet\|_{D_i}^{2b_i}\right)^{\frac{1}{N}},$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个足够大的偶整数， $\tau_i \in (0,1]$ ， $\|\bullet\|_{D_i}$ 是 $\mathcal{O}_X(D_i)$ 上任意固定的平滑度量。

注意到 $\tilde{\sigma}$ 是 $U$ 上满足 $\tilde{\sigma}^N = \otimes_{i=1}^{r} \sigma_i^{\otimes b_i}$ 的全纯截面，故其模长满足：

$$\|\tilde{\sigma}\|_{h_2}^2 = \prod_{i=1}^{r} \|\sigma_i\|_{D_i}^{2\left(\tau_i - \frac{b_i}{N}\right)} \left(\log\left(\|\sigma_i\|_{D_i}^2\right)\right)^{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{r} \|\sigma_i\|_{D_i}^{2b_i}\right)^{\frac{1}{N}} = h_1 .$$

因此， $\otimes\tilde{\sigma}$ 是一个在 $L^2$ 意义下的同构映射。

接下来，我们简要说明为何[4]中应用 $L^2$ -Dolbeault 理论的关键条件在当前情形下成立。文献中要求的主要条件包括：(1) $U = X - D$ 具有 Poincaré 型度量；(2) 度量 $h_2$ 具有下面形式

$$h_2 = \prod_{i=1}^{s} \|\sigma_i\|_{D_1}^{2\tau_i} \left(\log\left(\|\sigma_i\|_{D_i}^2\right)\right)^{\alpha} h^L$$

其中 $\tau_i \in (0,1]$，

在本情形中，由于 $D$ 是简单法线交叉除子，因此 $U$ 上存在良定义的 Poincaré 型度量 $\omega_P$ (见[4])。而且我们选择的度量 $h_1$ 与 $h_2$ 满足 $\tau_i - \dfrac{b_i}{N} \in (0,1]$ 和 $\tau_i \in (0,1]$。此外，$X$ 是紧 Kähler 流形，$D$ 是简单交叉除子，故满足对数几何与解析技术所需的正则性假设。

综上，文献[4]中的假设在此均得满足，于是我们得到同构

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\right)\cong H_{(2)}^{i,j}\left(U,\mathcal{O}_U,\omega_p,h_1\right) \tag{8}$$

以及

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\otimes L\right)\cong H_{(2)}^{i,j}\left(U,L|_U,\omega_p,h_2\right) \tag{9}$$

由(7)、(8)及同构(9)得到

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\otimes L\right)\cong H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\right).$$

最后，再结合[7]，便得到所需消灭性结论：

$$H^j\left(X,\Omega_X^i(\log D)\otimes L\right)=0, i+j\geq n+q+1.$$

证毕。

**注 3.4** 若 $X$ 为射影情形，关于 q-丰沛除子的各种对数消灭定理已在[2] [5] [6]中得到研究。

## 4. 结论与讨论

本文采用循环覆盖技巧与 $L^2$ 方法，证明了关于 q-丰沛除子的两个新的对数型消失定理，作为对文献[4] [7]中相关工作的进一步发展与推广。我们所得到的定理中，定理 **1.3** 针对光滑除子的情形，给出了在扭曲系数下的对数消灭性结论；而定理 **1.4** 则将这一结论推广到了更一般的简单法线交叉除子(simple normal crossing divisors)情形。然而，定理 **1.4** 的成立依赖于额外的假设，即要求开子空间 $X-D$ 是单连通的。

因此，一个自然而重要的问题是：定理 **1.3** 是否仍然适用于一般的简单交叉除子？换言之，是否能够在不要求 $D$ 光滑的前提下仍然保持同样的消灭性？此外，定理 **1.4** 中的单连通性条件是否为必要？在缺少该假设的情况下，结论是否依然成立？这些问题的进一步研究将有助于更深入理解 q-丰沛性与对数型消灭性之间的内在联系，也可能为更一般的消灭性理论奠定基础。

## 基金项目

该研究得到国家自然科学基金(项目编号：12101093)和重庆理工大学科研启动基金资助项目的资助。

## 参考文献


[1] Deligne, P. (1970) Equations differentielles à points singuliers réguliers. Springer, 1, 3.

[2] Esnault, H. and Viehweg, E. (1986) Logarithmic De Rham Complexes and Vanishing Theorems. *Inventiones Mathematicae*, **86**, 161-194. https://doi.org/10.1007/bf01391499

[3] Esnault, H. and Viehweg, E. (1992) Lectures on Vanishing Theorems. Birkhäuser, 1-4.

[4] Huang, C., Liu, K., Wan, X. and Yang, X. (2022) Vanishing Theorems for Sheaves of Logarithmic Differential Forms on Compact Kähler Manifolds. *International Mathematics Research Notices*, **2023**, 13501-13523. https://doi.org/10.1093/imrn/rnac204

[5] Greb, D. and Küronya, A. (2015) Partial Positivity: Geometry and Cohomology of *q*-Ample Line Bundles. In: Hacon, C.D., Mustaţă, M. and Popa, M., Eds., *Recent Advances in Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 207-239. https://doi.org/10.1017/cbo9781107416000.013

[6] Broomhead, N., Ottem, J.C. and Prendergast-Smith, A. (2015) Partially Ample Line Bundles on Toric Varieties. *Glasgow Mathematical Journal*, **58**, 587-598. https://doi.org/10.1017/s001708951500035x

[7] Liu, K., Wan, X. and Yang, X. (2019) Logarithmic Vanishing Theorems for Effective Q-Ample Divisors. *Science China Mathematics*, **62**, 2331-2334. https://doi.org/10.1007/s11425-019-9553-2

[8] Ancona, V. and Gaveau, B. (2005) Differential Forms on Singular Varieties, De Rham and Hodge Theory Simplified. Chapman Hall/CRC, 2.

[9] Barth, W., Hulek, K., Peters, C. and Van de Ven, A. (2004) Compact Complex Surfaces (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics 4). 2nd Edition, Springer-Verlag, 2, 4, 5.

[10] Griffith, P. and Harris, J. (1978) Principles of Algebraic Geometry. Wiley, 2.

[11] Kollár, J. (1995) Singularities of Pairs. *Proceedings of Symposia Pure Mathematics*, **62**, 221-287.

[12] Liu, K., Rao, S. and Wan, X. (2019) Geometry of Logarithmic Forms and Deformations of Complex Structures. *Journal of Algebraic Geometry*, **28**, 773-815. https://doi.org/10.1090/jag/723

[13] Lazarsfeld, R. (2004) Positivity in Algebraic Geometry, I, II, A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 2.

[14] Deligne, P. (1968) Théorème de Lefschetz et Critères de Dégénérescence de Suites Spectrales. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **35**, 107-126. https://doi.org/10.1007/bf02698925

[15] Kawamata, Y. (1978) On Deformations of Compactifiable Complex Manifolds. *Mathematische Annalen*, **235**, 247-265. https://doi.org/10.1007/bf01420124

[16] Iacono, D. (2014) Deformations and Obstructions of Pairs ($X$, $D$). *International Mathematics Research Notices*, **2015**, 9660-9695. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu242

[17] Shiffman, B. and Sommese, A. (1985) Vanishing Theorems on Complex Manifolds. Birkhauser Boston Inc, 6. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6680-3

[18] Fulton, W. (1995) Algebraic Topology: A First Course. Springer-Verlag, 7. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4180-5